仁华学校奥林匹克数学系列丛书

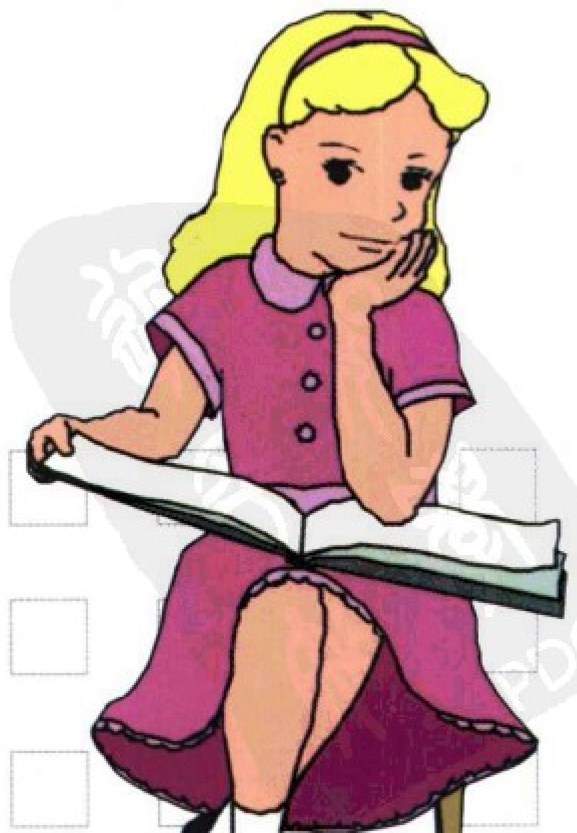
人大附中编

仁华学校奥林匹克数学

RENHUAXUEXIAOAOLINPIKESHUXUE

课本

小学六年级



中国大百科全书出版社

人大附中远程教育网网址：
http://www.rdfz.com

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

- 仁华学校奥林匹克数学课本(12册)
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练导引·小学部（2册）
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练教程（4册）
- 仁华学校奥林匹克数学竞赛试题与详解·小学部（6册）
- 仁华学校奥林匹克数学测试卷（4册）

仁华学校奥林匹克物理系列丛书

- 仁华学校奥林匹克物理课本（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理试题解析（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理实验（2册）

仁华学校奥林匹克英语系列丛书

- 仁华学校奥林匹克图解英语（4册）

ISBN 7-5000-6982-0
9 787500 069829 >

ISBN7-5000-6982-0/G·664
定价：10.00元

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

仁华学校（原华罗庚学校）
奥林匹克数学课本

小学六年级

（最新版）

人大附中编
主编：刘彭芝

中国大百科全书出版社

总编辑：徐惟诚　　社长：田胜立

图书在版编目（CIP）数据

仁华学校奥林匹克数学课本·小学六年级/刘彭芝主编．-北京：中国大百科全书出版社，2003.12
（仁华学校奥林匹克数学系列丛书）
ISBN 7-5000-6982-0

Ⅰ．仁…　Ⅱ．刘…
Ⅲ．数学课-小学-教学参考资料　Ⅳ．G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 118204 号

仁华学校奥林匹克数学课本（小学六年级·最新版）

主　　编：刘彭芝
责任编辑：简菊玲
封面设计：何　茜
责任印制：徐继康

出版发行：中国大百科全书出版社
（北京阜成门北大街 17 号　100037　68315606）
http://www.ecph.com.cn
排　　版：北京中文天地文化艺术有限公司
印　　刷：北京华正印刷厂
经　　销：新华书店总店北京发行所

版　　次：2004 年 1 月第 1 版
印　　次：2004 年 1 月第 1 次印刷
印　　张：10
开　　本：880×1230　1/32
字　　数：215 千字
印　　数：1-20000
ISBN 7-5000-6982-0/G·664
定　　价：10.00 元

顾　问	王　元	裘宗沪	
	冯克勤	陈德泉	
主　编	刘彭芝		
副主编	童　欣	徐鸣皋	
编　委	童　欣	莫颂清	杨骅飞
	胡先蕙	郭丽军	梁丽平
	彭建平	邓健新	
编　撰	顾秀文	刘景华	马淑珍
	李　玫	杨骅飞	周春荔
	郜舒竹	王人伟	郭丽军
	王永俊	陶晓勇	周沛耕

序

这套丛书是北京仁华学校的教学用书。

北京仁华学校是人大附中的超常教育实验基地。其前身为北京市华罗庚学校，2003 年 12 月改用新名（为叙述方便起见，下文涉及“北京市华罗庚学校”或“华校”的一律改用新名)。仁华学校的办学目的是探索科学实用、简单易行的鉴别与选拔超常儿童的方法，探索具有中国特色的超常教育模式，为国家大面积早期发现与培养现代杰出人才开辟一条切实可行的途径。在这里，数百位优秀教师精心执教，一批批超常儿童茁壮成长。仁华学校全体师生决心在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族的伟大复兴甘当马前卒。

超常教育与早期教育为当今世界各国所重视。近年来，我国的众多有识之士投身超常教育事业，也取得了可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步，但同时也是一个复杂而全新的教育课题。无论在历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长的环境不佳，特别是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育。因而，必须更新教育观念和教学模式，这样才能把大批聪慧儿童培养成为知识经济时代的栋梁之材。我们认为，超常儿童是具有良好的智力和非智力个性特征的统一体，是遗传与环境共同作用下的产物。基于此种看法，北京仁华学校的超常

教育，以尊重个性和挖掘潜力为基本原则，强调选拔与培养相结合，不缩短学制而注重学生综合素质的全面提高。

仁华学校分为小学部、初中部和高中部。小学部属校外培训性质，招收小学三至六年级的学生，招生时间定在每年9月或10月，入学后每周学习一次。初中部和高中部属常规中等教育，纳入人大附中建制，每个年级设4－6个实验班。仁华学校初中部和高中部的生源分别主要来自小学部和初中部，同时面向全市招生。

仁华学校在办学过程中，逐渐形成了自己独特的课程体系。在必修课中，我们把数学作为带头学科，并以此促进物理、化学、生物、外语、计算机等其他学科的发展。这是因为，数学作为研究现实世界中数和形的一门基础科学，不仅对人类社会的进步和国家的建设发挥着关键的作用，而且对训练人们的思维能力具有重要的价值。此外，仁华学校还开设有现代少年、科学实践、社会实践、心理导向、创造发明和生物环保等特色课，以及汽车模拟驾驶、网页设计、天文观测、电子技术、几何画板、艺术体操、篆刻和摄影等选修课。华校全新的课程设置，近而言之，是希望学生能够增强学习兴趣，开阔知识视野；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下坚实而全面的科学文化基础。

仁华学校在办学过程中，还逐渐形成了一支思想新、业务精、肯吃苦、敢拼搏的教师队伍。这其中既有多年工作在教学第一线的中小学高级和特级教师，又有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，还有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们着眼于祖国的未来，甘做人梯，为超常教育事业辛勤耕耘，是仁华学校藉以成长、引以自豪的中流砥柱。

实践证明，仁华学校对超常儿童的培养方略是可取的。十余年来，仁华学校为高等学校输送了大量全面发展、学有特长并具备创新精神和高尚品德的优异人才。已毕业的16届实验班学生全部考取重点大学，其中进入北京大学和清华大学的人数约占总数的68%，保送生约占25%。不仅如此，还有近3000人次学生在区、市、国家乃至世界级的学科竞赛中获奖夺魁，数量位居北京市重点中学之首。仁华学校的学生在全国雷达表青少年科学英才竞赛中获一、二、三等奖各一次，在全俄罗斯数学竞赛中获两枚金牌、一枚银牌，在国际物理邀请赛中获一枚银牌，在国际信息学奥林匹克竞赛（IOI）中获一枚铜牌，在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获满分金牌2枚和银牌1枚。近200人在各种发明比赛中获奖，其中几十人获全国及世界创造发明比赛的金奖、银奖，并取得五项国家专利。还有33人次在全国科学论文评比中获一、二、三等奖。此外，实验班的同学在艺术体育等方面也成绩斐然。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实践，使得一批又一批英才脱颖而出，这足以显示仁华学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

仁华学校超常教育的实践和成果已引起全国和国际教育界的关注。华校现在是中国人才研究会超常人才专业委员会副理事长单位，其超常教育研究课题曾荣获北京市“八五”普教科研优秀成果二等奖。仁华学校先后有数十位师生参加了国际超常儿童教育学术会议，在各种国际会议上宣读论文三十余篇，并同五十多个国家和地区从事超常教育的学校及研究机构建立了友好往来或合作研究关系。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验基础之上的。我们组织编写的这套“北京市

华罗庚学校奥林匹克系列丛书”的作者大部分都是原华校的骨干教师，开创了荟萃专家编书的格局。另外还有数位曾经在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获得金牌和银牌的大学生和研究生参加撰写。这支由学生组成的特别劲旅将他们学习的真切感受和新鲜经验表达出来，使得本丛书独具一格。综合而言，展现在读者面前的这套丛书集实用、新颖、通俗、严谨等特点于一身，我们将其奉献给中小学教师、学生及家长，希望能博得广大读者的喜爱。此套丛书涉及数学、英语、物理和计算机等学科，目前已经出版和即将出版的有四十余册。

俗云：“一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。”仁华学校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。“合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。”遥望未来，让我们同呼志士之言：为中国在21世纪成为科技强国而献身。

作为本系列丛书的主编，借这套丛书再次出版的机会，我再次以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意，恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

写于2001年1月

修改于2003年12月

目　录

上　册

目录

下册

上册

第1讲　工程问题

工程问题是应用题中的一种类型．在工程问题中，一般要出现三个量：工作总量、工作时间（完成工作总量所需的时间）和工作效率（单位时间内完成的工作量）．

这三个量之间有下述一些关系式：

工作效率×工作时间＝工作总量，

工作总量÷工作时间＝工作效率，

工作总量÷工作效率＝工作时间．

为叙述方便，把这三个量简称工量、工时和工效．

【例1】　一项工程，甲乙两队合作需12天完成，乙丙两队合作需15天完成，甲丙两队合作需20天完成，如果由甲乙丙三队合作需几天完成？

分析　设这项工程为1个单位，则甲、乙合作的工效为$\frac{1}{12}$，乙、丙合作的工效为$\frac{1}{15}$，甲、丙合作的工效为$\frac{1}{20}$．因此甲、乙、丙三队合作的工效的两倍为$\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}$，所以甲、乙、丙三队合作的工效为$(\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20})\div 2=\frac{1}{10}$．因此三队合作完成这项工程的时间为$1\div\frac{1}{10}=10$（天）．

解：$1\div[(\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20})\div 2]$

$=1\div[\frac{1}{5}\div 2]=1\div\frac{1}{10}=10$（天）．

答：甲、乙、丙三队合作需 10 天完成.

说明：我们通常把工量“一项工程”看成一个单位. 这样，工效就用工时的倒数来表示. 如例 1 中甲乙两队合作的工时为 12 天，那么工效就为$\frac{1}{12}$，它表示甲乙两队一天完成全部工程的$\frac{1}{12}$.

【例 2】 师徒二人合作生产一批零件，6 天可以完成任务. 师傅先做 5 天后，因事外出，由徒弟接着做 3 天. 共完成任务的$\frac{7}{10}$. 如果每人单独做这批零件各需几天?

分析 设一批零件为单位“1”. 其中 6 天完成任务，用$\frac{1}{6}$表示师徒的工效和. 要求每人单独做各需几天，首先要求出各自的工效，关键在于把师傅先做 5 天，接着徒弟做 3 天转化为师徒二人合作 3 天，师傅再做 2 天.

解：师傅工效：$(\frac{7}{10}-\frac{1}{6}\times 3)\div 2=\frac{1}{10}$；

徒弟工效：$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$；

师傅单独做需几天：$1\div\frac{1}{10}=10$（天）；

徒弟单独做需几天：$1\div\frac{1}{15}=15$（天）.

答：如果单独做，师傅需 10 天，徒弟需 15 天.

【例 3】 一项工程，甲单独完成需 12 天，乙单独完成需 9 天. 若甲先做若干天后乙接着做，共用 10 天完成，问甲做了几天?

分析 解答工程问题时，除了用一般的算术方法解答外，还可以根据题目的条件，找到等量关系，列方程

解题.

解: 设甲做了 x 天. 那么,

甲完成工作量 $\frac{1}{12}x$,　　乙做的天数 $10-x$,

乙完成工作量 $(10-x)\times\frac{1}{9}$,

因此　$\frac{1}{12}x+(10-x)\times\frac{1}{9}=1$,

$\frac{1}{12}x+\frac{10-x}{9}=1$.

两边同乘 36,得到:$3x+40-4x=36$,

$x=4$.

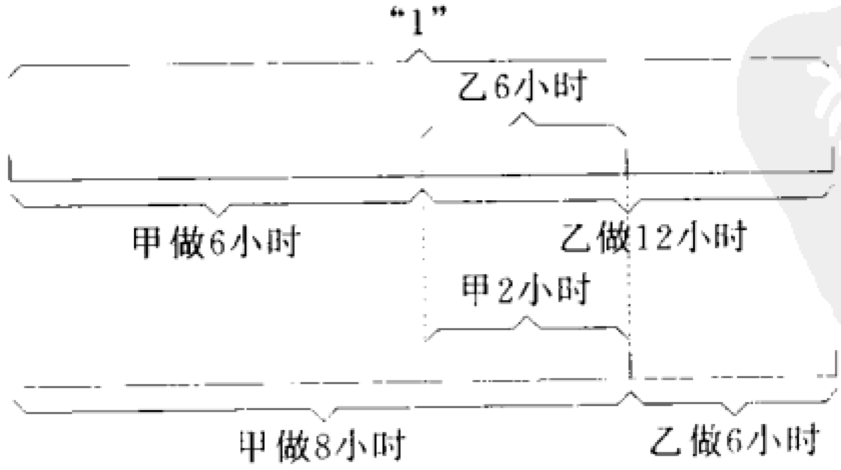
答:甲做了 4 天.

【例 4】 一件工作甲先做 6 小时,乙接着做 12 小时可以完成.甲先做 8 小时,乙接着做 6 小时也可以完成.如果甲做 3 小时后由乙接着做,还需要多少小时完成?

分析　设一件工作为单位"1".甲做 6 小时,乙再做 12 小时完成或者甲先做 8 小时,乙再做 6 小时都可完成,用图表示它们的关系如下:

由图不难看出甲 2 小时工作量 = 乙 6 小时工作量,

∴　甲 1 小时工作量 = 乙 3 小时工作量.可用代换方法求解问题.



解：若由乙单独做共需几小时：

$6\times 3+12=30$（小时）．

若由甲单独做需几小时：

$8+6\div 3=10$（小时）．

甲先做 3 小时后乙接着做还需几小时：

$(10-3)\times 3=21$（小时）．

答：乙还需 21 小时完成．

【例 5】 筑路队预计 30 天修一条公路．先由 18 人修 12 天只完成全部工程的$\frac{1}{3}$．如果想提前 6 天完工，还需增加多少人？

分析 由 18 人修 12 天完成了全部工程的$\frac{1}{3}$，可通过 18×12 求出用一天完成$\frac{1}{3}$工作量共需要的总人数，也可通过 18×12 求出用一人完成$\frac{1}{3}$工作量共需要的总天数．所以由$\frac{1}{3}\div(18\times 12)$求出 1 人 1 天完成全部工程的几分之几（即一人的工效）．

解：①1 人 1 天完成全部工程的几分之几（即一人的工效）：

$$\frac{1}{3}\div(18\times 12)=\frac{1}{648}.$$

②剩余工作量若要提前 6 天完成共需多少人：

$$(1-\frac{1}{3})\div\left[\frac{1}{648}\times(30-12-6)\right]$$
$$=\frac{2}{3}\div\frac{12}{648}$$
$$=36\text{（人）}.$$

③需增加几人：

$36-18=18$（人）.

答：还要增加 18 人.

【例 6】　蓄水池有一条进水管和一条排水管. 要灌满一池水，单开进水管需 5 小时. 排光一池水，单开排水管需 3 小时. 现在池内有半池水，如果按进水，排水，进水，排水…的顺序轮流各开 1 小时. 问：多长时间后水池的水刚好排完？（精确到分钟）

分析与解答　①在解答“水管注水”问题时，会出现一个进水管，一个出水管的情况. 若进水管、出水管同时开放，则积满水的时间 = 1 ÷（进水管工效 − 出水管工效），

排空水的时间 = 1 ÷（出水管工效 − 进水管工效）.

②这道应用题是分析推理与计算相结合的题目. 根据已知条件推出水池中的水每 2 小时减少 $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$. 水池中有半池水即 $\frac{1}{2}$，经过 6 小时后还剩 $\frac{1}{2}-\frac{2}{15}\times(6\div2)=\frac{1}{10}$. 如果按进水，排水的顺序进行，则又应进水 1 小时，这时水池内共有水 $\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$. 如果按每小时 $\frac{1}{3}$ 的流速排出需要经过 $\frac{3}{10}\div\frac{1}{3}=\frac{9}{10}$（小时），共用的时间为 $6+1+\frac{9}{10}=7.9$（小时）$=7$ 小时 54 分刚好排完.

【例 7】　一件工作，甲 5 小时先完成了 $\frac{1}{4}$，乙 6 小时又完成了剩下任务的一半，最后余下的部分由甲、乙合作，还需要多少时间才能完成？

分析 这道题是工程问题与分数应用题的复合题．解题时先要分别求出甲、乙工作效率，再把余下的工作量转化为占单位“1”（总工作量）的几分之几？

解：甲工作效率：$\frac{1}{4}\div5=\frac{1}{20}$，

乙工作效率：$(1-\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}\div6=\frac{1}{16}$，

余下部分甲、乙合作需要几小时：

$(1-\frac{1}{4})\times(1-\frac{1}{2})\div(\frac{1}{20}+\frac{1}{16})=3\frac{1}{3}$（小时）

答：还需要 $3\frac{1}{3}$ 小时才能完成任务．

【例 8】 甲、乙二人植树．单独植完这批树甲比乙所需要的时间多 $\frac{1}{3}$，如果二人一起干，完成任务时乙比甲多植树 36 棵，这批树一共多少棵？

分析 求这批树一共多少棵，必须找出与 36 棵所对应的甲、乙工效差．已知甲比乙所用的时间多 $\frac{1}{3}$，可以求出甲与乙所用的时间比为 4:3．当工作总量一定的情况下，工效与工时成反比例，甲与乙的工时比为 $\frac{4}{3}:1=4:3$，所以甲与乙的工效比是 3:4．这个间接条件一旦揭示出来，问题就得到解决了．

解：设乙所用时间为“1”，甲的时间是乙的 $1+\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}$（倍），则甲与乙的时间比是 4:3．

工作总量一定，工作效率和工作时间成反比例，所以甲与乙的工效比是时间比的反比，为 3:4．

共植树多少棵：$36\div(\frac{4}{7}-\frac{3}{7})=252$（棵）．

答：这批树一共 252 棵.

【例 9】　加工一批零件，甲、乙合作 24 天可以完成. 现在由甲先做 16 天，然后乙再做 12 天，还剩下这批零件的$\frac{2}{5}$没有完成. 已知甲每天比乙多加工 3 个零件，求这批零件共多少个？

分析　欲求这批零件共多少个，由题中条件只需知道甲、乙二人每天共做多少个即可，然后这就转化为求甲、乙两人单独做各需多少天，有了这个结论后，只需算出 3 个零件相当于总数的几分之几即可. 由条件知甲做 16 天，乙做 12 天共完成工程的$\frac{3}{5}$，也即相当于甲乙二人合做 12 天，另外加上甲又做 4 天共完成这批零件的$\frac{3}{5}$；又知道甲乙二人合做 24 天可以完成，因此甲单独做所用天数可求出，那么乙单独做所用天数也就迎刃而解.

解：甲、乙合作 12 天，完成了总工程的几分之几？

$$\frac{1}{24}\times 12=\frac{1}{2}.$$

甲 1 天能完成全工程的几分之几？

$$\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\div(16-12)=\frac{1}{10}\div 4=\frac{1}{40}.$$

乙 1 天可完成全工程的几分之几？

$$\frac{1}{24}-\frac{1}{40}=\frac{1}{60}.$$

这批零件共多少个？

$$3\div\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{60}\right)=3\div\frac{1}{120}=360(\text{个}).$$

答：这批零件共 360 个.

【例 10】 一项工程，甲单独做要 12 小时完成，乙单独做要 18 小时完成.若甲先做 1 小时，然后乙接替甲做 1 小时，再由甲接替乙做 1 小时，…，两人如此交替工作，问完成任务时，共用了多少小时？

分析 要求共用多少小时？可以设想把这些小时重新分配：甲做 1 小时，乙做 1 小时，它们相当于合作 1 小时，也即是每 2 小时，相当于合做 1 小时.这样先大致算一下一共进行了多少个这样的 2 小时，余下部分问题就好解决了.

解：①若甲、乙两人合作共需多少小时？

$$1\div(\frac{1}{12}+\frac{1}{18})=1\div\frac{5}{36}$$
$$=7\frac{1}{5}(\text{小时}).$$

②甲、乙两人各单独做 7 小时后，还剩多少？

$$1-7\times(\frac{1}{12}+\frac{1}{18})=1-\frac{35}{36}$$
$$=\frac{1}{36}.$$

③余下的$\frac{1}{36}$由甲独做需多少小时？

$$\frac{1}{36}\div\frac{1}{12}=\frac{1}{3}(\text{小时}).$$

④共用了多少小时？

$$7\times2+\frac{1}{3}=14\frac{1}{3}(\text{小时}).$$

答：共用了 $14\frac{1}{3}$小时.

习　题　一

1. 一项工程，甲单独做 12 天可以完成. 如果甲单独做 3 天，余下工作由乙去做，乙再用 6 天可以做完. 问若甲单独做 6 天，余下工作乙要做几天?

2. 一条水渠，甲乙两队合挖 30 天完工. 现在合挖 12 天后，剩下的由乙队挖，又用 24 天挖完. 这条水渠由乙单独挖，需要多少天?

3. 客车与货车同时从甲、乙两站相对开出，经 2 小时 24 分钟相遇，相遇时客车比货车多行 9.6 千米. 已知客车从甲站到乙站行 4 小时 30 分钟，求客车与货车的速度各是多少?

4. 水箱上装有甲、乙两个注水管. 单开甲管 20 分钟可以注满全箱. 现在两管同时注水 2.5 分钟，注满水箱的$\frac{5}{24}$. 如果单开乙管需要多少分钟注满水箱?

5. 一项工程，甲、乙单独做分别需要 18 天和 27 天. 如果甲做若干天后，乙接着做，共用 20 天完成. 求甲乙完成工作量之比.

6. 一项工程，甲、乙两队合作 6 天能完成$\frac{5}{6}$. 已知单独做，甲完成$\frac{1}{3}$与乙完成$\frac{1}{2}$所需时间相等. 问单独做甲、乙各需多少天?

7. 做一批儿童玩具. 甲组单独做 10 天完成，乙组单独做 12 天完成，丙组每天可生产 64 件. 如果让甲、乙两组合作 4 天，则还有 256 件没完成. 现在决定三个组合做这批玩具，需要多少天完成?

习题一解答

1.①乙工效：$(1-\frac{1}{12}\times 3)\div 6=\frac{1}{8}$.

②余下工作乙几天完成？

$(1-\frac{1}{12}\times 6)\div\frac{1}{8}=4$(天).

答：余下工作乙要4天完成.

2.①乙工效：$(1-\frac{1}{30}\times 12)\div 24=\frac{1}{40}$.

②乙队单独挖需几天：$1\div\frac{1}{40}=40$(天).

答：乙队单独挖需40天完成.

3. 2小时24分$=2\frac{2}{5}$小时，

4小时30分$=4\frac{1}{2}$小时，

①客车速度：$9.6\div[2\frac{2}{5}-(4\frac{1}{2}-2\frac{2}{5})]$

$=32$(千米/小时).

②货车速度：$32\times 4\frac{1}{2}\div 2\frac{2}{5}-32=28$（千米/小时）.

答：客车与货车的速度分别为每小时32千米和28千米.

4.①工效和：$\frac{5}{24}\div 2.5=\frac{1}{12}$（合开每分钟注全箱的$\frac{1}{12}$）.

②乙工效：$\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30}$.

③单开乙管需要时间：$1\div\frac{1}{30}=30$（分钟）.

答：单开乙管需30分钟注满水箱.

5. 解：设甲先做 x 天，乙做 $(20-x)$ 天.

$$\frac{1}{18}x+\frac{1}{27}(20-x)=1,$$

$$x=14,$$

$$20-x=20-14=6.$$

甲做工程的几分之几：$\frac{1}{18}\times 14=\frac{7}{9}$，

乙做工程的几分之几：$1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}$.

甲、乙完成工作量的比：$\frac{7}{9}:\frac{2}{9}=7:2$.

答：甲乙完成工作量之比是 7:2.

6. ①甲乙工效和：$\frac{5}{6}\div 6=\frac{5}{36}$.

②甲乙工作时间比：3:2，工效比为 2:3.

③甲工效：$\frac{5}{36}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{18}$.

④乙工效：$\frac{5}{36}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{12}$.

⑤各自需要时间：甲 $1\div\frac{1}{18}=18$（天），

乙 $1\div\frac{1}{12}=12$（天）.

答：单独做甲需 18 天，乙需 12 天.

7. 解法 1：①要加工儿童玩具多少件？

$$256\div\left[1-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)\times 4\right]=960\text{（件）}$$

②丙组单独做需要几天？

$960\div 64=15$（天）.

③甲乙丙三组合作，共需几天？

$$1\div\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)=4\text{（天）}.$$

答：三组合作做这批儿童玩具要 4 天完成.

解法 2：甲、乙两组合作 4 天后，所剩没有完成的 256 件，由丙组完成，需：$256 \div 64 = 4$（天）.

答：甲、乙、丙三组合作这批儿童玩具要 4 天完成.

第2讲　比和比例

在应用题的各种类型中，有一类与数量之间的（正、反）比例关系有关．在解答这类应用题时，我们需要对题中各个量之间的关系作出正确的判断．

成正比或反比的量中都有两种相关联的量．一种量（记作 x）变化时另一种量（记作 y）也随着变化．与这两个量联系着，有一个不变的量（记为 k）．在判断变量 x 与 y 是否成正、反比例时，我们要紧紧抓住这个不变量 k．如果不变量 k 是变量 y 与 x 的商，即在 x 变化时 y 与 x 的商不变：$\frac{y}{x}=k$，那么 y 与 x 成正比例；如果 k 是 y 与 x 的积，即在 x 变化时，y 与 x 的积不变：$xy=k$，那么 y 与 x 成反比例．如果这两个关系式都不成立，那么 y 与 x 不成（正和反）比例．

下面我们从最基本的判断两种量是否成比例的例题开始．

【例 1】　下列各题中的两种量是否成比例？成什么比例？

①速度一定，路程与时间．

②路程一定，速度与时间．

③路程一定，已走的路程与未走的路程．

④总时间一定，要制造的零件总数和制造每个零件所用的时间．

⑤总产量一定，亩产量和播种面积．

⑥整除情况下被除数一定，除数和商.

⑦同时同地，竿高和影长.

⑧半径一定，圆心角的度数和扇形面积.

⑨两个齿轮啮合转动时转速和齿数.

⑩圆的半径和面积.

⑪长方体体积一定，底面积和高.

⑫正方形的边长和它的面积.

⑬乘公共汽车的站数和票价.

⑭房间面积一定，每块地板砖的面积与用砖的块数.

⑮汽车行驶时每公里的耗油量一定，所行驶的距离和耗油总量.

分析 以上每题都是两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，那么怎样来确定这两种量成哪种比例或不成比例呢？关键是能否把两个相关的变量 x、y 用 $\frac{y}{x}=k$ 或用 $xy=k$ 来表示，其中 k 是定量. 如果不能写出这两种形式，或只能写出加减法关系，那么这两种量就不成比例. 例如① $\frac{路程}{时间}=$ 速度，速度一定，路程与时间成正比例. ④制造每个零件用的时间 × 零件数 = 总时间，总时间一定，制造每个零件用的时间与要制造的零件总数成反比例. ③路程一定，已走的路程和未走的路程是加减法关系，不成比例.

解：成正比例的有：①、⑦、⑧、⑮

成反比例的有：②、④、⑤、⑥、⑨、⑪、⑭

不成比例的有：③、⑩、⑫、⑬.

【例 2】 一条路全长 60 千米，分成上坡、平路、下坡三段，各段路程长的比依次是 1:2:3，某人走各段路程

所用时间之比依次是 4:5:6，已知他上坡的速度是每小时 3 千米，问此人走完全程用了多少时间？

分析　要求此人走完全程用了多少时间，必须根据已知条件先求出此人走上坡路用了多少时间，必须知道走上坡路的速度（题中每小时行 3 千米）和上坡路的路程，已知全程 60 千米，又知道上坡、平路、下坡三段路程比是 1:2:3，就可以求出上坡路的路程.

解：上坡路的路程：

$$60\times\frac{1}{1+2+3}=10\ (\text{千米}).$$

走上坡路用的时间：

$$10\div 3=3\frac{1}{3}\ (\text{小时}).$$

上坡路所用时间与全程所用时间比：

$$\frac{4}{4+5+6}=\frac{4}{15}.$$

走完全程所用时间：

$$3\frac{1}{3}\div\frac{4}{15}=\frac{10}{3}\times\frac{15}{4}=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}\ (\text{小时}).$$

答：此人走完全程共用 $12\frac{1}{2}$小时.

【例 3】　一块合金内铜和锌的比是 2:3，现在再加入 6 克锌，共得新合金 36 克，求新合金内铜和锌的比？

分析　要求新合金内铜和锌的比，必须分别求出新合金内铜和锌各自的重量. 应该注意到铜和锌的比是 2:3 时，合金的重量不是 36 克，而是（36 − 6）克. 铜的重量始终没有变.

解：铜和锌的比是 2:3 时，合金重量：

$$36-6=30\ (\text{克}).$$

铜的重量：

$$30\times\frac{2}{2+3}=12\text{（克）}.$$

新合金中锌的重量：

$$36-12=24\text{（克）}.$$

新合金内铜和锌的比：

$12:24=1:2$.

答：新合金内铜和锌的比是 1:2.

【例 4】 师徒两人共加工零件 168 个，师傅加工一个零件用 5 分钟，徒弟加工一个零件用 9 分钟，完成任务时，两人各加工零件多少个？

分析 师傅加工一个零件用 5 分钟，每分钟可加工 $\frac{1}{5}$个零件，徒弟加工一个零件用 9 分钟，每分钟可加工零件$\frac{1}{9}$个，师徒两人效率的比是$\frac{1}{5}:\frac{1}{9}$，由于两人的工作时间是一定的，根据$\frac{\text{工作量}}{\text{工作效率}}=$工作时间（一定），工作量与工作效率成正比例.

解法 1：设师傅加工 x 个，徒弟加工（$168-x$）个.

$$\frac{x}{168-x}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{9}},$$

$$\frac{x}{168-x}=\frac{9}{5},$$

$$5x=168\times9-9x,$$

$$14x=168\times9,$$

$$x=108.$$

$$168-x=168-108=60\text{（个）}.$$

答：师傅加工 108 个，徒弟加工 60 个．

解法 2：由于师、徒两人工作效率的比是 $\frac{1}{5}:\frac{1}{9}$，那么他们工作量的比也是 $\frac{1}{5}:\frac{1}{9}$，因此师傅工作量是徒弟工作量的 $\frac{1}{5}\div\frac{1}{9}=1\frac{4}{5}$（倍），徒弟的工作量为 1 倍量．

$$168\div(\frac{1}{5}\div\frac{1}{9}+1)$$
$$=168\div2\frac{4}{5}$$
$$=60\text{（个），（徒弟）．}$$

$$60\times(\frac{1}{5}\div\frac{1}{9})=108\text{（个），（师傅）．}$$

解法 3：师傅每分钟加工 $\frac{1}{5}$ 个，徒弟每分钟加工 $\frac{1}{9}$ 个，用相遇问题思考方法可求出两人各用了多少分钟．然后用师、徒每分钟各自的效率，分别乘以 540 就是各自加工零件的个数．

$$168\div(\frac{1}{5}+\frac{1}{9})=168\div\frac{14}{45}=540\text{（分钟）．}$$

$$\frac{1}{5}\times540=108\text{（个），（师傅）}$$

$$\frac{1}{9}\times540=60\text{（个），（徒弟）．}$$

解法 4：按比例分配做：

$$\because\quad \frac{1}{5}:\frac{1}{9}=9:5,$$

$$\therefore\quad 168\times\frac{9}{9+5}=108\text{（个），（师傅）．}$$

$$168\times\frac{5}{9+5}=60\text{（个），（徒弟）．}$$

【例 5】　洗衣机厂计划 20 天生产洗衣机 1600 台，

生产5天后由于改进技术，效率提高25%，完成计划还要多少天？

分析 这是一道比例应用题，工效和工时是变量，不变量是计划生产5天后剩下的台数．从工效看，有原来的效率 $1600\div20=80$ 台/天，又有提高后的效率 $80\times(1+25\%)=100$ 台/天．从时间看，有原来计划的天数，要求效率提高后还需要的天数．

根据工效和工时成反比例的关系，得：

提高后的效率×所需天数＝剩下的台数．

解法1：设完成计划还需 x 天．

$$1600\div20\times(1+25\%)\times x=1600-1600\div20\times5$$
$$80\times1.25\times x=1600-400$$
$$100x=1200$$
$$x=12.$$

答：完成计划还需12天．

解法2：此题还可以转化成正比例．根据实际效率是原来效率的 $1+25\%=1\frac{1}{4}$ 倍，把原来效率看成“1”，实际和原来效率的比是 $1\frac{1}{4}:1=5:4$．因为工效和工时成反比例，所以实际与原来所需时间的比是 $4:5$，如果设实际还需要 x 天，原来计划的天数是 $20-5=15$ 天，根据实际与原来时间的比等于实际天数与原来天数的比，可以用正比例解答．设完成计划还需 x 天．

$$\frac{4}{5}=\frac{x}{20-5},$$
$$5x=60,$$
$$x=12.$$

解法 3：（按工程问题解）设完成计划还需 x 天.

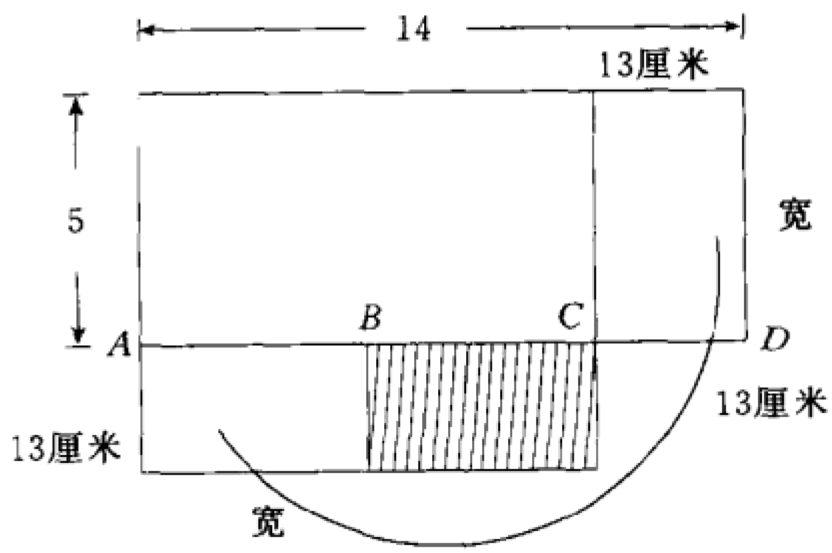
$$\frac{1}{20}\times(1+25\%)\times x=1-\frac{1}{20}\times5$$

$$\frac{1}{16}x=1-\frac{1}{4}$$

$$x=12.$$

【例 6】 一个长方形长与宽的比是 14∶5，如果长减少 13 厘米，宽增加 13 厘米，则面积增加 182 平方厘米，那么原长方形面积是多少平方厘米？

画出图便于解题：



解法 1：BC 的长：$182\div13=14$(厘米)，

BD 的长：$14+13=27$(厘米)，

从图中看出 AB 长就是原长方形的宽，AD 与 AB 的比是 14∶5，

AB 与 BD 的比是 $5:(14-5)=5:9$，

AB 的长是 $27\div\frac{9}{5}=15$(厘米)，

AD 的长是 $15\div\frac{5}{14}=42$(厘米)，

原长方形面积是 $42\times15=630$(平方厘米).

答：原长方形面积是 630 平方厘米.

解法 2：设原长方形长为 $14x$，宽为 $5x$．由图分析得方程

$$(14x-13)\times 13-5x\times 13=182,$$

$$9x=\frac{182}{13}+13,$$

$$9x=27,$$

$$x=3.$$

则原长方形面积

$(14\times 3)\times(5\times 3)=630$（平方厘米）．

例 4、例 5、例 6 是综合性较强的题，介绍了几种不同解法．要求大家从不同角度、综合、灵活运用所学知识，多角度去思考解答应用题，从而提高自己思维判断能力．

习　题　二

1．一块长方形的地，长和宽的比是 3∶2，长比宽多 24 米，这块地的面积是多少平方米？

2．一块长方形的地，长和宽的比是 3∶2，长方形的周长是 120 米，求这块地的面积？

3．水果店运来橘子、苹果共 96 筐，橘子和苹果筐数的比是 5∶3，求橘子、苹果各是多少筐？

4．化肥厂计划生产化肥 1400 吨，由于改进技术 5 天就完成了计划的 25%，照这样计算，剩下的任务还需多少天完成？

5．小强买了一件上衣和两条裤子，小明买了同样价钱的上衣和裤子各一件，他们用去钱数的比是 4∶3，已知一件上衣 7 元，求一条裤子多少元？

6. 小刚读一本书，第一天读了全书的$\frac{2}{15}$，第二天比第一天多读了 6 页，这时已读的页数与剩下页数的比是 3∶7，小刚再读多少页就能读完这本书？

7. 甲、乙两车由 A、B 两地同时出发相向而行，甲乙两车速度比是 2∶3，已知甲走完全程用 $5\frac{1}{2}$小时，求两车几小时后在中途相遇？

8. "长江"号轮船第一次顺流航行 21 公里又逆流航行 4 公里，第二次在同一河流中顺流航行 12 公里，逆流航行 7 公里，结果两次所用的时间相等. 求顺水船速与逆水船速的比.

习题二解答

1. $24\div(\frac{3}{3+2}-\frac{2}{3+2})=120$（米），

$120\times\frac{3}{5}=72$（米），　$120\times\frac{2}{5}=48$（米），

$72\times48=3456$（平方米）.

2. $120\div2=60$（米），

$60\times\frac{3}{3+2}=36$（米），　$60\times\frac{2}{3+2}=24$（米），

$36\times24=864$（平方米）.

3. $5+3=8$，

$96\times\frac{5}{8}=60$ 筐（橘子），

$96\times\frac{3}{8}=36$ 筐（苹果）.

4. 设剩下的任务还需 x 天完成.

$\frac{25\%}{5}=\frac{1-25\%}{x}$,

$25\%x=75\%\times5$,

$x=15$.

5. 设一件上衣与一条裤子的价钱之比是 $1:x$, 则小强和小明用去钱数的比是：

$\frac{1+2x}{1+x}=\frac{4}{3}$,

$3(1+2x)=4(1+x)$,

$3+6x=4+4x$,

$2x=1$,

$x=\frac{1}{2}$.

$7\times\frac{1}{2}=3.5$(元)（一条裤子）.

6. $6\div(\frac{3}{3+7}-\frac{2}{15}\times2)\times\frac{7}{3+7}=126$（页）.

7. 设乙车行完全程用 x 小时.

$3x=2\times5\frac{1}{2}$,

$x=3\frac{2}{3}$,

$1\div(\frac{1}{3\frac{2}{3}}+\frac{1}{5\frac{1}{2}})=2\frac{1}{5}$(小时).

8. 顺水船速:逆水船速 $=(21-12):(7-4)=3:1$.

第3讲　分数、百分数应用题（一）

分数、百分数应用题是小学数学的重要内容，也是小学数学重点和难点之一．一方面它是在整数应用题基础上的继续和深化；另一方面，它有其本身的特点和解题规律．因此，在这类问题中，数量之间以及“量”、“率”之间的相依关系与整数应用题比较，就显得较为复杂，这就给正确地选择解题方法，正确解答带来一定困难．

为了学好分数、百分数应用题的解法必须做好以下几方面工作．

①具备整数应用题的解题能力．解答整数应用题的基础知识，如概念、性质、法则、公式等仍广泛用于分数、百分数应用题．

②在理解、掌握分数的意义和性质的前提下灵活运用．

③学会画线段示意图．线段示意图能直观地揭示“量”与“百分率”之间的对应关系，发现量与百分率之间的隐蔽条件．它可以帮助我们在复杂的条件与问题中理清思路，正确地进行分析、综合、判断和推理．

④学会多角度、多侧面思考问题的方法．分数百分数应用题的条件与问题之间的关系变化多端，单靠统一的思路模式有时很难找到正确解题方法．因此，在解题过程中，要善于掌握对应、假设、转化等多种解题方法，在寻找正确的解题方法同时，不断地开拓解题思路．

【例 1】　(1) 本月用水量比上月节约 7%，可以联想到哪些关系？

①上月用水量与单位“1”的关系.

②本月节约用水量与上月用水量的 7% 的关系.

③本月用水量与上月用水量的(1－7%)的关系.

(2) 蓝墨水比红墨水多 20%，可以联想到哪些关系？

①红墨水与单位“1”的关系.

②蓝墨水比红墨水多出的量与红墨水的 20% 的关系.

③蓝墨水与红墨水的（1＋20%）的关系.

(3) 已看的页数比未看的页数多 15%，可以联想哪些关系？

①未看的页数与单位“1”的关系.

②已看的与未看的页数的差与未看页数的 15% 的关系.

③已看的页数与未看的页数的(1＋15%)的关系.

【例 2】　小华看一本书，每天看 15 页，4 天后还剩全书的$\frac{3}{5}$没看，这本故事书是多少页？

分析　每天看 15 页，4 天看了 $15\times4=60$ 页. 解题的关键是要找出这 60 页相当于全书页数的几分之几，还剩下全书的$\frac{3}{5}$没看，已经看了的是全书的 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$，60 页与全书的$\frac{2}{5}$直接对应，全书的页数就可以顺利求出.

解：①看了多少页？

$15\times4=60$（页）.

②看了全书的几分之几？

$1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

③这本书有多少页？

$$60 \div \frac{2}{5} = 150\text{（页）}.$$

综合算式：$15 \times 4 \div (1 - \frac{3}{5})$

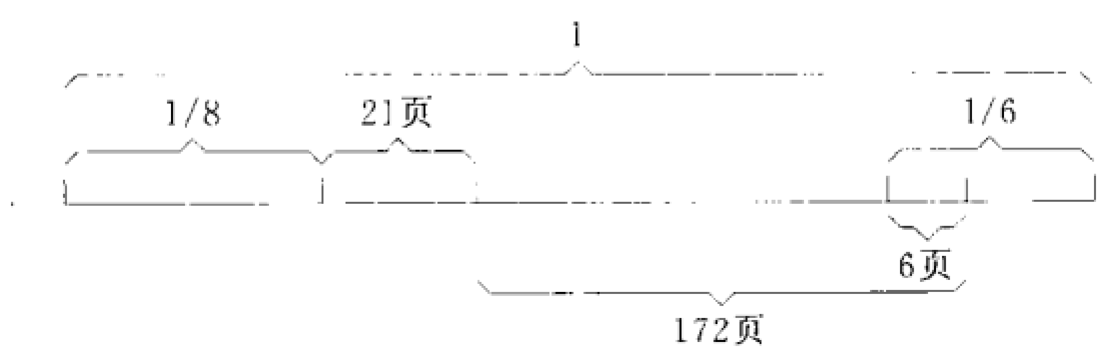
$$= 60 \div \frac{2}{5} = 150\text{（页）}.$$

答：这本故事书是 150 页.

【例 3】　小华看一本故事书，第一天看了全书的$\frac{1}{8}$还多 21 页，第二天看了全书的$\frac{1}{6}$少 6 页，还剩下 172 页，这本故事书一共有多少页？

分析　要想求这本书共有多少页，需要找条件里的多 21 页，少 6 页，剩下 172 页所对应的百分率. 也就是说，要从这三个量里找出一个能明确占全书的几分之几的量.

画线段图：



解：$(172 - 6 + 21) \div (1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{6})$

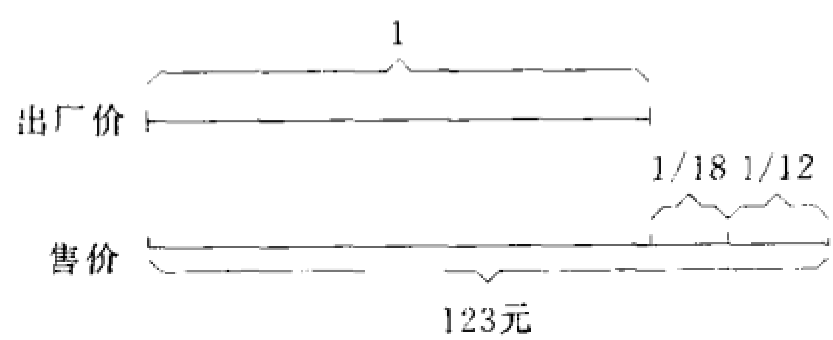
$$= 187 \div \frac{17}{24}$$

$$= 264\text{（页）}.$$

答：这本故事书共有 264 页.

【例 4】 惠华百货商场运到一批春秋西服，按原（出厂）价加上运费、营业费和利润出售．运费是原价的$\frac{1}{18}$，营业费和利润一共是原价的$\frac{1}{12}$，已知售价是 123 元，求出厂价多少元？

分析 设出厂价（原价）是“1”，那么售价是原价的 $1+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}$，它相当于 123 元，



如上图可以得出解答：

$$123\div(1+\frac{1}{18}+\frac{1}{12})$$
$$=123\div1\frac{5}{36}=123\times\frac{36}{41}$$
$$=108（元）.$$

答：春秋西服每套出厂价是 108 元．

【例 5】 菜园里西红柿获得丰收，收下全部的$\frac{3}{8}$时，装满 3 筐还多 24 千克，收完其余部分时，又刚好装满 6 筐，求共收西红柿多少千克？

解法 1：分析 可以从“收下全部的$\frac{3}{8}$”着手，其余部分必然是 $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$．总千克数的$\frac{5}{8}$是 6 筐，依据这个对应关系，总筐数就是 $6\div\frac{5}{8}=9\frac{3}{5}$筐．收下全部的$\frac{3}{8}$就

是 $9\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}=3\frac{3}{5}$筐.

根据题目中的条件 $3\frac{3}{5}$筐比 3 筐多$\frac{3}{5}$筐，这个$\frac{3}{5}$筐正好是 24 千克，“量与百分率”的关系已经直接对应，求每筐的千克数的条件完全具备.

解：其余部分是总千克数的几分之几：

$$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}.$$

西红柿总数共装了多少筐：

$$6\div\frac{5}{8}=9\frac{3}{5}\text{（筐）}.$$

收下全部的$\frac{3}{8}$应装多少筐：

$$9\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}=3\frac{3}{5}\text{（筐）}.$$

$3\frac{3}{5}$筐比 3 筐多多少筐：

$$3\frac{3}{5}-3=\frac{3}{5}\text{（筐）}.$$

每筐是多少千克：

$$24\div\frac{3}{5}=40\text{（千克）}.$$

共收西红柿多少千克：

$$40\times9\frac{3}{5}=384\text{（千克）}.$$

综合算式：

$$24\div\left[6\div\left(1-\frac{3}{8}\right)\times\frac{3}{8}-3\right]\times\left[6\div\left(1-\frac{3}{8}\right)\right]$$

$$=24\div\left[3\frac{3}{5}-3\right]\times\left[6\div\frac{5}{8}\right]$$

$$=24\times\frac{5}{3}\times9\frac{3}{5}=384\text{（千克）}.$$

答：共收西红柿 384 千克.

解法 2：（以下列式由学生自己理解）

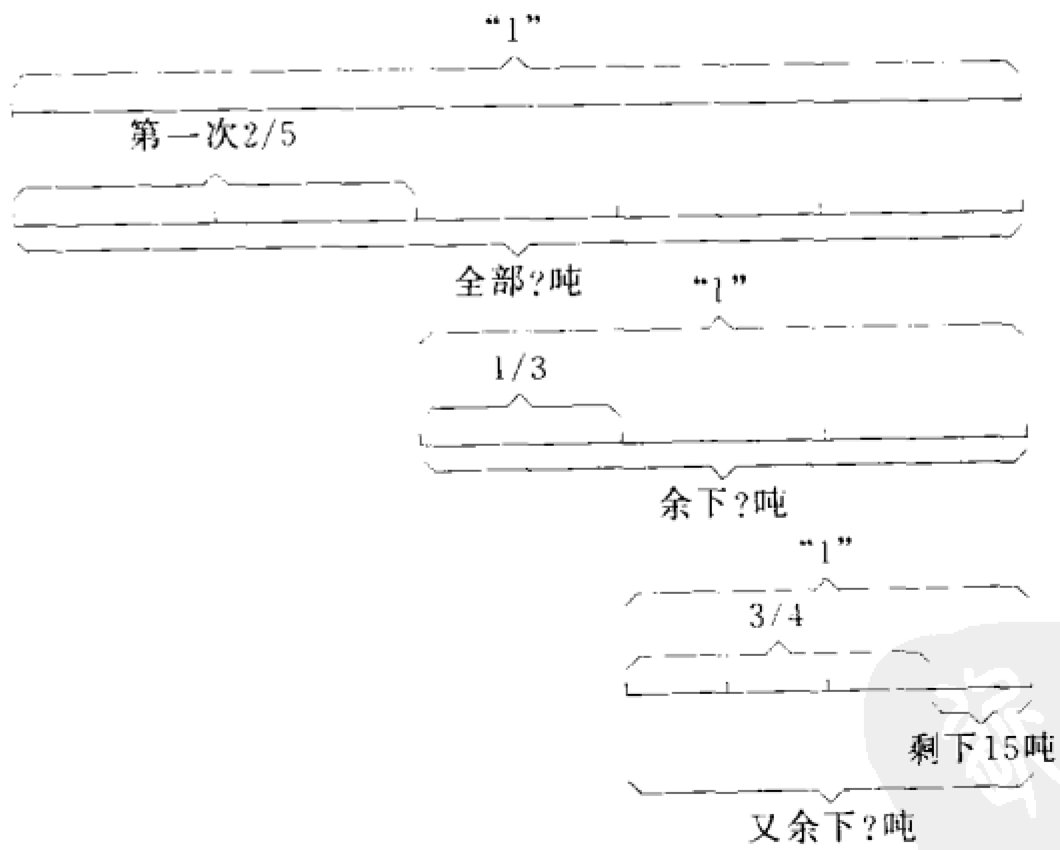
$$24\div\left[\frac{3}{8}-\left(1-\frac{3}{8}\right)\div(6\div3)\right]$$

$$=24\div\left[\frac{3}{8}-\frac{5}{8}\div2\right]$$

$$=24\div\frac{1}{16}=384\text{（千克）}.$$

答：共收西红柿 384 千克.

【例 6】 建筑工地需要一批水泥，从仓库第一次运走全部的$\frac{2}{5}$，第二次运走余下的$\frac{1}{3}$，第三次运走（前二次运后）又余下的$\frac{3}{4}$，这时还剩下 15 吨水泥没运走. 这批水泥共是多少吨？



分析 上图中有 3 个相对各自讨论范围内的单位 "1"（"全部"、"余下"、"又余下"）. 依据逆向思路可以

得出，最后剩下的 15 吨对应的是“又余下”的$\frac{1}{4}$，因此求出“又余下”的吨数 60 吨（即“又余下”含义中的 1 个单位是 60 吨）．这 60 吨对应的恰是“余下”的$\frac{2}{3}$，这样可以求“余下”的吨数 90 吨（即“余下”含义中的 1 个单位是 90 吨）．这 90 吨恰是“全部”的$\frac{3}{5}$．至此这批水泥的全部吨数可以求出．

列式：$15\div(1-\frac{3}{4})\div(1-\frac{1}{3})\div(1-\frac{2}{5})$

$=15\div\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}\div\frac{3}{5}$

$=150$（吨）．

【例 7】　某人在公共汽车上发现一个小偷向相反方向步行，10 秒钟后他下车去追小偷，如其速度比小偷快一倍，比汽车慢$\frac{4}{5}$，则追上小偷要多少秒？

分析与解答　这是一个追及问题，因此求追上所花时间必须求出相距距离及它们速度差．相距距离是因为车上之人与小偷反向走了 10 秒钟产生的．而速度差是易求的．

设小偷速度为 V_0，某人追赶速度为 $2V_0$，由于人比汽车慢$\frac{4}{5}$，所以汽车速度为 $2V_0\div(1-\frac{4}{5})$，即是 $10V_0$，所以相距距离是

$$10\times(10V_0+V_0)=110V_0,$$

所以追上所花时间是

$$110V_0\div(2V_0-V_0)=110(\text{秒}).$$

答：追上小偷要 110 秒．

【例 8】 A 有若干本书，B 借走一半加一本，剩下的书，C 借走一半加两本，再剩下的书，D 借走一半加 3 本，最后 A 还有 2 本书，问 A 原有多少本书.

解法 1：列方程求解，设 A 原有 x 本书，

分析 B 借走了：$\frac{1}{2}x+1$，

C 借走了：$\frac{1}{2}[x-(\frac{1}{2}x+1)]+2$，

即 $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-1)+2$，

D 借走了：$\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}x-1)(1-\frac{1}{2})-2]+3$，

最后 A 剩下了：$\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}x-1)(1-\frac{1}{2})-2]-3$，

由条件知：$\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}x-1)(1-\frac{1}{2})-2]-3=2$，

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-1)-2=10,$$

$$\frac{1}{2}x-1=24,$$

$$x=50(\text{本}).$$

答：A 原有 50 本书.

解法 2：用倒推法解.

分析 A 剩下的 2 本应是 C 借走后剩下的一半差 3 本，所以 C 借走后还剩下 $(2+3)\div\frac{1}{2}$ 即 10 本，这 10 本又是 B 借走后剩下的一半差 2 本，所以 B 借走后剩下 $(10+2)\div\frac{1}{2}$ 即是 24 本，这 24 本是 A 原有书的一半差 1 本，这样 A 原有书为 $(24+1)\div\frac{1}{2}$ 即 A 原有书 50 本.

综合算式：

$$\left\{\left[(2+3)\div\frac{1}{2}+2\right]\div\frac{1}{2}+1\right\}\div\frac{1}{2}=50.$$

答：A 原有 50 本书.

习　题　三

1. 水果店运来一批橘子和苹果，其中橘子重量占总重量的$\frac{7}{20}$，橘子比苹果少 1440 千克，运来橘子多少千克？

2. 有两袋米，甲袋比乙袋少 18 千克. 如果再从甲袋倒入乙袋 6 千克，这时甲袋的米相当于乙袋的$\frac{5}{8}$. 两袋米原来各有多少千克？

3. 一本书，已看了 130 页，剩下的准备 8 天看完. 如果每天看的页数相等，3 天看的页数恰好是全书的$\frac{5}{22}$. 这本书共有多少页？

4. 妈妈买了一些苹果，第一天吃去$\frac{1}{3}$又$\frac{1}{3}$个，第二天吃去剩下的$\frac{1}{4}$又$\frac{1}{4}$个，第三天吃去再剩下的$\frac{1}{3}$又$\frac{1}{3}$个，这时剩下 3 个苹果. 问妈妈买了多少苹果？每天各吃了几个苹果？

5. 古希腊杰出的数学家丢番图的墓碑上有一段话："他生命的六分之一是幸福的童年. 再活十二分之一脸上长起了细细的胡须，他结了婚还没有孩子，又度过了七分之一. 再过了五年，他幸福地得到了一个儿子. 可这孩子光辉灿烂的寿命只有他父亲的一半. 儿子死后，老人在悲痛中活了四年，也结束了尘世的生涯". 你能根据这段话推算出丢番图活了多少岁？多少岁结的婚吗？

6. 一瓶酒精，当用去酒精的一半后，连瓶共重 700 克；

如只用去酒精的$\frac{1}{3}$后，连瓶共重 800 克. 求瓶子的重量.

7. 电视机厂五月份生产一批电视机，上旬生产的台数占总数的$\frac{3}{11}$，下旬比中旬多生产中旬产量的$\frac{1}{5}$，正好是 40 台，这个厂五月份生产电视机多少台？

习题三解答

1. ①苹果重量占总重量的几分之几？

$$1-\frac{7}{20}=\frac{13}{20}.$$

②橘子比苹果少总重量的几分之几？

$$\frac{13}{20}-\frac{7}{20}=\frac{3}{10}.$$

③总重量是多少千克？

$$1440\div\frac{3}{10}=4800(\text{千克}).$$

④运来橘子多少千克？

$$4800\times\frac{7}{20}=1680(\text{千克}).$$

2. ①倒米后甲袋比乙袋少多少千克？

$$18+6\times2=30(\text{千克}).$$

②倒米后甲袋比乙袋少几分之几？

$$1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}.$$

③倒米后乙袋有米多少千克？

$$30\div\frac{3}{8}=80(\text{千克}).$$

④原来乙袋有米多少千克？

$$80-6=74(\text{千克}).$$

⑤原来甲袋有米多少千克？

$74-18=56$(千克).

3. $130\div(1-\frac{5}{22}\div3\times8)=330$（页）.

4. 共买苹果：

$\{[(3+\frac{1}{3})\div(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{4}]\div(1-\frac{1}{4})+\frac{1}{3}\}\div(1-\frac{1}{3})$

$=11$(个).

第一天吃：$11\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=4$(个)，

第二天吃：$(11-4)\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2$（个），

第三天吃：$(11-4-2)\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=2$（个）.

5. 活的岁数：$(5+4)\div(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2})=84$ 岁，结婚年龄：$84\times(\frac{1}{6}+\frac{1}{12})=21$ 岁.

6. 酒精重量：$(800-700)\div(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=600$(克)，

瓶子重量：$700-600\times\frac{1}{2}=400$(克).

7. $[40\div\frac{1}{5}+(40\div\frac{1}{5}+40)]\div(1-\frac{3}{11})$

$=[40\div\frac{1}{5}+240]\div\frac{8}{11}$

$=440\div\frac{8}{11}$

$=605$（台）.

第4讲　分数、百分数应用题（二）

在解题过程中，除了要利用上一讲中所说的一些技巧和方法(如画线段示意图等)之外，还要注意在解题过程中量的转化．例如，在解题过程的不同阶段，有时需把不同的量看成单位1，即要把单位1进行“转化”；有时，在解题过程中需把相等的量看成完全一样，即其中之一可“转化”为另一．通过这样的转化，往往能使解题思路清晰，计算简便．

【例1】　某车间男工人数比女工人数多$\frac{2}{5}$，女工人数比男工人数少几分之几？

分析与解答　条件中男工比女工多$\frac{2}{5}$，是把女工人数看作单位“1”．而问题“女工人数比男工人数少几分之几”是把男工人数看作单位“1”．解答这题必须转化单位“1”．

题意表明，女工人数是“1”，男工人数是$1+\frac{2}{5}=1\frac{2}{5}$．求女工比男工少几分之几，应该用男工与女工的人数差除以男工人数，即此时把男工人数（$1\frac{2}{5}$）看成单位“1”．

即　$\frac{2}{5}\div(1+\frac{2}{5})=\frac{2}{7}$．

答：女工人数比男工人数少$\frac{2}{7}$．

所求的量也可以表示为“1”减去女工的“1”除以男工的 $1\frac{2}{5}$ 之商，

即　$1-1\div(1+\frac{2}{5})=\frac{2}{7}$.

说明：“1”倍量的转换引起了“百分率”的转化，其规律是，甲数是乙数的 $\frac{a}{b}$，则乙数就是甲数的 $\frac{b}{a}$. 甲数比乙数多 $\frac{a}{b}$，则乙数就比甲数少 $\frac{a}{b+a}$；甲数比乙数少 $\frac{a}{b}$，则乙数就比甲数多 $\frac{a}{b-a}$. 掌握了这些规律，在进行百分率转化时就可以做到快而准.

【例 2】　第三修路队修一条路，第一天修了全长的 $\frac{1}{4}$，第二天与第一天所修路程的比是 4∶3，还剩 500 米没修，这条路全长多少米？

分析　此题条件中既有百分率又有比，可以把比转化成百分率，按分数应用题解答.

第二天与第一天所修路程的比是 4∶3. 即第二天修的占 4 份，第一天修的占 3 份，$4\div3=\frac{4}{3}$. 第二天修的占第一天的 $\frac{4}{3}$，也就是第二天修的占全长的 $\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$. 知道了已修的占全长的几分之几，就可以找到未修的 500 米相对应的百分率，进而求出全长有多少米.

解：$500\div[1-\frac{1}{4}-(\frac{1}{4}\times\frac{4}{3})]$

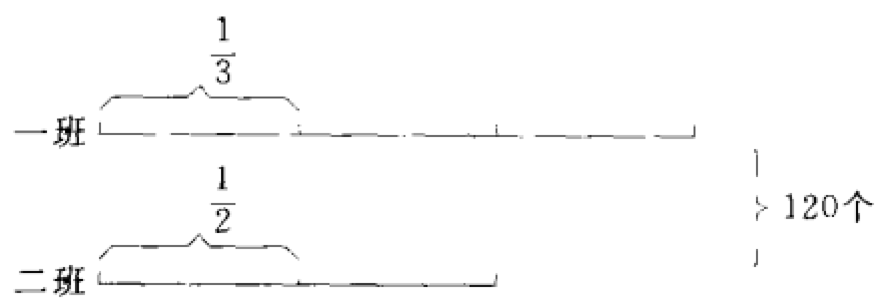
$=500\div[1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}]$

$=500\div\frac{5}{12}$

$=1200$（米）.

答：全长是 1200 米.

【例 3】 有 120 个皮球，分给两个班使用，一班分到的$\frac{1}{3}$与二班分到的$\frac{1}{2}$相等，求两个班各分到多少皮球？



分析 上图中$\frac{1}{3}$是以一班为单位"1"，$\frac{1}{2}$是以二班为单位"1". 单位"1"不一致，因此一班与二班分到的皮球之间缺乏统一的倍数关系，也就是说$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$的单位"1"不统一，不能直接相加、减，必须进行"百分率"转化，才能做此题.

解法 1：用百分率转化法统一单位"1"，题目中告诉我们"一班的$\frac{1}{3}$与二班的$\frac{1}{2}$相等"，即一班的$\frac{1}{3}$和二班的$\frac{1}{2}$相对应，可以用$\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}$，得到二班的球数相当于一班的几分之几，总球数 120 就和两个班的百分率之和相对应，求出一班分到多少皮球.

二班分到的球占一班的几分之几：

$$\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}=\frac{2}{3},$$

一班分到多少皮球：$120\div(1+\frac{2}{3})=72$（个），

二班分到多少皮球：$120-72=48$（个）.

答：一班分到 72 个皮球，二班分到 48 个皮球.

根据上面解题思路，也可以用 $\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$，请试着做一做.

解法 2：用倍比转化法统一单位“1”，看一班的“1”中有几个 $\frac{1}{3}$，即有几个二班的 $\frac{1}{2}$，找到一班分到的球数占二班的几分之几，转化成和倍题，就可求出二班分到多少球.

一班分到的占二班几分之几：

$$\frac{1}{2}\times(1\div\frac{1}{3})=\frac{3}{2},$$

二班分到多少球：

$$120\div(1+\frac{3}{2})=48\text{ 个},$$

一班分到多少球：$120-48=72$（个）.

解法 3：转化成按比例分配的题目，通过一班分到的 $\frac{1}{3}$ 与二班分到的 $\frac{1}{2}$ 相等，可以找到一班与二班分到的皮球数的比.

一班与二班分到皮球数的比：

一班 $\times\frac{1}{3}=$ 二班 $\times\frac{1}{2}$（根据比例性质），

一班 : 二班 $=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=3:2$，

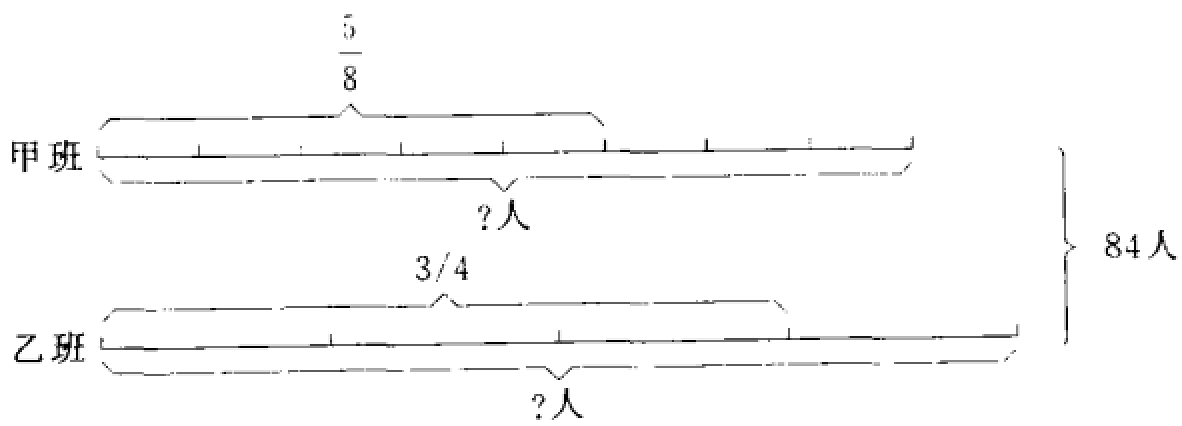
一班分到多少皮球：$120\times\frac{3}{3+2}=72$（个）.

二班分到多少皮球：$120\times\frac{2}{3+2}=48$（个）.

【例 4】　甲、乙两班共 84 人，甲班人数的 $\frac{5}{8}$ 与乙班

人数的$\frac{3}{4}$共有 58 人，问两班各多少人？

画出线段图：



分析 从上图可看出甲班人数的$\frac{3}{4}$和乙班人数的$\frac{3}{4}$，就是甲、乙两班总人数的$\frac{3}{4}$，是$(84\times\frac{3}{4}=)63$ 人．而甲班人数$\frac{5}{8}$与乙班人数的$\frac{3}{4}$共 58 人，这就可以看出甲班人数的$\frac{5}{8}$与甲班人数的$\frac{3}{4}$相差$(63-58=)5$ 人．由量、百分率的对应就不难求出甲班人数了．

解：甲班人数：$(84\times\frac{3}{4}-58)\div(\frac{3}{4}-\frac{5}{8})$

$$=5\div\frac{1}{8}=40\ (人).$$

乙班人数：$84-40=44$（人）．

答：甲班有 40 人，乙班有 44 人．

【例 5】 加工一批零件，甲乙二人合作需 12 天完成；现由甲先工作 3 天，然后由乙工作 2 天还剩这批零件的$\frac{4}{5}$没完成．已知甲每天比乙少加工 4 个，这批零件共有多少个？

分析 解答此题要用条件转化法，即把“甲工作 3

天，乙工作 2 天”，转化为“二人合作 2 天，再由甲独干一天”，问题便可以得到解决.

由“甲乙二人合作 12 天可完成”可知甲乙二人每天共加工这批零件的$\frac{1}{12}$，根据“还剩这批零件的$\frac{4}{5}$”可求出完成的部分是这批零件的 $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$. 这$\frac{1}{5}$是甲 3 天和乙 2 天的工作量，也可以看成是甲、乙二人合作 2 天和甲再单独工作 1 天的工作量，由此可得出：甲的工作效率是 $(\frac{1}{5}-\frac{1}{12}\times 2)\div(3-2)=\frac{1}{30}$，乙的工作效率则是 $\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=\frac{1}{20}$，这样就可以找到甲、乙每天相差的 4 个零件所对应的百分率，求出这批零件有多少个.

解：甲每天完成这批零件的几分之几：

$$(\frac{1}{5}-\frac{1}{12}\times 2)\div(3-2)=\frac{1}{30}.$$

乙每天完成这批零件的几分之几：

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=\frac{1}{20}.$$

这批零件共有多少个：

$$4\div(\frac{1}{20}-\frac{1}{30})=240\ (个).$$

答：这批零件共有 240 个.

【例 6】　服装厂一车间人数占全厂的 25%，二车间人数比一车间少$\frac{1}{5}$，三车间人数比二车间多$\frac{3}{10}$，三车间是 156 人，这个服装厂全厂共有多少人？

分析　题目中除全厂外，还有两个单位“1”：一个是一车间，另一个是二车间. 可以通过转化的思路，统

一到一车间. 找到三车间的 156 人相当于一车间的几分之几，从而先求出一车间的人数，由于一车间人数占全厂的 25%，从而直接求出全厂的人数，这样可无需求出二车间的具体人数.

解：二车间人数是一车间的几分之几：

$$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

三车间的人数是一车间的几分之几：

$$\frac{4}{5}\times\left(1+\frac{3}{10}\right)=\frac{26}{25}.$$

一车间有多少人：

$$156\div\frac{26}{25}=150\ (\text{人}).$$

全厂共有多少人：

$$150\div 25\%=600\ (\text{人}).$$

综合算式：

$$\begin{aligned}&156\div\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1+\frac{3}{10}\right)\right]\div 25\%\\=&156\div\left[\frac{4}{5}\times 1\frac{3}{10}\right]\div 25\%\\=&156\div\frac{26}{25}\div 25\%\\=&600\ (\text{人}).\end{aligned}$$

答：这个服装厂全厂共有 600 人.

习　题　四

1. 甲、乙两个班共种树若干棵，已知甲班种的棵数的$\frac{1}{4}$等于乙班种的棵数的$\frac{1}{5}$，又知乙班比甲班多种24棵，甲、乙两班各种多少棵？

2. 修路队修一条1800米的路，前5天完成了全长的25%，照这样计算，挖这条水渠还要多少天？

3. 甲、乙两车分别从A、B两地同时相对开出，经4小时相遇，相遇后各自继续前进，又经过3小时，甲车到达B地，乙车离A地还有70千米，求A、B两地相距多少千米？

4. 哥哥和弟弟共有人民币10.8元，哥哥用去自己钱数的75%，弟弟用去自己钱数的80%，两人所剩的钱正好相等，哥哥原来有多少钱？

5. 一项工程，甲、乙两队合作可30天完成，甲队独做24天后，甲、乙两队又合作了12天，然后甲调走，乙又做了15天才完成了全部的工程，甲队若单独做这项工程需几天完成？

6. 甲、乙两台抽水机共同工作10小时，可以把整池水抽完，如果甲台抽水机工作4小时，乙台抽水机工作6小时，能抽完整池水的$\frac{7}{15}$，问甲、乙两台抽水机单独抽各需几小时？

7. 二年级两个班共有学生90人，其中少先队员有71人，又知一班少先队员占本班人数的$\frac{3}{4}$，二班少先队员占本班人数的$\frac{5}{6}$，求两个班各有多少人？

习题四解答

1．乙班：$24 \div (1-\frac{1}{5}\div\frac{1}{4})=120$（棵）．

甲班：$120-24=96$（棵）．

2．解法1：$1800\times(1-25\%)\div(1800\times25\%\div5)$
$=15$（天）．

解法2：$1800\div(1800\times25\%\div5)-5=15$（天）．

解法3：$1\div(25\%\div5)-5=15$（天）．

解法4：$5\times[(1-25\%)\div25\%]=15$（天）．

3．$4+3=7$（小时），$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$，

$70\div(1-\frac{3}{28}\times7)=280$（千米）．

4．解法1：①$(1-75\%)\div(1-80\%)=\frac{5}{4}$．

②$10.8\div(1+\frac{5}{4})=4.8$（元）．

解法2：$1-75\%=25\%$，$1-80\%=20\%$，

$(1\div25\%):(1\div20\%)=4:5$，

$10.8\div(4+5)\times4=4.8$（元）．

5．$[1-\frac{1}{30}\times(12+15)]\div(24-15)=\frac{1}{90}$，$1\div\frac{1}{90}=90$（天）．

6．$(\frac{7}{15}-\frac{1}{10}\times4)\div(6-4)=\frac{1}{30}$，

乙台：$1\div\frac{1}{30}=30$（小时）．甲台：$1\div(\frac{1}{10}-\frac{1}{30})=15$（小时）．

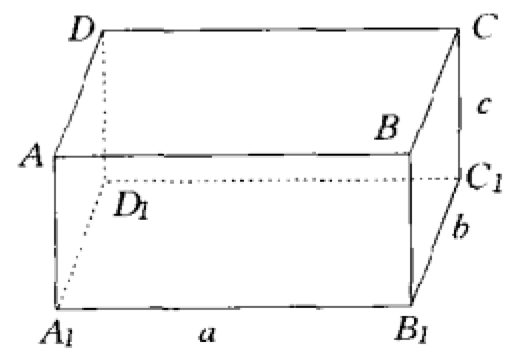
7．一班人数：$(90\times\frac{5}{6}-71)\div(\frac{5}{6}-\frac{3}{4})=48$（人），

二班人数：$90-48=42$（人）．

第5讲　长方体和正方体

长方体和正方体在立体图形中是较为简单的，也是我们较为熟悉的立体图形.

如右图，长方体共有六个面(每个面都是长方形)，八个顶点，十二条棱.



在六个面中，两个对面是全等的，即三组对面两两全等（叠放在一起能够完全重合的两个图形称为全等图形. 两个全等图形的面积相等，对应边也相等).

长方体的表面积和体积的计算公式是：

长方体的表面积：$S_{长方体}=2(ab+bc+ac)$；

长方体的体积：$V_{长方体}=abc$.

正方体是各棱相等的长方体，它是长方体的特例，它的六个面都是正方形. 如果它的棱长为 a，那么：

$S_{正方体}=6a^2, V_{正方体}=a^3$.

【例 1】　有一个长方体，它的底面是一个正方形，它的表面积是 190 平方厘米，如果用一个平行于底面的平面将它截成两个长方体，则两个长方体表面积的和为 240 平方厘米，求原来长方体的体积.

解：设原来长方体的底面边长为 a 厘米，高为 h 厘米，则它被截成两个长方体后，两个截面的面积和为 $2a^2$ 平方厘米，而这也就是原长方体被截成两个长方体的表

面积的和比原长方体的表面积所增加的数值，因此，根据题意有：

$190+2a^2=240$，可知，$a^2=25$，故 $a=5$（厘米）.

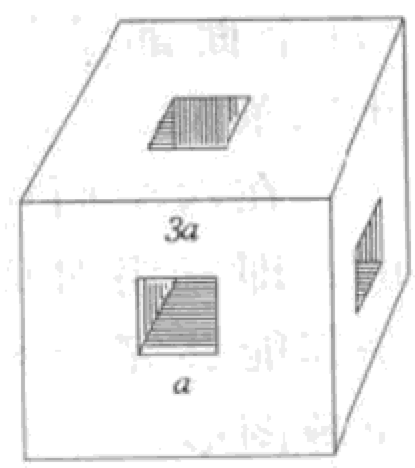
又因为 $2a^2+4ah=190$，

解得，$h=\dfrac{190-2\times 25}{4\times 5}=7$（厘米）.

所以，原来长方体的体积为：

$V=a^2h=25\times 7=175$（立方厘米）.

【例 2】 如右图，一个边长为 $3a$ 厘米的正方体，分别在它的前后、左右、上下各面的中心位置挖去一个截口是边长为 a 厘米的正方形的长方体（都和对面打通）. 如果这个镂空的物体的表面积为 2592 平方厘米，试求正方形截口的边长.



解：原来正方体的表面积为：

$6\times 3a\times 3a=6\times 9a^2$（平方厘米）.

六个边长为 a 的小正方形的面积为：

$6\times a\times a=6a^2$（平方厘米）；

挖成的每个长方体空洞的侧面积为：

$3a\times a\times 4=12a^2$（平方厘米）；

三个长方体空洞重叠部分的棱长为 a 的小正方体空洞的表面积为：

$a\times a\times 4=4a^2$（平方厘米）.

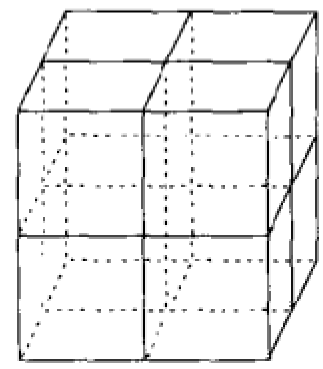
根据题意：$6\times 9a^2-6a^2+3\ (12a^2-4a^2)=2592$，

化简得：$54a^2-6a^2+24a^2=2592$，解得 $a^2=36$（平方厘米），故 $a=6$ 厘米.

即　正方形截口的边长为 6 厘米.

【例 3】　有一些相同尺寸的正方体积木，准备在积木的各面上粘贴游戏所需的字母和数目字．但全部积木的表面总面积不够用，还需增加一倍，请你想办法，在不另添积木的情况下，把积木的各面面积的总和增加一倍．

解：把每一块积木锯三次，锯成 8 块小立方体（如右图）．这样，每锯一次便得到两个大截面，使表面积增加$\frac{1}{3}$倍，锯三次使截面增加 $3\times\frac{1}{3}=1$（倍），因此全部小积木的表面总面积就比原积木表面总面积增加了一倍．



【例 4】　有大、中、小三个正方形水池，它们的内边长分别为 4 米、3 米、2 米，把两堆碎石分别沉没在中、小水池的水中，两个水池的水面分别升高了 4 厘米和 11 厘米．如果将这两堆碎石都沉没在大水池中，大水池水面将升高多少厘米？

解：水池中水面升高部分水的体积就是投入水中的碎石体积．

沉入中、小水池中的碎石的体积分别是：

$3\times3\times0.04=0.36$ 立方米，

$2\times2\times0.11=0.44$ 立方米．

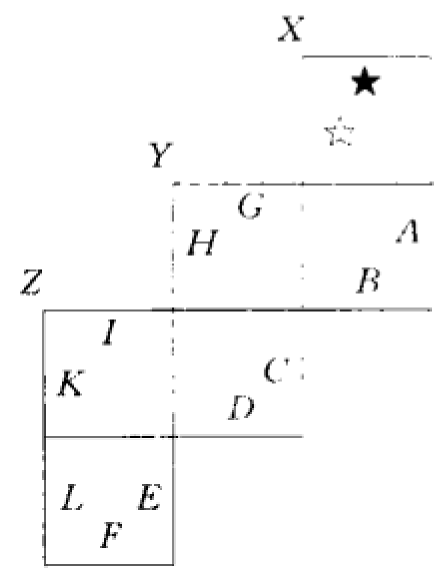
它们的和是：

$0.36+0.44=0.8$ 立方米．

把它们都沉入大池里，大池水面升高部分水的体积也应当是 0.8 立方米，而大池的底面面积是 $4\times4=16$ 平方米，所以，大水池的水面升高：

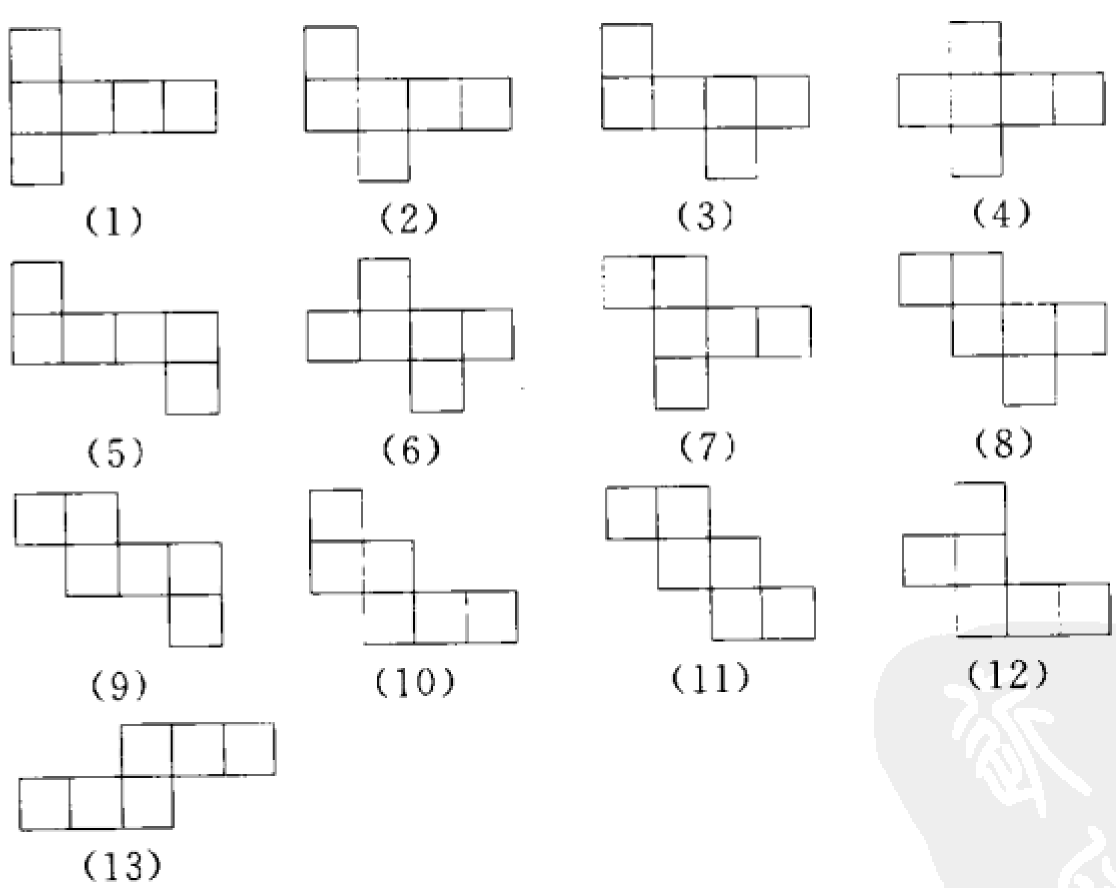
$0.8\div16=\dfrac{0.8}{16}$米$=5$厘米.

【例 5】 右图是正方体的展开图之一，当用它组成立方体时，图中的哪一边与带★记号的边相接触呢？



解：对于这个问题，考虑将各面拼凑成正方体是一种方法，但如只考虑边的连接会更简洁：首先☆和 G 连接，其次 H 和 I 连接，且 X、Y、Z 三点重合为正方体的一个顶点，因此与★连接的是 K 边.

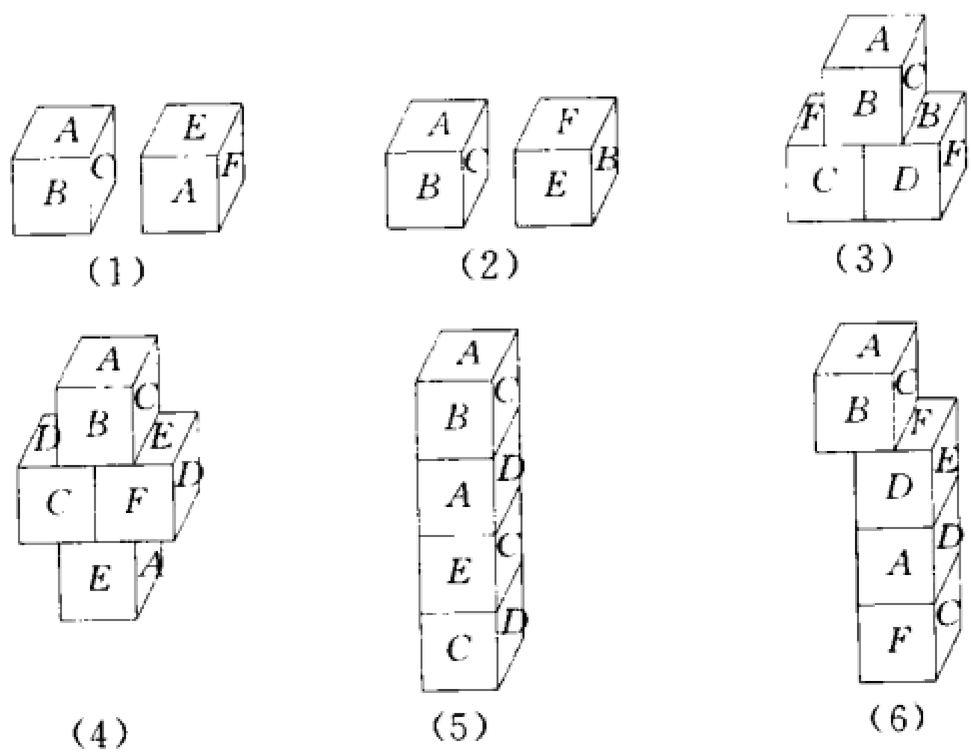
【例 6】 下图是正方体的 11 种展开图和 2 种伪装图（即它们不是正方体的展开图）．请你指出伪装图是哪两个？



解：无论哪一个图中都有六个小正方形，都好像有

道理，但当我们把相邻两边逐一拼合后，不能变成正方体的是（10）和（12），这两个图形，都是有五面在拼合时不成问题，但是最后一面总是挤在外面而成不了正方体.

【例 7】　如下面的各图中均有若干个六面体，每小题图中的几个六面体上 A、B、C、D、E、F 六个字母的排列顺序完全相同（即每个小题中六面体上刻字母的方式是完全一样的）试判断各小题的图中 A、B、C 三个字母的对面依次是哪几个字母？



解：（1）由图中可知，A 与 B、C、E、F 都相邻，故 A 的对面是 D. E、F 的位置可按右手关系得出，伸出右手，伸直大拇指按(1)中右图所示，让四指方向从 A 转动而指向 F, 此时大拇指正好指向 E（向上）. 如果，判断为 F 在 C 对面，由(1)中左图所示，让四指的方向从 A 向 F, 此时大拇指指向 B, 与（1）中右图矛盾，故 F 在 B 的对面，E 在 C 的对面.

（2）～（6）按 A、B、C 顺序给出对面的字母：

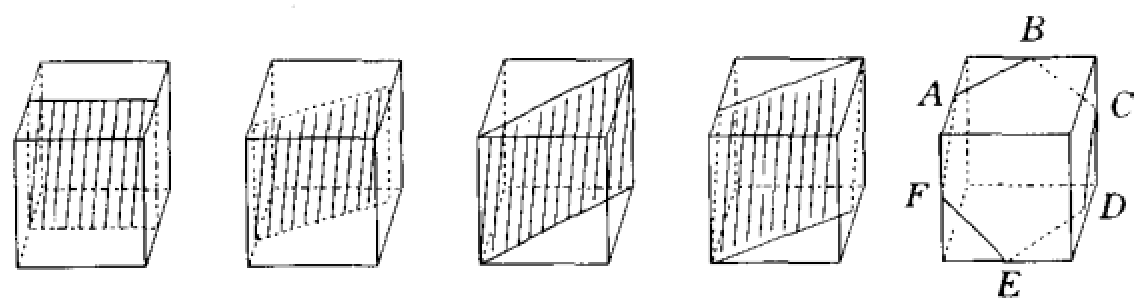
(2) E、D、F;　(3) F、E、D;

(4) D、F、E;　(5) E、D、F;

(6) F、E、D.

【例 8】 有一块正方体的蛋糕. 用刀子将它一刀切成两半，为了使切口成正六边形，应该怎样切呢？

解：



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

一般地，按照平常习惯的切法切下去，得到的切口成为上图中(1)的正方形或者像(2)、(3)那样的长方形. 如果斜切下去时样子就不一样了，比如像(4)那样，以打算切的顶点作一方，将不相邻的某一边的中点作另一方，沿它的连接线来切，切口变成菱形.

如果再进一步，连接相邻边的中点，沿着它的连线来切，如上图中(5)所示，因为切口的各边都是连接边和边的中点的直线，所以长度都相等，相邻边夹角也相等，边数是六，故是正六边形.

习　题　五

一、填空题：

1. 一块矩形纸板，长 8 厘米，宽 6 厘米，把它折成底面为正方形的长方体的侧面，则这个长方体的底面面

积为____平方厘米.

2. 有一个棱长为 6 厘米的正方体木块，如果把它锯成棱长是 2 厘米的正方体若干块，表面积增加了____平方厘米.

3. 把一根 2 米长的方木锯成两段，表面积增加 288 平方厘米，原来这根方木的体积是____立方厘米.

4. 把棱长为 a 厘米的两个正方体拼成一个长方体，长方体的表面积是原来两个正方体表面积和的$\frac{(\quad)}{(\quad)}$.

5. 把棱长 1 厘米的正方体 2100 个，堆成一个实心的长方体，它的高是 10 厘米，长和宽都大于高，这个长方体的长与宽的和是____厘米.

二、选择题：

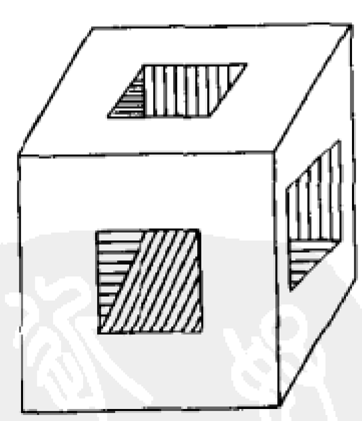
1. 一个正方体的体积是 343 立方厘米，它的全面积是____平方厘米.

(A)42　　(B)196　　(C)294　　(D)392

2. 把棱长为 3 分米的正方体锯成两个长方体，这两个长方体表面积的和是____平方分米.

(A)54　　(B)72　　(C)108　　(D)以上都不对

3. 如右图，一个木制的正方体的棱长为 2 分米，每个面的正中有一个正方形的孔通到对边，边长为 1 分米，孔的各棱平行于正方体相对的棱，那么这个镂空几何体的总表面积的平方分米数是____.



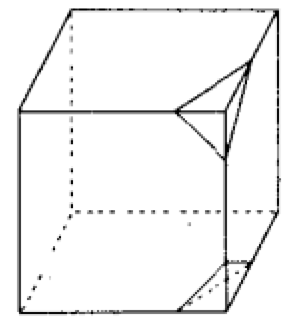
(A)24　　(B)30　　(C)36

(D)42

4. 如下页图立方体的每个角都被切下去（图中仅画了两个）. 问所得到的几何体有____条棱？

(A)24　(B)30　(C)36

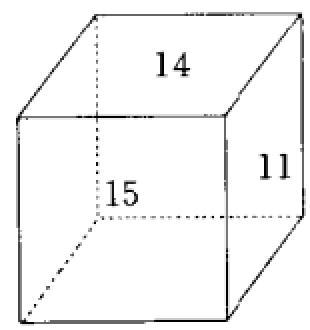
(D)42



5. 立方体各面上的数字是连续的整数(如图). 如果每对对面上的两个数的和相等，那么，这三对数的和是_____.

(A)75　(B)76　(C)78

(D)81



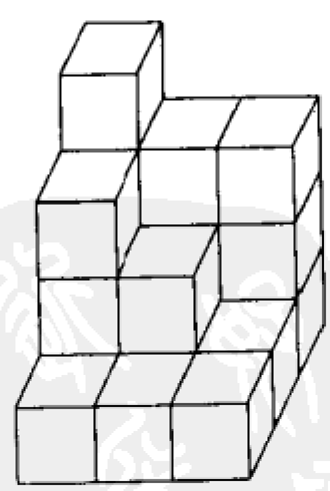
三、解答题：

1. 一个木盒从外面量长10厘米，宽8厘米，高5厘米，木板厚1厘米. 问①做这个木盒最少需要1厘米厚的木板多少平方厘米？②这个木盒的容积是多少立方厘米？

2. 将一个长9厘米，宽8厘米，高3厘米的长方体木块锯成若干个小正方体（锯痕宽度忽略不计），然后再拼成一个大正方体，求这个大正方体的表面积.

3. 一个边长为6厘米的正方体铁盒装满了水，将水倒入一个长9厘米，宽8厘米的长方形水槽内，若铁皮厚度不计，求水深.

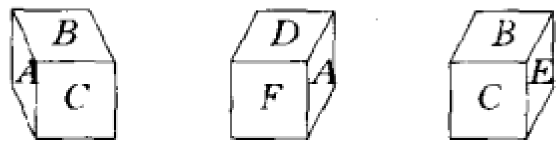
4. 把19个边长为2厘米的正方体重叠起来，作成如右图那样的组合形体，求这个组合形体的表面积.



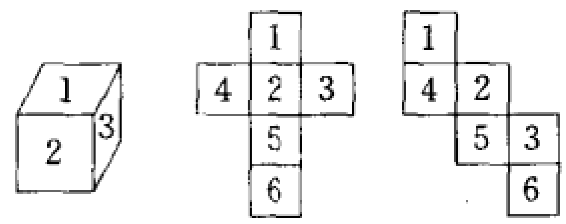
5. 将表面积为54平方厘米、96平方厘米、150平方厘米的三个铁质正方体熔铸成一个大正方体（不计损耗）. 求这个大正方体的体积和表面积.

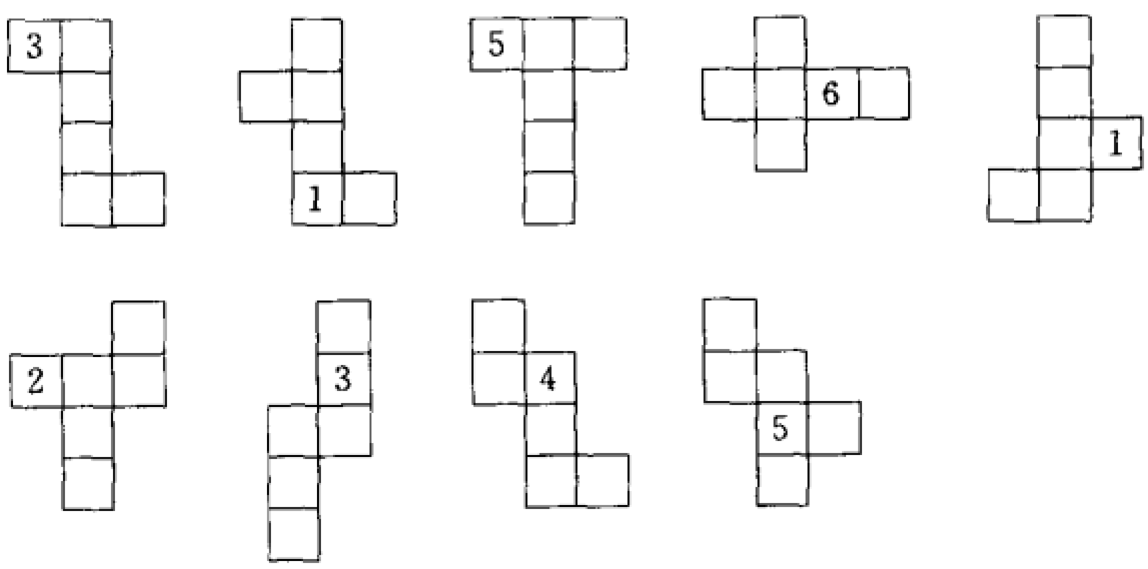
6. 用字母标出一个正方体的各面，下

图中是三个不同方位的这一个正方体，问字母 A、B、C 的对面是什么字母？

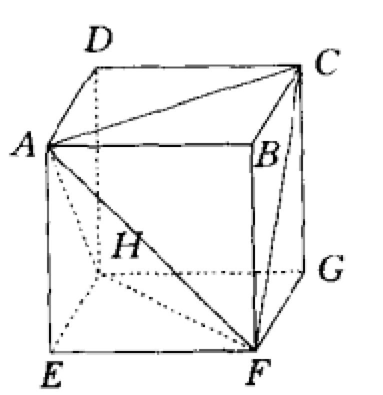


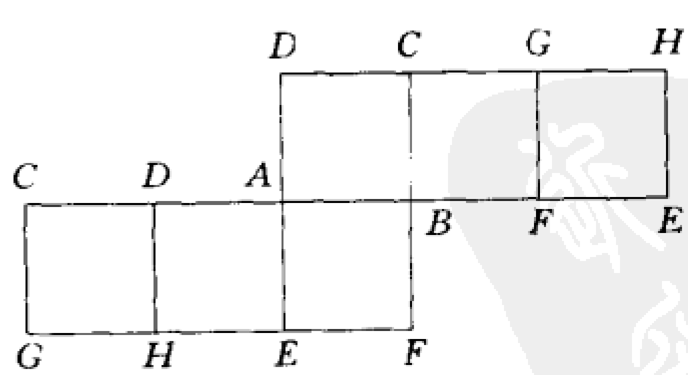
7. 右图是一个正方体及其两个展开图. 这个正方体还有九种不同的展开图（下图），请把这九个展开图填上相应的数字（注意数字的方向）.





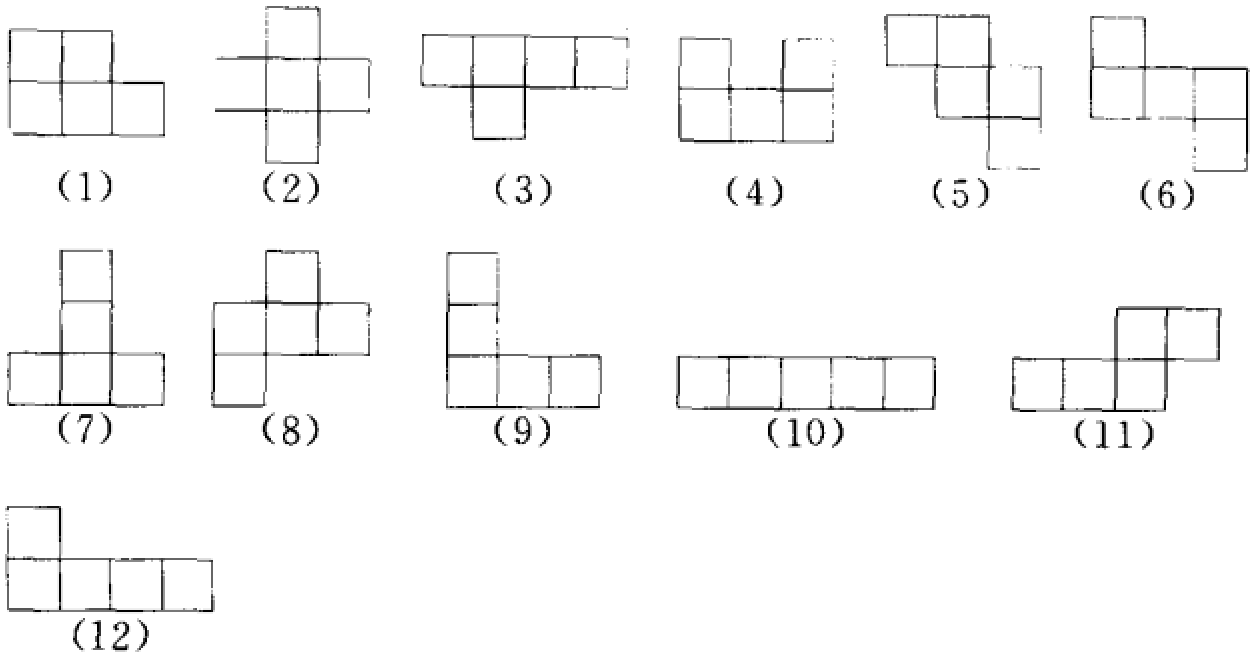
8. 下左图中的立方体，被两个平面所截，你能在这个正方体的展开图中画出相应的截线吗？（下右图）



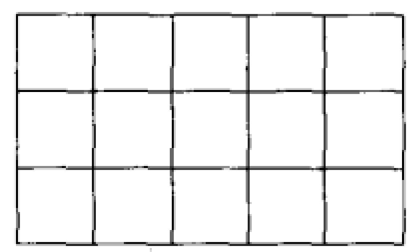


9. 在下页图所示的 12 个展开图中，哪些可以做成没

有顶盖的五个面的小方盒？



10．下页图是一张 3×5 的方格纸，在保持每个方格完整的条件下，将它剪成三部分，使每部分都可以折成一个棱长为 1 的没有顶盖的小方盒，怎样剪？



习题五解答

一、填空题：

1．4 或$\frac{9}{4}$平方厘米，应注意到有两种折法．

2．432 平方厘米．

3．28800 立方厘米．

4．$\frac{5}{6}$．

5．2100÷10＝210，把 210 分解质因数，因为棱长为 1 厘米，所以符合条件（大于 10 厘米）的长和宽只能是 15 厘米和 14 厘米，故长与宽的和是 29 厘米．

二、选择题：

题　号	1	2	3	4	5
答　案	C	B	B	C	D

三、1. ①256 平方厘米；　　②144 立方厘米.

2. 216 平方厘米.

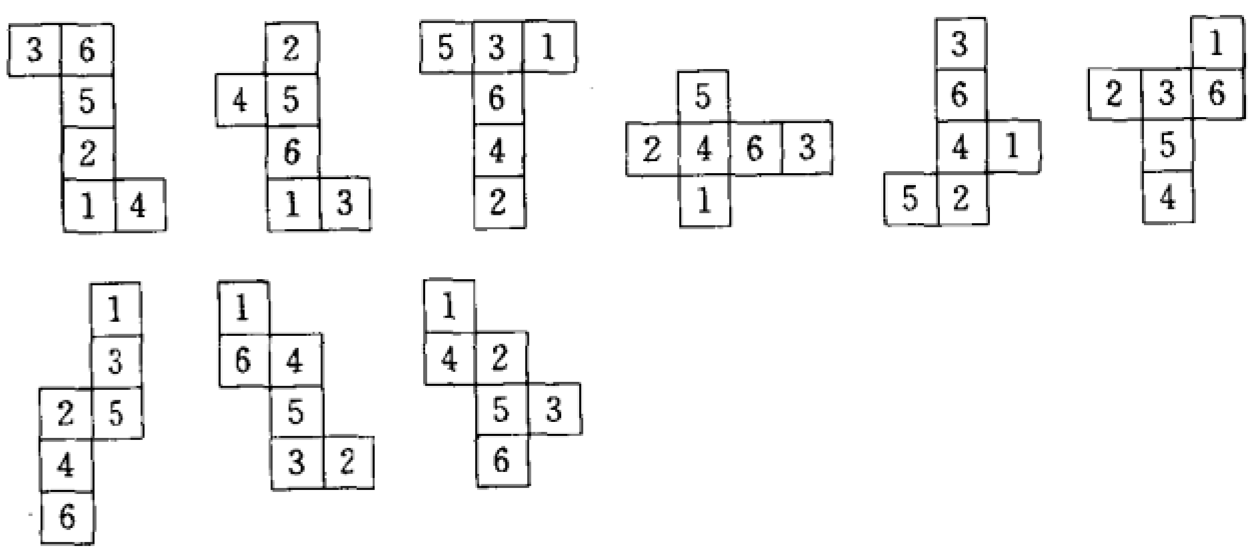
3. 3 厘米.

4. $(4\times9+4\times10+4\times8)\times2=216$ 平方厘米.

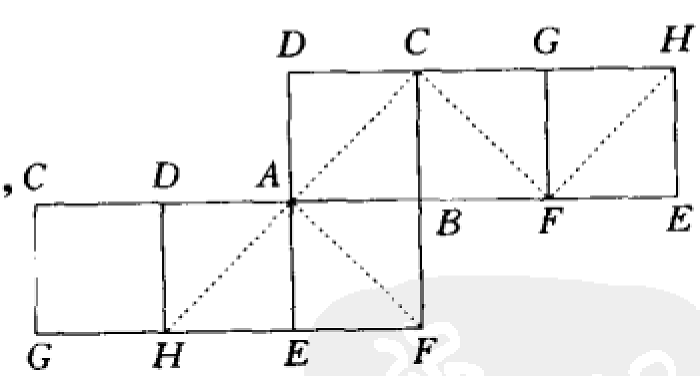
5. 216 立方厘米，216 平方厘米.

6. A 对面是 E，B 对面是 F，C 对面是 D.

7.

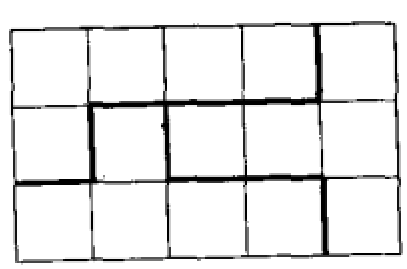


8.



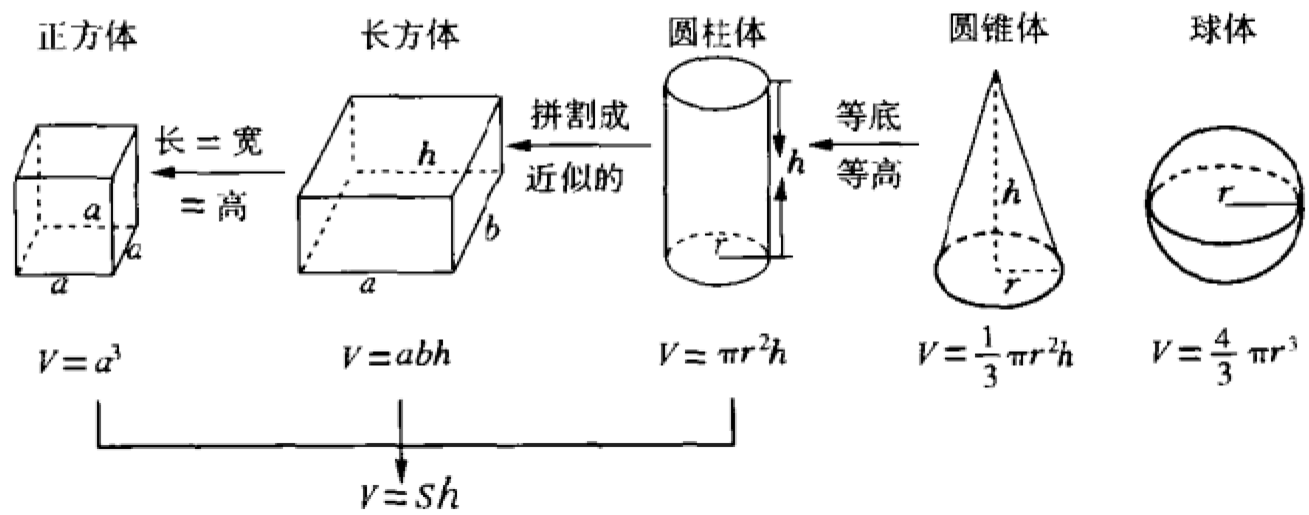
9. 第 2，3，5，6，7，8，11，12 共 8 个.

10. 如图：



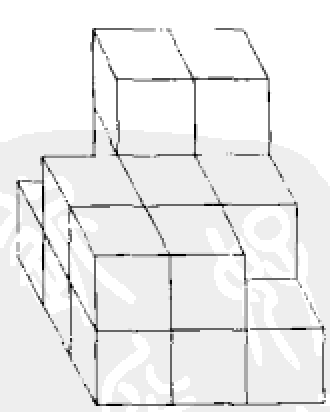
第6讲 立体图形的计算

在小学阶段，我们除了学习平面图形外，还认识了一些简单的立体图形，如长方体、正方体（立方体）、直圆柱体，直圆锥体、球体等，并且知道了它们的体积、表面积的计算公式，归纳如下．见下图．



在数学竞赛中，有许多几何趣题，解答这些趣题的关键在于精巧的构思和恰当的设计，把形象思维和抽象思维结合起来．

【例 1】 右图是由 18 个边长为 1 厘米的小正方体拼成的，求它的表面积．



分析与解答 求这个长方体的表面积，如果一面一面地去数，把结果累计相加可以得到答案，但方法太繁．如果仔细观察，会发现这个立体的上下、左右、前

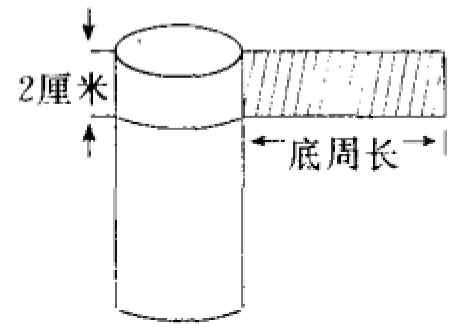
后面的面积分别相等．因此列式为：

$(9+8+7)\times2=48$(平方厘米).

答：它的表面积是 48 平方厘米．

【例 2】　一个圆柱体底面周长和高相等．如果高缩短了 2 厘米，表面积就减少 12.56 平方厘米．求这个圆柱体的表面积．

分析　一个圆柱体底面周长和高相等，说明圆柱体侧面展开是一个正方形．解题的关键在于求出底周长．根据条件：高缩短 2 厘米，表面积就减少 12.56 平方厘米，用右图表示，从图中不难看出阴影部分就是圆柱体表面积减少部分，值是 12.56 平方厘米，所以底面周长 $C=12.56\div2=6.28$(厘米)．这个问题解决了，其它问题也就迎刃而解了．



解：底面周长(也是圆柱体的高)：

$12.56\div2=6.28$ (厘米).

侧面积：

$6.28\times6.28=39.4384$ (平方厘米)

两个底面积 (取 $\pi=3.14$):

$3.14\times(\frac{6.28}{2\times3.14})^2\times2=6.28$(平方厘米)

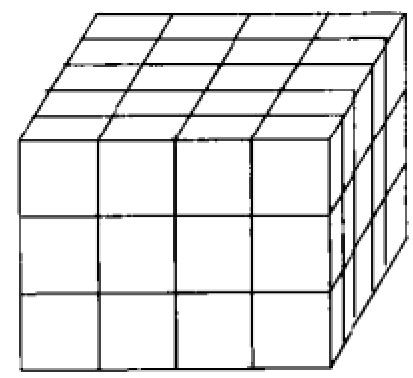
表面积：

$39.4384+6.28=45.7184$ (平方厘米)

答：这个圆柱体的表面积是 45.7184 平方厘米．

【例 3】　一个正方体形状的木块，棱长为 1 米．若沿正方体的三个方向分别锯成 3 份、4 份和 5 份，如下页图，共得到大大小小的长方体 60 块，这 60 块长方体的

表面积的和是多少平方米？



分析 如果将 60 个长方体逐个计算表面积是个很复杂的问题，更何况锯成的小木块长、宽、高都未知使得计算小长方体的表面积成为不可能的事．如果换一个角度考虑问题：每锯一次就得到两个新的切面，这两个面的面积都等于原正方体一个面的面积，也就是，每锯一次表面积增加$1+1=2$平方米，这样只要计算一下锯的总次数就可使问题得到解决．

解：原正方体表面积：$1\times1\times6=6$（平方米），

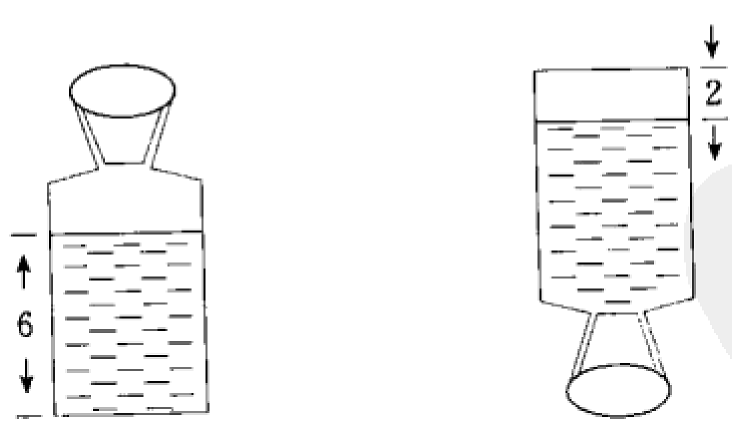
一共锯了多少次：（次数比分的段数少 1）

$(3-1)+(4-1)+(5-1)=9$(次)，

表面积：$6+2\times9=24$（平方米）．

答：60 块长方体表面积的和是 24 平方米．

【例 4】 一个酒精瓶，它的瓶身呈圆柱形（不包括瓶颈），如下图．已知它的容积为 26.4π 立方厘米．当瓶子正放时，瓶内的酒精的液面高为 6 厘米．瓶子倒放时，空余部分的高为2 厘米．问：瓶内酒精的体积是多少立方厘米？合多少升？



分析 由题意，液体的体积是不变的，瓶内空余部

分的体积也是不变的，因此可知液体体积是空余部分体积的 3 倍（6÷2）.

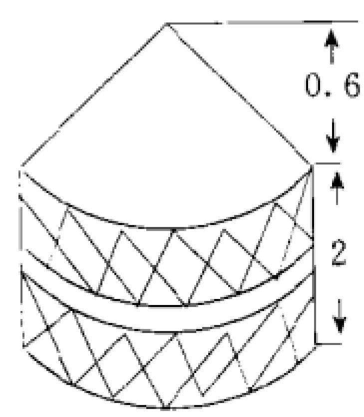
解：$26.4\pi\times\frac{3}{3+1}=62.172$（立方厘米）.（取 $\pi=3.14$）

62.172 立方厘米＝62.172 毫升

＝0.062172 升.

答：酒精的体积是 62.172 立方厘米，合 0.062172 升.

【例 5】　一个稻谷囤，上面是圆锥体，下面是圆柱体（如右图）. 圆柱的底面周长是 9.42 米，高 2 米，圆锥的高是 0.6 米. 求这个粮囤的体积是多少立方米？



分析　按一般的计算方法，先分别求出锥、柱的体积再把它们合并在一起求出总体积. 但我们仔细想一想，如果把圆锥形的稻谷铺平，把它变成圆柱体，这时圆柱的高等于 $\frac{1}{3}\times0.6=0.2$（米），那么原来两个形体变成一个圆柱体，高是 $(2+0.2)$ 米. 这样求出变化后直圆柱的体积就可以了.

解：圆锥体化为圆柱体的高：

$0.6\times\frac{1}{3}=0.2$（米）.

底面积：

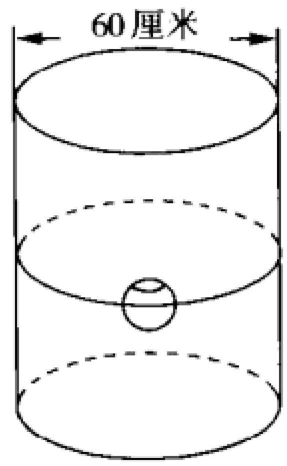
$3.14\times(\frac{9.42}{2\times3.14})^2=7.065$（平方米）.

体积：

$7.065\times(2+0.2)=15.543$（立方米）.

答：粮囤的体积是 15.543 立方米.

【例 6】 皮球掉在一个盛有水的圆柱形水桶中．皮球的直径为 12 厘米，水桶底面直径为 60 厘米．皮球有 2/3 的体积浸在水中（右图）．问皮球掉进水中后，水桶的水面升高多少厘米？



分析 皮球掉进水中后排挤出一部分水，使水面升高．这部分水的体积的大小等于皮球浸在水中部分的体积，再用这个体积除以圆柱形水桶底面积，就得到水面升高的高度．

解：球的体积：

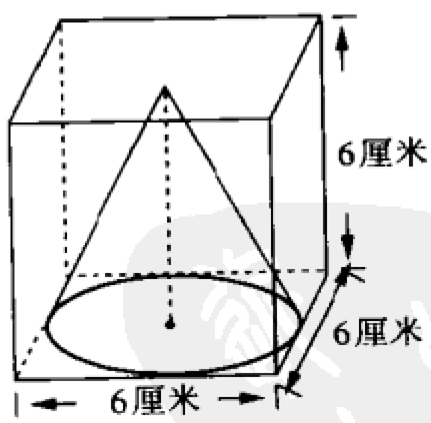
$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times(\frac{12}{2})^3$$
$$=288\pi(\text{立方厘米}).$$

水桶的底面积：$\pi\times30^2=900\pi$(平方厘米).

水面升高的高度：$\frac{2}{3}\times\frac{288\pi}{900\pi}=\frac{16}{75}$(厘米).

答：水面升高$\frac{16}{75}$厘米.

【例 7】 右图所示为一个棱长 6 厘米的正方体，从正方体的底面向内挖去一个最大的圆锥体，求剩下的体积是原正方体的百分之几？（保留一位小数）.



分析 直圆锥底面直径是正方体的棱长，高与棱长相等.

剩下体积等于原正方体体积减去直圆锥体积.

解：正方体体积：$6^3=216$（立方厘米）.

圆锥体积：$\frac{1}{3}\times 3.14\times(\frac{6}{2})^2\times 6$

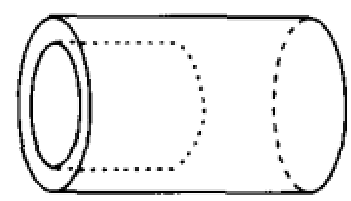
$=56.52$（立方厘米）.

剩下体积占正方体的百分之几.

$(216-56.52)\div 216\approx 0.738\approx 73.8\%$.

答：剩下体积占正方体体积的 73.8%.

【例 8】 有一个圆柱体的零件，高 10 厘米，底面直径是 6 厘米，零件的一端有一个圆柱形的直孔，如右图. 圆孔的直径是 4 厘米，孔深 5 厘米. 如果将这个零件接触空气部分涂上防锈漆，一共需涂多少平方厘米？



分析 解题时，既要注意圆柱体的外表面积，又要注意圆孔内的表面，同时还要注意到零件的底面是圆环. 由于打孔的深度与柱体的长度不相同，所以在孔内还要有一个小圆的底面需要涂油漆，这一点不能忽略. 但是，我们可以把小圆的底面与圆环拼成一个圆，即原圆柱体的底面.

解：涂漆面积：

$3.14\times(\frac{6}{2})^2\times 2+3.14\times 6\times 10+3.14\times 4\times 5$

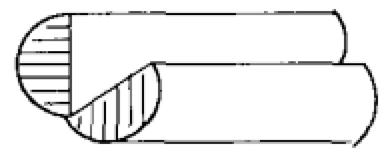
$=3.14\times(18+60+20)=3.14\times 98$

$=307.72$（平方厘米）.

答：涂油漆面积是 307.72 平方厘米.

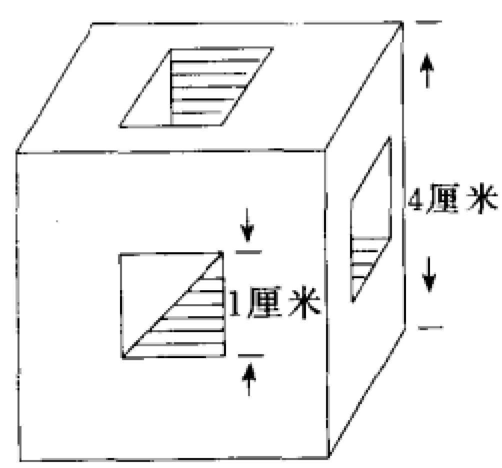
习　题　六

1．一根圆柱形钢材，沿底面直径割开成两个相等的半圆柱体，如右图．已知一个剖面的面积是 960 平方厘米，半圆柱的体积是 3014.4 立方厘米．求原来钢材的体积和侧面积．

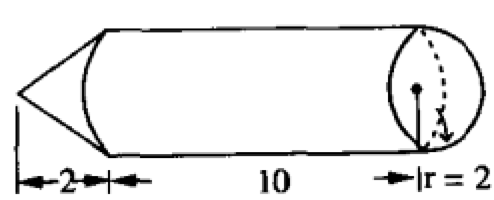


2．在一只底面直径是 40 厘米的圆柱形盛水缸里，有一个直径是 10 厘米的圆锥形铸件完全浸于水中．取出铸件后，缸里的水下降 0.5 厘米，求铸件的高．

3．在边长为 4 厘米的正方体木块的每个面中心打一个边与正方体的边平行的洞．洞口是边长为 1 厘米的正方形，洞深 1 厘米（如右图）．求挖洞后木块的表面积和体积．

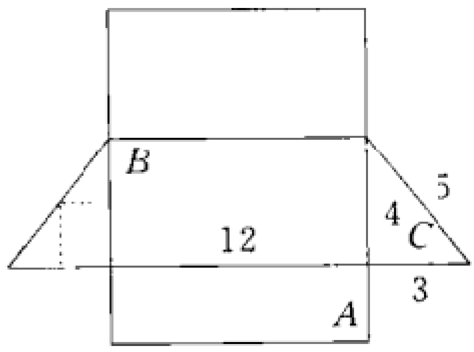


4．如右图所示的一个零件，中间一段是高为 10 厘米，底面半径为 2 厘米圆柱体，上端是一个半球体，下端是一个圆锥，它的高是 2 厘米．求这个零件的体积．

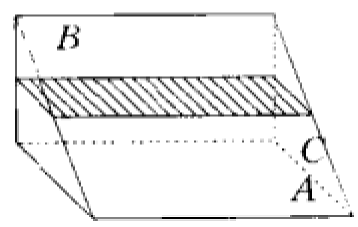


5．塑料制的三棱柱形的筒里装着水（如下页图（1）是这个筒的展开图，图中数字单位为厘米）．把这个筒的 A 面作为底面，放在水平桌面上，水面的高度是 2 厘米（如下页图（2））．问①若把 B 面作为底面，放在水平的桌面上，水面的高度是多少厘米？

②若把 C 面作为底面，放在水平桌面上，水面高度是多少厘米？



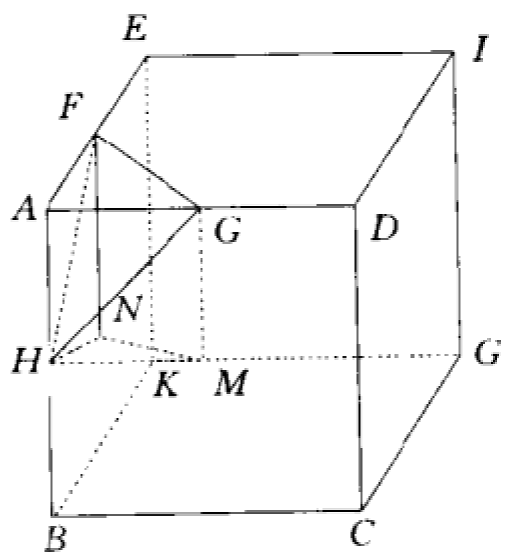
(1)



(2)

6．大、中、小三个正方体形的水缸都盛有 $\frac{1}{3}$ 缸水，它们的内边长分别为 4 分米、3 分米、2 分米．把两堆碎石分别沉浸在中、小水缸的水中，两个水池的水面分别升高了 4 厘米和 11 厘米．如果将这两堆碎石都沉浸在大水缸中，大水缸中水面将升高多少厘米？

7．如右图是一个正方体，H、G、F 分别为棱 AB、AD、AE 的中点．现沿三角形 GFH 的面锯掉一个角，问锯掉这块的体积是整个立方体体积的几分之几？



（提示：$V_{棱柱}=S\cdot h$，

S 为底面积，h 为高．

$V_{棱锥}=\frac{1}{3}S\cdot h$，

可见棱锥的体积是等底等高的棱柱体积的三分之一．）

习题六解答

1．$3014.4\times 2=6028.8$（立方厘米），

$960\times \pi=3014.4$(平方厘米).

答：原钢材体积是 6028.8 立方厘米，侧面积是 3014.4 平方厘米.

2．下降部分水的体积：

3．$14\times(\frac{40}{2})^2\times 0.5=628$（立方厘米），

铸件的高：

$628\times 3\div[3.14\times(\frac{10}{2})^2]=24$（厘米）.

答：铸件的高是 24 厘米.

3．提示：大正方体的边长为 4 厘米，挖去的小正方体边长为 1 厘米，说明大正方体木块没被挖通，因此，每挖去一个小正方体木块，大正方体的表面积增加“小洞内”的 4 个侧面积.

解：6 个小洞内新增加面积的总和：

$1\times1\times4\times6=24$（平方厘米），

原正方体表面积：$4^2\times6=96$（平方厘米），

挖洞后木块表面积：$96+24=120$（平方厘米），

体积：$4^3-1^3\times6=58$（立方厘米）.

答：挖洞后的表面积是 120 平方厘米，体积是 58 立方厘米.

4．解：$\frac{1}{2}$球体体积：

$$\frac{V_{球}}{2}=\frac{4}{3}\pi r^3\times\frac{1}{2}$$

$=\frac{4}{3}\times\pi\times2^3\times\frac{1}{2}$

$=\frac{16}{3}\pi$(立方厘米),

圆柱体积：$\pi\times2^2\times10=40\pi$(立方厘米),

圆锥体积：$\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2=\frac{8}{3}\pi$(立方厘米),

总体积：$\frac{16}{3}\pi+40\pi+\frac{8}{3}\pi=48\pi$(立方厘米)

$\doteq150.72$（立方厘米）.

答：这个零件的体积是 48π 立方厘米，即约 150.72 立方厘米.

5. 解：以 A 为底面时，水的体积为：

$(3+\frac{3}{2})\times2\div2\times12=54$(立方厘米).

①以 B 面为底面时：由于以 A 为底面时，有水的部分占其纵截面(底边为 3 厘米的三角形)面积的$\frac{3}{4}$，而以 B 为底面时，纵截面与上述纵截面相同，故以 4 厘米的边为底边，有水部分仍占其面积的$\frac{3}{4}$，因此水面高度为截面三角形高度的一半，即为 1.5 厘米.

②以 C 面为底面时，水的高度为：

$54\div(\frac{1}{2}\times3\times4)=9$(厘米).

6. 解：两堆碎石的体积之和：

3 分米 = 30 厘米，　2 分米 = 20 厘米，

$30^2\times4+20^2\times11=8000$(立方厘米).

沉浸在大水缸中水面应升高高度：

4 分米 = 40 厘米，

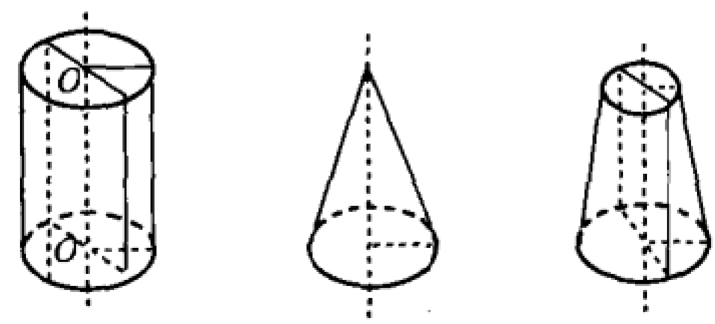
$8000\div40^2=5$(厘米).

答:如果沉浸在大水缸中,水面升高 5 厘米.

7. 解:将正方体沿各棱中点,依水平和垂直方向切开,可得 8 个相同的小正方体,每个小正方体又可切成 2 个小三棱柱体,每个小三棱柱体的体积是等底等高三棱锥(即锯掉的一角)体积的三倍.因此锯掉的这块体积是整个正方体的体积的$\frac{1}{48}$.

第7讲 旋转体的计算

分别以矩形、直角三角形、直角梯形的一边、一直角边、垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，其余各边旋转而成的曲面所围成的几何体分别叫做圆柱、圆锥、圆台（下图）.

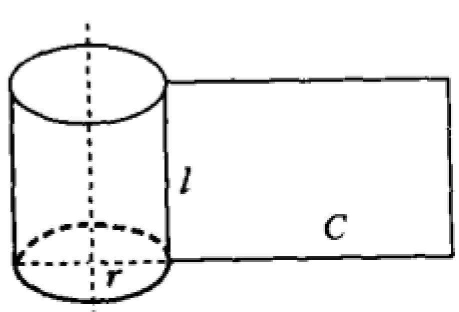


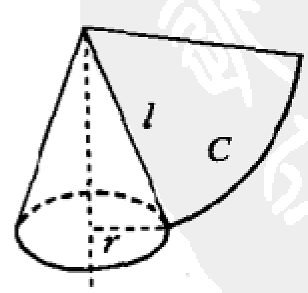
旋转轴叫做它们的轴，在轴上这条边的长度叫做它们的高，垂直于轴的边旋转而形成的圆面叫做它们的底面，不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做它们的侧面，这条边无论旋转到什么位置，都叫做旋转体的母线.

圆柱的侧面展开后是个矩形，它的宽是圆柱的母线，长是圆柱底面的周长. 由此可得

$S_{圆柱侧}=2\pi rl$,

其中 l 是圆柱侧面的母线长，r 是底面半径（下左图）.





圆锥的侧面展开图是一个扇形，如上页下角图这个扇形的半径是圆锥的母线，弧长是圆锥底面的周长，于是可得

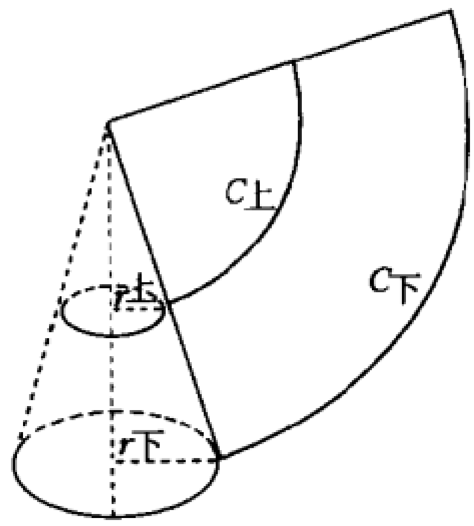
$$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}Cl=\pi rl,$$

其中 l 是圆锥侧面的母线，C 是圆锥底面的周长，r 是圆锥底面的半径.

圆台是用一个平行于圆锥底面的平面截圆锥而得到的，所以圆台的侧面展开图是两个扇形的差，常叫扇环形. 这个扇环形的宽是圆台侧面的母线，外弧长和内弧长分别是圆台的下底面和上底面的周长，于是可得

$$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}(C_{上}+C_{下})l=(r_{上}+r_{下})\pi l,$$

其中 l 是圆台侧面母线长，$C_{上}$、$C_{下}$ 分别是圆台上底和下底周长，$r_{上}$、$r_{下}$ 分别是圆台上底和下底的半径（如右图）.



圆柱的体积等于它的底面积 S 与高 h 的乘积，即

$$V_{圆柱}=Sh=\pi r^2h,$$

其中 r 为圆柱底面的半径.

圆锥的体积等于它的底面积 S 与高 h 的积的三分之一，即 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h,$

其中 r 为圆锥底面半径.

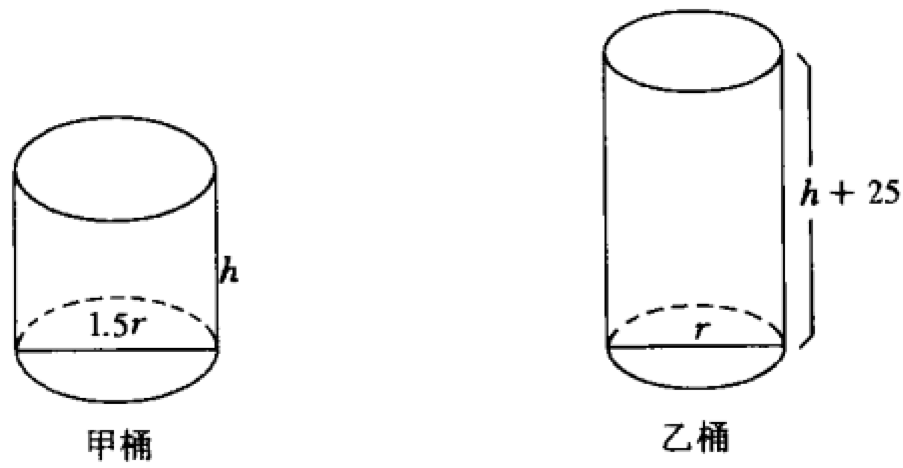
圆台的体积是

$$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r_{上}^2+r_{下}^2+r_{上}r_{下}),$$

其中，$r_{上}$、$r_{下}$ 分别是上底和下底的半径.

【例 1】　甲、乙两个圆柱形水桶，容积一样大，甲桶底圆半径是乙桶的 1.5 倍，乙桶比甲桶高 25 厘米，求甲、乙两桶的高度.

分析与解答　如下图.



由题意，设乙桶半径为 r，则甲桶半径为 $1.5r$；

甲桶高度为 h，则乙桶高度为 $h+25$，

则　$\pi(1.5r)^2h=\pi r^2(h+25)$，

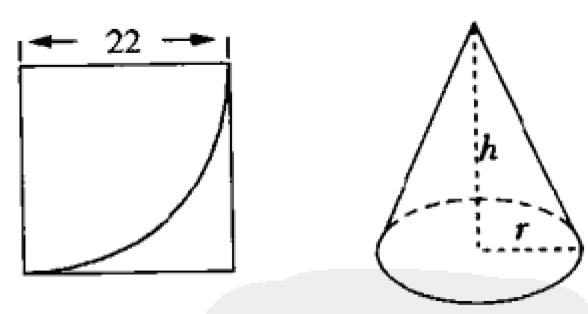
$2.25r^2h=r^2(h+25)$，

$2.25h=h+25$，

∴　$h=20$(厘米)，$h+25=45$(厘米).

答：甲桶高度为 20 厘米，乙桶高度为 45 厘米.

【例 2】　一块正方形薄铁板的边长是 22 厘米，以它的一个顶点为圆心，边长为半径画弧，沿弧剪下一个扇形，用这块扇形铁板围成一个圆锥筒，求它的容积（结果取整数部分）.



解：如右图，扇形弧长 $=\dfrac{1}{4}\times2\pi\times22=11\pi$ 厘米，因此所作的圆锥筒底的周长 $=2\pi r=11\pi$，解得 $r=5.5$ 厘米.

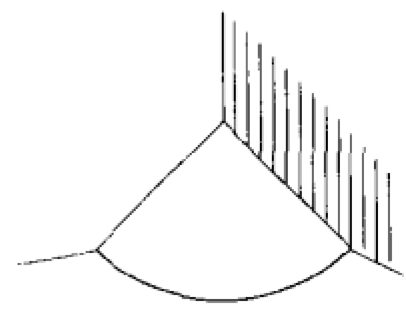
因为母线长是 22 厘米，所以圆锥的高

$h=\sqrt{22^2-5.5^2}\approx21.3$ 厘米，

$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\times5.5^2\times21.3\approx674$(立方厘米).

答：所求圆锥筒的容积约为 674 立方厘米.

【例 3】 在仓库一角有一堆谷，呈$\frac{1}{4}$圆锥形（如右图），量得底面弧长为 2 米，圆锥的高为 1 米，这堆谷重约多少公斤（谷的比重是每立方米重 720 公斤，结果取整数部分）？



解：因为底面弧长为 2 米，所以$\frac{1}{4}\times2\pi r=2$，

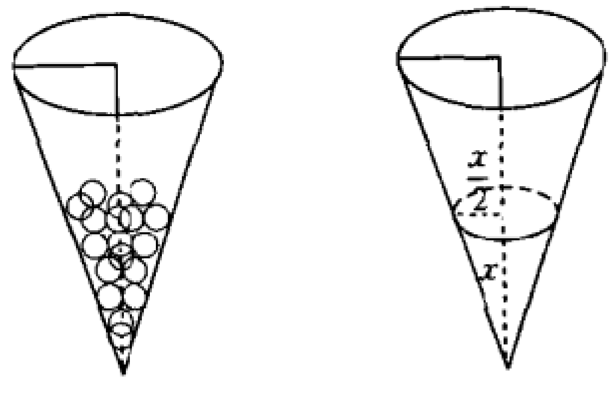
求得 $r=\frac{4}{\pi}$(米)， 因此，

谷堆体积为 $V=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\pi\times(\frac{4}{\pi})^2\times1=\frac{4}{3}\times\frac{1}{\pi}$(立方米)，

谷子重量为 $720\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{\pi}=306$(公斤).

答：这堆谷子重约 306 公斤.

【例 4】 有一个倒圆锥形的容器，它的底面半径是 5 厘米，高是 10 厘米，容器内放着一些石子，石子的体积为$\frac{196}{3}\pi$ 立方厘米，在容器内倒满水后，再把石子全部



拿出来，求此时容器内水面的高度.

解：如上页图，设石子取出后，容器内水面高度为 x 厘米，则倒圆锥容器的容积等于水的体积加上石子的体积．根据体积公式有

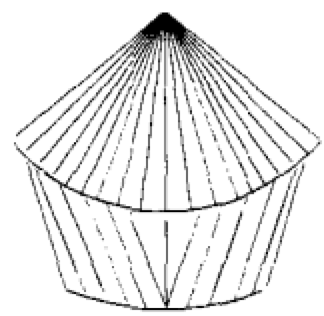
$$\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times10=\frac{1}{3}\times\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2\times x+\frac{196}{3}\pi,$$

$$x^3=(5^2\times10-196)\times4=54\times4=27\times8=3^3\times2^3,$$

$$\therefore\quad x=6.$$

答：石子取出后，容器内水面的高为 6 厘米.

【例 5】　有一草垛，如右图，上部是圆锥形，下部是圆台形，圆锥的高为 0.7 米，底面圆周长为 6.28 米，圆台的高为 1.5 米，下底面周长为 4.71 米．如果每立方米草约重 150 公斤，求这垛草的重量(结果取整数部分).



分析与解答　圆锥底面半径：$r=\frac{6.28}{2\pi}=1$(米)，圆锥的体积：

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times0.7$$
$$=\frac{7}{30}\pi\approx0.73(立方米).$$

圆台的下底半径：$r_{下}=\frac{4.71}{2\pi}=\frac{3}{4}$(米)，

圆台上底半径：$r_{上}=r=1$ 米，

圆台高：$h=\frac{3}{2}$米.

则　$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r_{上}^2+r_{下}^2+r_{上}r_{下})$

$$=\frac{1}{3}\pi\times\frac{3}{2}\times\left[1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+1\times\frac{3}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{37}{16}$$
$$=\frac{37}{32}\pi$$
$$\approx 3.63(\text{立方米}).$$

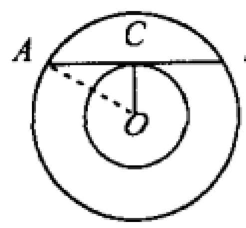
∴ 草垛体积为：

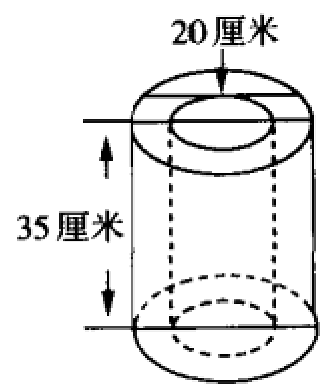
$V_{圆锥}+V_{圆台}=0.73+3.63=4.36$（立方米），

故草垛的重量为：$150\times4.36=654$（公斤）.

答：草垛约重 654 公斤.

【例 6】 如下右图，在长为 35 厘米的圆筒形管子的横截面上，最长直线段为 20 厘米，求这个管子的体积.





分析 如上左图，AB 是截面圆环的最长直线段，O 是截面圆环的圆心．过 O 作 AB 的垂线，垂足是 C，以 O 为圆心，以 OC 为半径作圆，即管截面的内圆周．连结 AO，根据勾股定理有：$AO^2=AC^2+CO^2$，

∴ $AO^2-OC^2=AC^2$，同理 $AO^2-OC^2=BC^2$，

∴ $S_{圆环}=\pi\cdot AO^2-\pi\cdot OC^2=\pi\cdot(AO^2-OC^2)$

$$=\pi\cdot AC^2=\pi\cdot(\frac{AB}{2})^2.$$

解：先求出管子横截面的圆环面积为

$\pi\times(\frac{20}{2})^2=100\pi$(平方厘米)，

则管子的体积为：

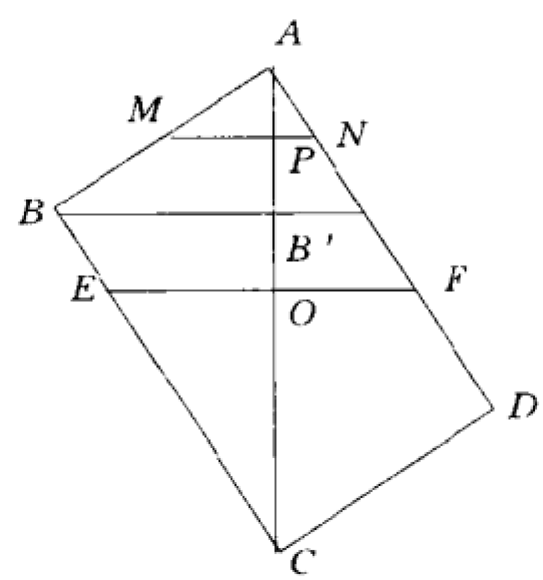
$\pi \cdot r_{外径}^2 \cdot h - \pi r_{内径}^2 h = 圆环面积 \times h$
$= 100\pi \times 35$
$= 3500\pi$(立方厘米)

答：这个管子的体积为 3500π 立方厘米.

【例 7】 一个长方形的长为 16 厘米，宽为 12 厘米. 以它的一条对角线为轴旋转此长方体，得到一个旋转体. 求这个旋转体的体积.（结果中保留 π, 即不用近似值代替 π.）

分析与解答 如右图，记这个长方形为 $ABCD$, 对角线 AC 的中点为 O. 过 O 作 EF 垂直于 AC, 分别交 BC、AD 于 E、F. 由对称性知道：

$EO = OF$.



设 P 为 AO 上的任一点，过 P 作 AO 的垂线，分别交折线 ABE 和线段 AF 于 M 和 N, 那么

$MP > PN$.

因此，四边形 $ABEF$ 绕 AC 旋转得到的立体即为四边形 $ABEO$ 绕 AC 旋转得到的立体. 同样，四边形 $CDFE$ 绕 AC 旋转得到的立体即为四边形 $CDFO$ 绕 AC 旋转得到的立体. 并且，由于对称性，四边形 $ABEO$ 与 $CDFO$ 是完全一样的，因此由它们绕 AC 旋转得到的立体也是完全一样的. 这样，这两个立体的体积相等. 所以，长方形 $ABCD$ 绕 AC 旋转得到的立体的体积等于四边形 $ABEO$ 绕 AC 旋转得到的立体的体积的两倍.

记由长方体 $ABCD$ 绕 AC 旋转得到的立体为 W, 由四边形 $ABEO$ 绕 AC 旋转得到的立体为 U, 由 $\triangle ABB'$(B' 在 AO 上，BB' 垂直于 AO)、四边形 $BEOB'$ 绕 AC 旋转得到

的立体分别记为 U_1、U_2. 显然，U_1 与 U_2 有一条公共的边界（由 BB' 旋转而成的圆），且 U_1 与 U_2 合成 U. 因此

$$V_W = 2V_U = 2(V_{U_1} + V_{U_2}).$$

由 $AB = 12$ 厘米，$BC = 16$ 厘米及勾股弦定理得：

$AC = 20$ 厘米，所以 $AO = CO = \frac{1}{2}AC = 10$ 厘米.

再由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot BB'$ 得

$BB' = 9.6$ 厘米.

在直角三角形 ABB' 中再用勾股弦定理，得

$AB' = 7.2$ 厘米，所以 $B'O = AO - AB' = 2.8$ 厘米.

U_1 是一个圆锥，底面半径 $BB' = 9.6$ 厘米，高 $AB' = 7.2$ 厘米，所以

$$V_{U_1} = \frac{1}{3}\pi \times 9.6^2 \times 7.2 \text{(立方厘米)}.$$

U_2 是一个圆台，它是大、小两个圆锥的差，大圆锥以 BB' 为底面半径，CB' 为高，小圆锥以 EO 为底面半径，CO 为高，容易知道

$$CB' = CO + OB' = 12.8 \text{ 厘米},$$

由 $EO : OC = AB : BC$ 可以求出 $EO = 7.5$ 厘米.

因此

$$V_{U_2} = \frac{1}{3}\pi \times 9.6^2 \times 12.8 - \frac{1}{3}\pi \times 7.5^2 \times 10 \text{(立方厘米)}.$$ 所以

$$\begin{aligned} V_W &= 2 \times [\frac{1}{3}\pi \times 9.6^2 \times 7.2 + \frac{1}{3}\pi \times 9.6^2 \\ &\quad \times 12.8 - \frac{1}{3}\pi \times 7.5^2 \times 10] \\ &= 853.8\pi \text{(立方厘米)} \end{aligned}$$

答：所求的旋转体体积为 853.8π 立方厘米.

习　题　七

一、填空题：

1. 一个圆柱体的侧面积是 m 平方厘米，底面半径是 2 厘米，它的体积是____立方厘米.

2. 一个圆锥的母线长为 8 厘米，底面直径为 12 厘米，那么这个圆锥的侧面积等于____平方厘米.

3. 圆台的上、下底面半径分别为 2 厘米和 5 厘米，母线长为 4 厘米，那么这个圆台的表面积等于____.

4. 用半径为 2 厘米的半圆形铁皮卷成的圆锥形容器，则它的底面半径为____厘米，容积是____立方厘米.

5. 一个圆锥的高是 10 厘米，侧面展开图是半圆，那么圆锥的侧面积等于____.

二、选择题：

1. 一个圆柱体高 80 厘米，侧面积为 1.5 平方米，它的全面积是____（精确到 0.01 平方米）.

(A)1.78 平方米　　(B)2.06 平方米

(C)3.74 平方米　　(D)5.25 平方米

2. 圆锥的侧面积为 427.2 平方厘米，母线长为 17 厘米，那么圆锥的高是____（精确到 0.01 厘米）.

(A)5.75 厘米　　(B)15 厘米

(C)16.52 厘米　　(D)5.25 厘米

3. 圆柱的一个底面积是 S，侧面展开图是一个正方形，那么这个圆柱的侧面积是____.

(A)$4\pi S$　　(B)$2\pi S$

(C)πS　　(D)$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi S$

4. 母线和底面直径相等的圆锥叫做等边圆锥，一个等边圆锥的底面半径是 5 厘米，那么它的侧面积是____.

(A)25 平方厘米　　(B)50π 平方厘米

(C)100π 平方厘米　　(D)250π 平方厘米

5. 把一个底面半径是 1 厘米的圆柱体侧面展开，得到一个正方形，这个圆柱体的体积是____立方厘米（取 $\pi=3.14$）.

(A)1　　(B)3.14

(C)3.14×3.14　　(D)3.14×6.28

6. 长、宽分别为 6 寸、4 寸的长方形铁片，把它围成一个圆桶，另加一个底，形成圆柱形的杯子，这个杯子的最大容积是____.

(A)$\frac{24}{\pi}$　　(B)$\frac{36}{\pi}$

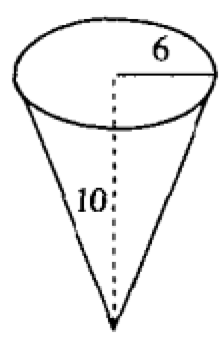
(C)$\frac{46}{\pi}$　　(D)$\frac{144}{\pi}$

三、解答题：

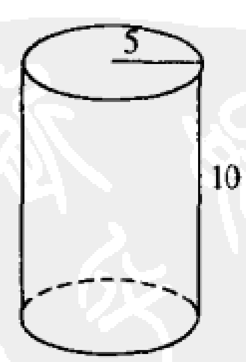
1. 一个底面直径是 20 厘米的圆柱形容器中装着水，水中放置一个底面半径是 9 厘米，高 20 厘米的铁质圆锥体，当圆锥从桶中取出后，桶内的水将下降多少厘米？

2. 在一只底面半径为 20 厘米的圆柱形小桶里，有一半径为 10 厘米的圆柱形钢材浸在水中. 当钢材从桶里取出后，桶里的水下降了 3 厘米. 求这段钢材的长.

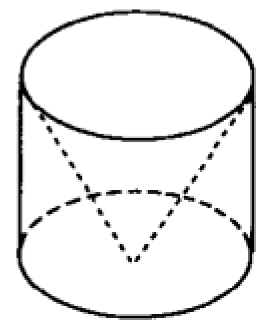
3. 有 A、B 两个容器，如右图，先将 A 容器注满水，然后倒入 B 容器，求 B 容器的水深.（单位：厘米）



(1)



(2)



4. 从一个底面半径为 3 厘米，高为 4 厘米的圆柱中，挖去一个以圆柱上底面为底，下底面中心为顶点的圆锥，得到一个如右图的几何体. 求这个几何体的表面积和体积.

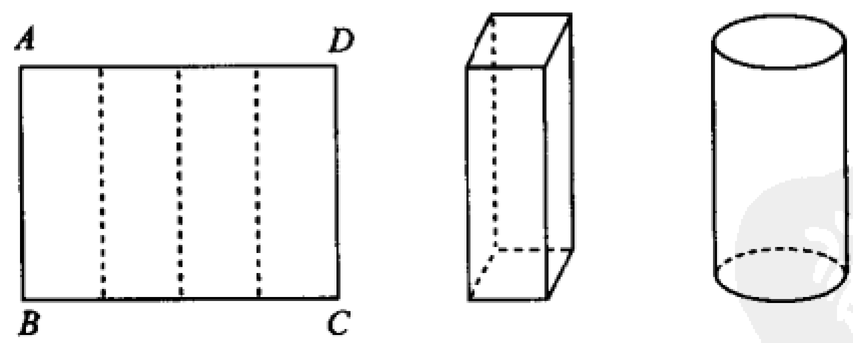
5. 圆锥形烟囱帽的底的半径是 40 厘米，高是 30 厘米，计算它的侧面面积. 若烟囱表面要涂油漆，已知每平方米需要油漆 150 克，问需油漆多少克?

6. 一个圆台的母线长为 25 厘米，而两个底面半径之比为 1∶3，已知圆台的侧面积等于 1000π 平方厘米，求这个圆台的全面积.

7. 把一条导线以螺旋状绕在圆柱管上，绕成十圈，圆柱管的外圆周长 4 厘米，导线的两端点位于圆柱的同一条母线上，每线长（两端点之间的距离）为 9 厘米. 试求导线的长度.

8. 在长为 1 米的圆筒形管子的横截面上，最长直线段为 12 厘米，求此管子的体积.

9. 如下图，长方形纸片 $ABCD$ 中，$AB=3$ 厘米，$BC=4$ 厘米，



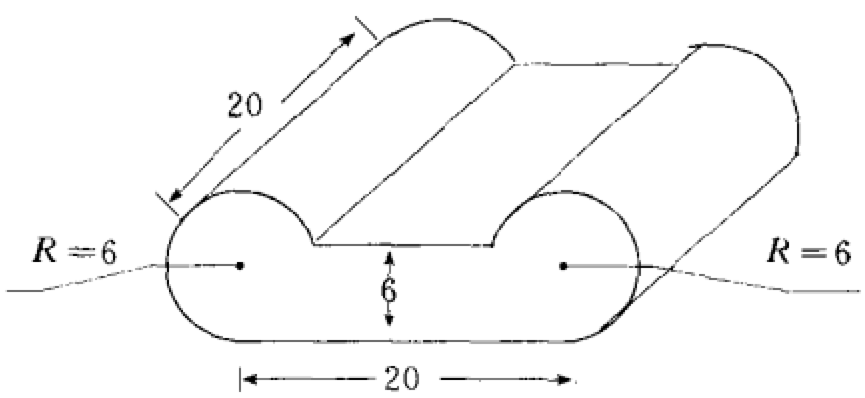
①如果以 BC 为底边，折成一个底面为正方形的长方体，加盖后其体积为 V_1；如果以 AB 为底边，同样折成一个长方体，其体积为 V_2，求 $V_1:V_2$.

②如果以 BC 为底边，把纸卷成一个圆柱，其体积

为 V_3;如果以 AB 为底边，把纸片卷成一个圆柱，其体积为 V_4,求 $V_3 : V_4$(取 $\pi = 3.14$).

③这四个不同形状的形体，加盖后其表面积之比又分别是多少（即求 $S_1 : S_2$ 和 $S_3 : S_4$)?

10. 一个几何体如下图，求它的表面积.



习题七解答

一、1. m 立方厘米；

2. 48π(平方厘米)；

3. 57π(平方厘米).

4. 1 厘米，$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ 立方厘米.

5. 设圆锥母线为 l 厘米，底面半径为 r 厘米，根据题意有 $\pi l = 2\pi r$. 故 $r = \frac{1}{2}l$, 又根据勾股定理有：

$$l^2 = (\frac{1}{2}l)^2 + 10^2$$

解得 $l^2 = \frac{400}{3}$.

$\therefore \quad S_{\text{圆锥侧}} = \frac{1}{2}\pi l^2 = \frac{1}{2}\pi \times \frac{400}{3} = \frac{200}{3}\pi$(平方厘米).

二、

题　号	1	2	3	4	5	6
答　案	B	B	A	B	D	B

三、

1. 设水下降 x 厘米，则 $\pi \times 10^2 \times x = \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 20$，

∴　$x = 5.4$(厘米).

2. 设这段钢材长为 x 厘米，则

$\pi \times 20^2 \times 3 = \pi \times 10^2 \times x$，∴　$x = 12$ 厘米.

3. 设 B 容器水深 h 厘米，则

$\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 10 = \pi \times 5^2 \times h$，

∴　$h = 4.8$ 厘米.

4. 因为底面半径为 3 厘米，高为 4 厘米，所以挖掉圆锥的母线长等于 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$（厘米），故它的表面积 $= \pi \times 3 \times 5 + 2\pi \times 3 \times 4 + \pi \times 3^2 = 48\pi$(平方厘米)，它的体积 $= \pi \times 3^2 \times 4 - \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = \frac{2}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 24\pi$(立方厘米).

5. 母线 $l = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$(厘米). $S_{侧} = \pi r l = \pi \times 40 \times 50 = 2000\pi = 3.14 \times 2000 = 6280$(平方厘米) $= 0.628$(平方米)，$0.628 \times 150 = 94.2$（克）.

6. 设圆台上底半径为 x 厘米，则 $\pi \times (x + 3x) \times 25 = 1000\pi$. 解得 $x = 10$(厘米)，故 $3x = 30$(厘米). 圆台的全面积等于：$1000\pi + \pi \times 10^2 + \pi \times 30^2 \approx 0.628$(平方米).

7. 把圆柱表面和导线一起展开在一个平面上，母线(9 厘米)，10 个重复的圆周(10×4 厘米)和导线(l 厘米)

构成一个直角三角形，因此，由勾股定理得 $l=\sqrt{9^2+40^2}=41$(厘米).

8. 管子的横截面的圆环面积为 $\pi\times(\frac{12^2}{2})=36\pi$(平方厘米)，则管子的体积为 $36\pi\times100=3600\pi$(立方厘米).

9. $\because\quad V_1=(\frac{4}{4})^2\times3=3$(立方厘米)，

$V_2=(\frac{3}{4})^2\times4=\frac{9}{4}$(立方厘米)，

$\therefore\quad V_1:V_2=4:3.$

$\because\quad S_1=4\times3+(\frac{4}{4})^2\times2=14,$

$S_2=4\times3+(\frac{3}{4})^2\times2=13\frac{1}{8},$

$\therefore\quad S_1:S_2=112:105.$

$\because\quad V_3=\pi\times(\frac{2}{\pi})^2\times3=\frac{12}{\pi},$

$V_4=\pi\times(\frac{3}{2\pi})^2\times4=\frac{9}{\pi},$

$\therefore\quad V_3:V_4=4:3,$

$\because\quad S_3=3\times4+2\times\pi\times(\frac{2}{\pi})^2=12+\frac{8}{\pi},$

$S_4=3\times4+2\times\pi\times(\frac{3}{2\pi})^2=12+\frac{9}{2\pi},$

$$\therefore\quad S_3:S_4=(12+\frac{8}{\pi}):(12+\frac{9}{2\pi})\approx14.5:13.4$$
$$=145:134.$$

10. 几何体的表面积：

$$S=4\times\frac{3}{4}\pi\times6^2+2\times\frac{3}{4}\times2\pi\times6\times20+2\times20\times6+20\times20+20\times8$$
$$=108\pi+360\pi+240+400+160=468\pi+800.$$

第8讲　应用同余解题

在五年级我们已初步学习了同余的有关知识. 同余在解答竞赛题中有着广泛的应用. 在这一讲中，我们将深入理解同余的概念和性质，悟出它的一些运用技巧和方法.

【例1】　a 除以5余1，b 除以5余4，如果 $3a>b$，那么 $3a-b$ 除以5余几?

分析　与余数有关的问题考虑用同余式可以使解题简便.

解：$\because$　$a\equiv 1 \pmod 5$，

$\therefore$　$3a\equiv 3 \pmod 5$，

或者 $3a\equiv 8 \pmod 5$.　　　　(1)

又$\because$　$b\equiv 4 \pmod 5$，　　　　(2)

$\therefore$ (1) − (2)得：

$3a-b\equiv 8-4\equiv 4 \pmod 5$.

因此，$3a-b$ 除以5余4.

【例2】　若 a 为自然数，证明 $10 \mid (a^{1985}-a^{1949})$.

分析　如果换一种方式表达，所要证明的即是要证 a^{1985} 与 a^{1949} 个位数字相同. 用对于模10两数同余来解，可以使解题过程简化.

证明：$\because a^{1985}=a^{4\times 496+1}\equiv a \pmod{10}$，

$a^{1949}=a^{4\times 487+1}\equiv a \pmod{10}$，

$\therefore$　$a^{1985}-a^{1949}\equiv a-a\equiv 0 \pmod{10}$.

即　$10\mid(a^{1985}-a^{1949})$.

说明：这里用到一个事实：对于任何自然数 a，a^5 与 a 的个位数字相同.

【例 3】　计算机录入员平均每分钟可以输入 72 个汉字，输入一篇有 $\overline{x679y}$ 个汉字的文章所用的分钟数恰好是整数，求五位数 $\overline{x679y}$.

分析　这道题实质是求一个能被 72 整除的五位数 $\overline{x679y}$.

解：∵　$72=8\times9$，又 $72\mid\overline{x679y}$,

由能被 8、9 整除的特征，得

$$\begin{cases}x+6+7+9+y\equiv0\pmod 9 & (1)\\ 700+90+y\equiv0\pmod 8. & (2)\end{cases}$$

由(2)得 $y\equiv2\pmod 8$

因 $0\leqslant y<9$ 且 y 是整数

∴　$y=2$.

把 $y=2$ 代入(1)得

$x+6+7+9+2\equiv0\pmod 9$

∴　$x\equiv3\pmod 9$.

由 x 是一位整数得：$x=3$.

∴　所求五位数是 36792.

【例 4】　$n=\underbrace{19191919\cdots1919}_{1919个1919}$，求 n 被 9 除后所得商的个位数是几?

分析　①设 $n\div9=$ 商 $\cdots r$，那么 $9\mid(n-r)$，根据 $n-r=$ 商 $\times9$，以及 $n-r$ 的个位数字，可推算出商的个位数字.

②抓住“一个整数与它的各位数字之和对于模 9 同

余”这性质，可以很快的化大数为小数.

解：∵　$n=\underbrace{19191919\cdots1919}_{1919个1919}\equiv1919\times(1+9+1+9)$

$\equiv1919\times20\equiv2\times2\equiv4\pmod 9$,

∴　$9\mid(n-4)$, 即 $n-4=9\times$商,

又∵　$n-4$ 的个位数字是 5,

∴　n 被 9 除所得的商的个位数字是 5.

【例 5】　设 $2n+1$ 是质数，证明：1^2，2^2，…，n^2 被 $2n+1$ 除所得的余数各不相同.

分析　这道题肯定不可能通过各数被 $2n+1$ 除去求余数. 那么我们可以考虑从反面入手，假设存在两个相同的余数的话，就会发生矛盾. 而中间的推导是步步有根据的，所以发生矛盾的原因是假设不合理. 从而说明假设不成立，因此原来的结论是正确的.

证明：假设有两个数 a、b, ($a\neq b$, 设 $b<a$, 且$1\leqslant a\leqslant n$, $1\leqslant b\leqslant n$), 它们的平方 a^2, b^2 被 $2n+1$ 除余数相同.

那么，由同余定义得　$a^2-b^2\equiv0\pmod{(2n+1)}$.

即　$(a+b)(a-b)\equiv0\pmod{(2n+1)}$, 由于 $2n+1$ 是质数.

∴　$a+b\equiv0\pmod{(2n+1)}$或 $a-b\equiv0\pmod{(2n+1)}$.

由于　$a+b$, $a-b$ 均小于 $2n+1$ 且大于零,

可知，$a+b$ 与 $2n+1$ 互质，$a-b$ 也与 $2n+1$ 互质.

即　$a+b$ 与 $a-b$ 都不能被 $2n+1$ 整除.

产生矛盾，∴　原题得证.

说明：这里用到一个重要的事实：如果 $A\cdot B\equiv0\pmod p$, p 是质数，那么 A 或 B 中至少有一个模 p 为零. p 是质数这一条件不能少，否则不能成立. 例如 $2\not\equiv0\pmod 6$, $3\not\equiv0\pmod 6$, 而 $2\times3\equiv0\pmod 6$.

【例 6】 已知：$a=\underbrace{19191919\cdots1919}_{1919\text{个}1919}$，

问：a 除以 13 所得余数是几？

解：用试除方法可知：$13|191919$.

$\because$ $1919\times2=3838$，而 $3|3837$，

$\therefore$ $13|\underbrace{1919\cdots1900}_{3837\text{个}19}$，

$a-\underbrace{1919\cdots1900}_{3837\text{个}19}=19$，

即 1919 个 "1919" 有 3838 个 "19"，三组三组取走 "19" 后还剩下一组.

$\therefore$ $a\equiv19\pmod{13}$.

$\therefore$ $a\equiv6\pmod{13}$.

即 a 除以 13 余数是 6.

【例 7】 求被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 5 的最小三位数.

解：设 x 为所求数，

由题意

$$\begin{cases}x\equiv2\pmod 3), & (1)\\ x\equiv3\pmod 5), & (2)\\ x\equiv5\pmod 7). & (3)\end{cases}$$

(3)即 $x=7k+5$（k 是整数）. 代入(2)得

$7k+5\equiv3\pmod 5$，

$\therefore$ $2k\equiv3\pmod 5$，

$2k\equiv8\pmod 5$.

$\therefore$ $k\equiv4\pmod 5$，即 $k=5m+4$（m 是整数）.

$\therefore$ $x=7k+5=7(5m+4)+5=35m+33$，

上式代入(1)得：

$35m+33\equiv2\pmod 3$，

$2m \equiv 2 \pmod 3$,

$\therefore$　$m \equiv 1 \pmod 3$, 即 $m = 3t + 1$ (t 是整数).

$\therefore$　$x = 35m + 33 = 35(3t + 1) + 33 = 105t + 68$,

当 $t = 1$ 时，$x = 173$.

$\therefore$　所求的最小三位数为 173.

【例 8】　给出 12 个彼此不同的两位数，证明：由它们中一定可以选出两个数，它们的差是两个相同数字组成的两位数.

分析　证这道题要考虑到以下三点.

①两位数的数码相同时，它一定能被 11 整除.

②遇到数是任意的，需排个序，这样讨论表述起来比较方便.

③用 12 个数中最大的数依次地分别减去其余 11 个数可得到 11 个差. 若差中有相同数码组成的两位数，问题得证；若差中没有合条件的两位数，这时这 11 个（差）数各自除以 11，所得余数只可能在 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ 中，必有两个差数的余数相同，考虑用余数造抽屉解题.

证明：设 12 个两位数从小到大排列为：

$10 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{11} < a_{12} \leqslant 99$,

用 a_{12} 分别减去其余的数，得差：

$b_1 = a_{12} - a_1, b_2 = a_{12} - a_2, \cdots, b_{11} = a_{12} - a_{11}$.

①若上面 11 个差中有某个差 b_i 能被 11 整除，即 $11 \mid (a_{12} - a_i)$, 那么已证出数 a_{12} 与 a_i 的差 b_i 是两个相同数码组成的两位数.

②若这 11 个差均不能被 11 整除，则按不能被 11 整除的余数造 10 个抽屉，余数相同者归入同一抽屉，根据抽屉原理，11 个差数中，一定存在两数 b_m、b_n 对于模 11

同余，即：$b_m - b_n \equiv 0 \pmod{11}$,

即　$(a_{12} - a_m) - (a_{12} - a_n) \equiv 0 \pmod{11}$,

即　$a_n - a_m \equiv 0 \pmod{11}$,

即　$11 \mid (a_n - a_m)$,

即差 $a_n - a_m$ 是一个由相同数码组成的两位数．综合(1)、(2) 问题得证．

说明：这道题的证明用到了将数按被 11 除的余数分类的思想．

一般地，任何一个整数 a 被自然数 n 除，余数只可能是 0，1，2，…，$n-1$ 这 n 种情况，这样我们可以利用余数将整数分为几类，如：整数按除以 2 余 1 还是 0，分为奇数和偶数．

又如，整数除以 3，余数只能是 0，1，2 这三种情况，我们可以把所有整数按除以 3 后的余数分三类，即 $3k, 3k+1, 3k+2$,（k 是整数）．

这种利用余数分类思想，是重要的数学思想方法，它可以使研究问题时搜索的范围大大缩小．

【例 9】　试证不小于 5 的质数的平方与 1 的差必能被 24 整除．

证明：∵　质数中仅有一个偶数 2，

∴　不小于 5 的质数是奇数．

又不小于 5 的自然数按除以 6 所得的余数可分为 6 类：$6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5$,（$n$ 是自然数），

其中 $6n, 6n+2, 6n+4$ 都是偶数，又 $3 \mid 6n+3$.

∴　不小于 5 的质数只可能是 $6n+1, 6n+5$.

又自然数除以 6 余数是 5 的这类数换一记法是：$6n-1$,

$\therefore$　(不小于 5 的质数$)^2-1=(6n\pm1)^2-1$

$=36n^2\pm12n=12n(3n\pm1)$,

这里 n 与$(3n\pm1)$奇偶性不同，其中定有一个偶数，

$\therefore$　$2\mid n(3n\pm1)$,

$\therefore$　$24\mid12n(3n\pm1)$.

$\therefore$结论成立.

说明：按同余类造抽屉是解竞赛题的常用方法.

【例 10】　任给七个不同的整数，证明其中必有两个数，其和或差是 10 的倍数.

分析　首先考虑什么样的两个整数的和或差可以被 10 整除. 设两个整数 a、b, 若 $a\equiv b\pmod{10}$, 则 $10\mid(a-b)$; 若 $a\equiv r\pmod{10}$, 而 $b\equiv10-r\pmod{10}$, 则 $10\mid(a+b)$, 只有这两种情况. 但是如果按整数除以 10 的余数造抽屉，就有十个抽屉，对于已知条件中给定的七个数无法应用抽屉原理，所以要考虑如何造六个抽屉. 根据首先考虑的两个整数被 10 除的两种情况，可以把余数之和等于 10 的并成一类，这样分为：$10k$、$10k\pm1$、$10k\pm2$、$10k\pm3$、$10k\pm4$、$10k\pm5$ 六类，恰好构造六个抽屉，再应用抽屉原理可解此题.

证明：根据整数 $n\equiv r\pmod{10}$构造六个抽屉如下：

$r=0$ 的数；$r=5$ 的数；$r=1$ 或 9 的数；$r=2$ 或 8 的数；$r=3$ 或 7 的数；$r=4$ 或 6 的数.

这样任给定的七个整数按照除以 10 的余数 r, 放入六个抽屉中，必有一个抽屉中至少有两个数. 这两数的和或差必是 10 的倍数.

习 题 八

1. 甲、乙两校联合组织学生乘车去春游，每辆车可以乘 36 人，两校各自坐满若干辆车后，甲校余下的 13 人与乙校余下的人恰好又坐满一辆车．春游中甲校的每位同学分别与乙校的每位同学合一张影留念．如果每卷胶卷可拍 36 张照片，问：拍完最后一张照片后，相机里的胶卷还可以拍几张？（提示：这题相当于：甲数除以 36 余 13，乙数除以 36 余 23，若甲、乙之积除以 36 的余数为 r，求 $36-r=?$）．

2. 求 $1993^{1994}\div 7$ 的余数．

3. 求证：$3^{2000}+4^{1993}\equiv 0\pmod 5$．

4. 能被 33 整除的六位数 $\overline{19x91y}$ 有多少个？

5. 求满足除以 5 余 2，除以 7 余 4，除以 11 余 3 的最小三位数．

6. 70 个数排成一行，除了两头的两个数以外，每个数的三倍恰好等于它两边两个数的和．这一行最左边的几个数是：0，1，3，8，21，…．问最右边的一个数被 6 除的余数是几？（提示：计算数列的各项除以 6 的余数，找规律）

7. 任意选出 6 个不同的自然数，证明其中总有两个数，它们的差是 5 的倍数．

习题八解答

1. 25 张.

2. 解：∵　$1993 \equiv 5 \pmod 7$;

∴　$1993^{1994} \equiv 5^{1994} \pmod 7$.

列表：

5^n	5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8
5^n 除以 7 的余数	5	4	6	2	3	1	5	4

由上表可知 $5^n \div 7$ 的余数以 6 为周期循环，

∵　$1994 \equiv 2 \pmod 6$,

∴　$1993^{1994} \equiv 5^{1994} \equiv 5^2 \equiv 4 \pmod 7$,

即　1993^{1994}除以 7 的余数是 4.

3. 证明：∵　$3^2 \equiv 4 \pmod 5$, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$,

$4^4 \equiv 1 \pmod 5$.

而　$2000 = 4 \times 500$，　$1993 = 4 \times 498 + 1$,

∴　$3^{2000} = (3^4)^{500} \equiv 1^{500} \equiv 1 \pmod 5$,

$4^{1993} = (4^4)^{498} \times 4 \equiv 1^{498} \times 4 \equiv 4 \pmod 5$,

∴　$3^{2000} + 4^{1993} \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$.

4. 三个：196911，199914，192918.

5. 解法同例 7，所求数为 102.

6. 4.

7. 把自然数按被 5 除的余数分为五类，构成五个抽屉. 则根据抽屉原理可证至少有一个抽屉里至少有选定的 6 个自然数中的 2 个数，而同抽屉中的两个数之差显然是 5 的倍数.

第9讲　二进制小数

我们曾经学了二进制以及八，十六及各种进制的整数，以及它们的加减乘除四则运算．大家必然会提问：与十进制分数、小数类似的二进制分数、小数，如何推广过来？

一个二进制分数，就是$\frac{a}{b}$, a 是二进制整数，$b\neq0$ 也是二进制整数．

一个二进制小数，不妨先讲纯小数：$0<n<1$，

$n=0.b_1b_2b_3\cdots b_i\cdots$，每个 b_i 或为 0，或为 1．（b_i 不全为 0，也不全为 1)．

b_1 所在的位称为$\frac{1}{2}$分位；

b_2：$\frac{1}{2^2}$分位；

b_3：$\frac{1}{2^3}$分位；

……

b_i：$\frac{1}{2^i}$分位．（类似于十进制小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$，a_1 为$\frac{1}{10}$分位，a_2 为$\frac{1}{10^2}$分位，…）．

二进制小数的运算也和十进制小数运算相类似，差别在于这里是“逢二进一”，“退一还二”．

十进制小数化为二进制小数，主要通过分数作中间媒介．

【例】　将 $(0.3)_{10}$化为二进制小数．(用$(a)_k$ 表示 k 进位数)．

$$(0.3)_{10}=\frac{3}{10}=\frac{(11)_2}{(1010)_2}$$

$$\begin{array}{r} 0.01001 \\ 1010\overline{)1100} \\ 1010 \\ \hline 10000 \\ 1010 \\ \hline 1100\text{(形成循环)} \end{array}$$

$$=(0.0100110011001\cdots)_2$$

$$=(0.0\dot{1}00\dot{1})_2$$

这表示十进制有限小数可能化成二进制循环小数．

本节重点讲二进制循环小数如何化为二进制分数．回忆十进制循环小数化分数，一是要学习推理中的思想方法，二是最好归纳成一个易用易记的公式．

十进制循环小数化分数一般公式：

①纯循环小数：$(0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k)_{10}=\dfrac{\overline{a_1a_2\cdots a_k}}{\underbrace{99\cdots9}_{k\text{个}}}$

②混循环小数：$(0.x_1x_2\cdots x_s\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k)$

$=\dfrac{\overline{x_1\cdots x_sa_1\cdots a_k}-\overline{x_1\cdots x_s}}{\underbrace{99\cdots9}_{k\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{s\text{个}}}$；这些公式的推导过程如下，请体会思想方法．

设 $S=(0.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_k)_{10}$．第一步：在此等式的两边乘 10^k，右边相当于小数点右移 k 位，得 $10^kS=\overline{a_1a_2\cdots a_k}.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k$；第二步：两个等式左右两边分别相减，左边为 10^kS-S，右边为$\overline{a_1a_2\cdots a_k}$(巧妙在于差值很整齐，消去了让人“害怕”的无限长（虽然是循环)的小数)：

$S(10^k-1)=\overline{a_1a_2\cdots a_k}\Rightarrow S=\dfrac{\overline{a_1a_2\cdots a_k}}{\underbrace{99\cdots9}_{k\text{个}}}$．公式①证得．

至于混循环，只要借用已证得的公式①，因为

$$(0.x_1x_2\cdots x_s\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k)_{10}$$

$$=\frac{(\overline{x_1x_2\cdots x_s}.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_k}{10^s}\text{(分子小数点右移 } s \text{ 位)}$$

$$=\frac{1}{10^s}\left(\overline{x_1\cdots x_s}+\frac{\overline{a_1a_2\cdots a_k}}{\underbrace{99\cdots9}_{k\text{个}}}\right)$$

$$=\frac{1}{10^s}\left(\frac{(1\overbrace{00\cdots0}^{k\text{个}0}-1)\times\overline{x_1\cdots x_s}}{\underbrace{99\cdots9}_{k\text{个}}}+\frac{\overline{a_1a_2\cdots a_k}}{\underbrace{99\cdots9}_{k\text{个}}}\right)$$

$$=\frac{1}{10^s}\left(\frac{\overline{x_1x_2\cdots x_s}\times100\cdots0+\overline{a_1a_2\cdots a_k}-\overline{x_1x_2\cdots x_s}}{\underbrace{99\cdots9}_{k\text{个}}}\right)$$

$$=\frac{\overline{x_1\cdots x_sa_1\cdots a_k}-\overline{x_1x_2\cdots x_s}}{\underbrace{99\cdots9}_{k\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{s\text{个}}}$$

其实公式②中，当 $s=0$ 时，就是公式①，复杂的公式②是借用简单情况下的公式①推来．推出后①包含在②之中．

对于二进制循环小数化二进制分数，也可同样推导．

设 $S=(0.\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_k)_2$．第一步：两边乘 2^k，右边相当于小数点右移 k 位，得 $2^kS=\overline{b_1b_2\cdots b_k}.\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_k$．第二步：两个等式左右两边分别相减，左边为 2^kS-S；右边为 $\overline{b_1b_2\cdots b_k}$，恰为整数，消去了无限长的部分，有：

$$S(2^k-1)=\overline{b_1b_2\cdots b_k}\Rightarrow S=\frac{\overline{b_1b_2\cdots b_k}}{\underbrace{11\cdots1}_{k\text{个}}}. \quad (1)$$

至于二进制混循环小数：也记这小数的整体为 S．

$$S=(0.x_1x_2\cdots x_s\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_k)_2,$$

则有 $S=\frac{1}{2^s}(\overline{x_1x_2\cdots x_s}.\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_k)_2$

$$=\frac{1}{2^s}\left(\overline{x_1x_2\cdots x_s}+\frac{\overline{b_1b_2\cdots b_k}}{\underbrace{11\cdots1}_{k个}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^s}\left(\overline{x_1x_2\cdots x_s}\times\frac{2^k-1}{2^k-1}+\frac{\overline{b_1b_2\cdots b_k}}{\underbrace{11\cdots1}_{k个}}\right)$$

$$=\frac{\overline{x_1x_2\cdots x_sb_1b_2\cdots b_k}-\overline{x_1x_2\cdots x_s}}{\underbrace{11\cdots1}_{k个}\underbrace{00\cdots0}_{s个}}. \qquad (2)$$

从推导和记忆规则看，公式(1)和(2)与十进制公式①和②相仿．那么读者一定会归纳出任意进制的循环小数化分数的公式．

【例 1】 化 $(0.\dot{0}0\dot{1})_2$ 为二进制分数，十进制分数．

解：用公式（1）

$$(0.\dot{0}0\dot{1})_2=\left(\frac{1}{111}\right)_2=\left(\frac{1}{7}\right)_{10}.$$

【例 2】 化 $(0.0\dot{7}1428\dot{5})_{10}$ 与 $(0.\dot{0}10\dot{1})_2$ 为十进制分数．

解：
$$(0.0\dot{7}1428\dot{5})_{10}=\frac{714285-0}{9999990}$$
$$=\frac{714285-0}{9999990}=\frac{5}{7}\times\frac{1}{10}$$
$$=\left(\frac{1}{14}\right)_{10},$$
$$(0.\dot{0}10\dot{1})_2=\left(\frac{101-0}{1110}\right)_2$$
$$=\left(\frac{5}{14}\right)_{10}.$$

【例 3】 化 $(0.1001\dot{1}101\dot{1})_2$ 为二进制分数．

解：由公式（2）

$$
\begin{aligned}
(0.1001\dot{1}101\dot{1})_2 &= \frac{100111011-1001}{111110000}\\
&= \frac{100110010}{111110000}=\frac{10011001}{11111000}.
\end{aligned}
$$

直接检验

```
                 0.100111011
11111 )10011.001
        1111 1
          11 1010
       -) 1  1111
       →  1  10110
         -)   11111
              101110
           -)  11111
                111100
             -)  11111
                 111010
              -)  11111
               →  110110 （形成循环）
```

现在再看推导公式的方法，关键是把循环小数的值设为 S，好比列方程设未知数，而 10^kS-S 恰好消去了“烫手”的无限长的小数部分，推出“方程” $S(10^k-1)=\overline{a_1a_2\cdots a_k}$，立刻求解出 S.

这样的思想，在研究等比数列时也用到了．以前讲过有限项数列：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_i,\cdots,a_n$. 所谓等比数列，即它每一项都是前一项乘上一公共值 q，也即：

$$a_1,a_2=a_1q,a_3=a_2q,\cdots,a_i=a_{i-1}q,\cdots,a_n=a_{n-1}q,$$

或

$$a_1,a_2=a_1q,a_3=a_1q^2,\cdots,a_i=a_1q^{i-1},\cdots,a_n=a_1q^{n-1}.$$

现在要求出 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_i+\cdots+a_n$.

思想方法：第一步：

设 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$.

上式两边乘上 q，作为第二步：

$qS=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n$.

当 $q<1$ 时，用上式两边减下式两边，得到

$S-qS=a_1-a_1q^n$,

即有　　$S=\dfrac{a_1-a_1q^n}{1-q}\quad(q<1)$　　　　　　(3)

公式(3)称为公比小于 1 的等比级数前 n 项求和公式. 它叙述为：前 n 项和等于首项与首项乘公比的 n 次幂的差除以 1 与公比之差.

类似地可推导出：当 $q>1$ 时，

$$S=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}(q>1).\ (4)$$

【例 4】　$\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{14}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{28}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{56}\times\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\frac{1}{112}=S$$

用公式(3)，$q=\dfrac{1}{2},a_1=\dfrac{1}{7},n=5$.

$$S=\frac{\frac{1}{7}(1-(\frac{1}{2})^5)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2\ (2^5-1)}{7\cdot2^5}=\frac{31}{112}.$$

最后以一个很精彩的例来结束本节（本例选自美国 1993 年第四十四届高中数学竞赛第 30 题. 虽是高中竞赛题，但本讲知识可解此题）

【例 5】　x_0 是任意取定的数，满足 $0\leqslant x_0<1$，对于所有的自然数 n，x_n 由下述递推的关系式确定：

$$x_n=\begin{cases}2x_{n-1} & \text{当}\quad 2x_{n-1}<1\text{ 时},\\ 2x_{n-1}-1 & \text{当}\quad 2x_{n-1}\geqslant1\text{ 时}.\end{cases}$$

求使得 $x_0=x_5$ 的 x_0 的个数.

分析　所谓递推关系式，就是一旦给定了一个初始

值 x_0，例如取 $x_0=\frac{4}{7}$，就可由 x_0 推算出 $x_1=\frac{1}{7}$；由 x_1 得 $x_2=\frac{2}{7}$，…直到任意的 x_n.（当 $x_0=\frac{4}{7}$，$2x_0=\frac{8}{7}>1$，由规定，

$\because\quad 2x_0\geqslant 1$，$\therefore\quad x_1=2x_0-1=\frac{8}{7}-1=\frac{1}{7}$，

$\because\quad 2x_1=\frac{2}{7}<1$，$\therefore x_2=\frac{2}{7}$.

再由 x_2 推 x_3.同样 $\because\quad 2x_2=\frac{4}{7}<1$，$\therefore\quad x_3=\frac{4}{7}$.

把这过程排出：

$$x_0=\frac{4}{7},x_1=\frac{1}{7},x_2=\frac{2}{7},x_3=\frac{4}{7},x_4=\frac{1}{7},x_5=\frac{2}{7}.$$

总之，后项取决于前项的 2 倍值，当前项 2 倍值大于 1 时，就取该值；不小于 1 时（决不会超过 2）就取它与 1 的差值.）

如果我们设 x_0 是一个二进制小数，即设

$x_0=(0.d_1d_2d_3\cdots)_2$，那么

$2x_0=(10)_2\times(0.d_1d_2d_3\cdots)_2=(d_1.d_2d_3d_4\cdots)_2$，

即 $2x_0$ 只是把 x_0 的二进制表示中的小数点向右移一位.因此 $2x_0<1$ 相当于 $d_1=0$，$2x_0\geqslant 1$ 相当于 $d_1=1$；那么按递推关系式的规定，x_1 变得特别简明：

$x_1=(0.d_2d_3d_4d_5\cdots)_2$.

因为如果 $d_1=0$，即 $2x_0<1$，则 $x_1=2x_0=(0.d_2d_3d_4\cdots)_2$；如果 $d_1=1$，即 $2x_0\geqslant 1$，则 $x_1=2x_0-1=(1.d_2d_3d_4\cdots)_2-1=(0.d_2d_3d_4\cdots)_2$，同样的规律，在由 x_i 求 x_{i+1} 时也成立，$i=1,2,\cdots$，即

$x_2=(0.d_3d_4d_5d_6\cdots)_2$；　　$x_3=(0.d_4d_5d_6\cdots)_2$；

$x_4=(0.d_5d_6d_7\cdots)_2$；　　$x_5=(0.d_6d_7d_8\cdots)_2$；

按条件应有 $x_0=x_5$，即：

$(0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8d_9d_{10}\cdots)_2=(0.d_6d_7d_8d_9d_{10}d_{11}d_{12}d_{13}\cdots)_2$,

这相当于 x_0 是循环节为 5 的二进制纯循环小数，即

$x_0=(0.\dot{d}_1d_2d_3d_4\dot{d}_5)_2$.

由于每一个 d_i 的值，只有 0，1 两种可能，所以：

x_0 有 $2^5=32$ 个可能值，它们依小到大排成：

$0=0.\dot{0}000\dot{0}$，$0.\dot{0}000\dot{1}$，$0.\dot{0}001\dot{0}$，$0.\dot{0}001\dot{1}$，…，$0.\dot{1}111\dot{0}$，$0.\dot{1}1111\dot{1}=1$.

但别忘了题设限定 $0\leqslant x_0<1$，x_0 小于 1，而由公式(1)知循环小数 $0.\dot{1}1111\dot{1}$ 等于 1，所以真正符合要求的值有 31 个.

习　题　九

1. 请你写出把三进制循环小数化为分数的公式：

$(0.\dot{d}_1d_2\cdots\dot{d}_k)_3=$ ________；

$(0.x_1x_2\cdots x_s\dot{d}_1d_2\cdots\dot{d}_k)_3=$ ________.

2. 把下列十进制小数化二进制小数.

$(0.1)_{10}$　　　　$(0.01)_{10}$

3. 把下面各循环小数化为分数，注意进制，并请把 4 个数由小到大排序.

$(0.\dot{1}0\dot{1})_2$　　　　$(0.\dot{1}0\dot{1})_3$

$(0.\dot{1}0\dot{1})_8$　　　　$(0.\dot{1}0\dot{1})_{10}$

4. 循环小数化十进制分数：

$(10.1\dot{1}0\dot{1})_2$，$(10.2\dot{9}\dot{6})_{10}$，$(1.7\dot{3}\dot{2})_8$

5．求和：$3^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2+3^4+\left(\frac{1}{3}\right)^3+3^5+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5$.

6．仿例 5，设 x_0 是 $0\leqslant x_0<1$ 的数，并对所有自然数 n 有递推式：

$$x_n=\begin{cases}3x_{n-1} & 当\ 3x_n<1\\ 3x_{n-1}-[3x_{n-1}] & 当\ 3x_{n-1}\geqslant 1\ 时.\end{cases}$$

求使得 $x_0=x_3$ 的 x_0 的所有可能值（用三进制求解），并把最小的和最大的非零数化十进制数验证．这里〔x〕表示取 x 的下整数．即不超过 x 的最大整数．

7．同本讲最后一例中各条件，$0\leqslant x_0<1$，递推式

$$x_n=\begin{cases}2x_{n-1} & 当\ 2x_{n-1}<1\ 时，\\ 2x_{n-1}-1 & 当\ 2x_{n-1}\geqslant 1\ 时，\end{cases}$$

（n 为自然数）．改动为：求使 $x_0=x_3$ 的所有十进制的 x_0 值．

习题九解答

1．$(0.\dot{d}_1\cdots\dot{d}_k)_3=\dfrac{\overline{d_1d_2\cdots d_k}}{\underbrace{22\cdots2}_{k个}}$，

$$(0.x_1x_2\cdots x_s\dot{d}_1d_2\cdots\dot{d}_k)_3=\frac{\overline{x_1x_2\cdots x_sd_1d_2\cdots d_k}-\overline{x_1x_2\cdots x_s}}{\underbrace{22\cdots2}_{k个}\underbrace{00\cdots0}_{s个}}.$$

2．解答 $\left(\frac{1}{10}\right)_{10}=\left(\frac{1}{1010}\right)_2=(0.00011001100\cdots)_2$

$=(0.0\dot{0}01\dot{1})_2$，

```
            0 .00011001
1010) 1  0000
         1010
        ------
          1100
          1010
         ------
           10000 （循环）
```

$$(0.01)_{10}=\left(\frac{1}{100}\right)_{10}=\left(\frac{1}{1100100}\right)_2=\left(\frac{1}{100}\times\frac{1}{11001}\right)_2$$

```
              0 .00001010001111010111
11001) 1  00000
          11001
         -------
           11100
           11001
          -------
              110000
               11001
              -------
               101110
                11001
               -------
                101010
                 11001
                -------
                 100010
                  11001
                 -------
                  100100
                   11001
                  -------
                   101100
                    11001
                   -------
                    100110
                     11001
                    -------
                      11010
                      11001
                     -------
                          1 （形成循环）
```

得到一个循环节有 20 位长的循环小数：

$\left(\frac{1}{100}\right)_{10}=(0.00\dot{0}000101000111101011\dot{1})_2$

3．解：$(0.\dot{1}0\dot{1})_2=\left(\frac{101}{111}\right)_2=\left(\frac{5}{7}\right)_{10}$，

$(0.\dot{1}0\dot{1})_3=\left(\frac{101}{222}\right)_3=\left(\frac{10}{26}\right)_{10}=\left(\frac{5}{13}\right)_{10}$，

$(0.\dot{1}0\dot{1})_8 = (\frac{101}{777})_8 = (\frac{65}{511})_{10}$,

$(0.\dot{1}0\dot{1})_{10} = \left(\frac{101}{999}\right)_{10}$.

显然 $\frac{101}{999} < \frac{65}{511} < \frac{5}{13} < \frac{5}{7}$.

∴ 从小到大排为：$(0.\dot{1}0\dot{1})_{10} < (0.\dot{1}0\dot{1})_8 < (0.\dot{1}0\dot{1})_3 < (0.\dot{1}0\dot{1})_2$.

4. $(10.1\dot{1}0\dot{1})_2 = (10)_2 + (0.1\dot{1}0\dot{1})_2$

$= (10)_2 + (\frac{1101-1}{1110})_2 = 2 + \frac{12}{14} = 2\frac{6}{7}$;

$(10.2\dot{9}\dot{6})_{10} = 10.2 + 0.0\dot{9}\dot{6} = 10.2 + 0.1 \times \frac{96}{99}$

$= 10 + \frac{2}{10} + \frac{32}{10 \times 33} = 10 + \frac{49}{165} = 10\frac{49}{165}$;

$(1.\dot{7}3\dot{2})_8 = 1 + (\frac{732-7}{770})_8 = 1 + (\frac{723}{770})_8$

$= 1 + \frac{467}{504} = 1\frac{467}{504}$.

5. 原式 $= 3^3(1+3+3^2) + (\frac{1}{3})^2(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3})$

（用等比级数求和公式）

$$= 3^3 (\frac{3^3-1}{3-1}) + (\frac{1}{3})^2 \frac{1-(\frac{1}{3})^4}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 27 \times 13 + \frac{40}{81 \times 3} = 351\frac{40}{243}.$$

6. 分析 取三进制方式标记 x_0，设 $x_0 = (0.a_1a_2a_3\cdots)_3$，那么，由递推式规定：

$x_1 = (0.a_2a_3a_4\cdots)_3$,

$x_2 = (0.a_3a_4a_5\cdots)_3$

$x_3 = (0.a_4a_5a_6\cdots)_3$

$x_0=x_3 \Leftrightarrow (0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots)_3=(0.a_4a_5a_6a_7a_8a_9\cdots)_3$

$\Leftrightarrow x_0=(0.\dot{a}_1a_2\dot{a}_3)_3, x_0=0, (0.\dot{0}0\dot{1})_3, (0.\dot{0}0\dot{2})_3,$ $(0.\dot{0}1\dot{0})_3, (0.\dot{0}1\dot{1})_3, (0.\dot{0}1\dot{2})_3, \cdots (0.\dot{1}0\dot{0})_3; (0.\dot{1}0\dot{1})_3, \cdots,$ $(0\dot{2}0\dot{0})_3; (0.\dot{2}0\dot{1})_3, \cdots, (0.\dot{2}2\dot{1})$;(因 $0.\dot{2}2\dot{2}=1$ 舍去).

由于循环节有 3 个数位,每位 3 种状态,共 $27-1=26$ 个数,化成十进制数是 $0,\frac{1}{26},\frac{2}{26},\cdots,\frac{25}{26}$.

最小:$(0.\dot{0}0\dot{1})_3=(\frac{1}{222})_3=\frac{1}{26}=x_0$,　　$x_1=\frac{3}{26}, x_2=\frac{9}{26}$,

$x_3=\frac{27}{26}-1=\frac{1}{26}=x_0$.

最大:$(0.\dot{2}2\dot{1})_3=(\frac{221}{222})_3=\frac{25}{26}=x_0$,　$x_1=\frac{75-26-26}{26}=\frac{23}{26}$,

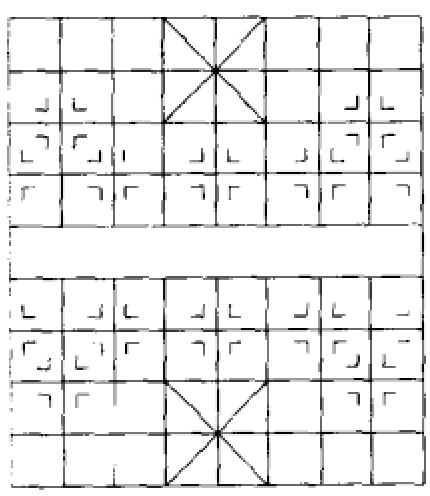
$x_2=\frac{69-52}{26}=\frac{17}{26}$,　　$x_3=\frac{51-26}{26}=\frac{25}{26}=x_0$.

7. 方法同例5.答 $x_0=0,\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}$,共 7 个数.

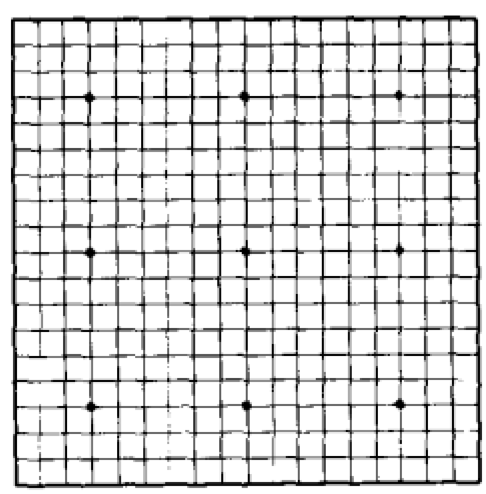
第10讲 棋盘中的数学（一）

——什么是棋盘中的数学

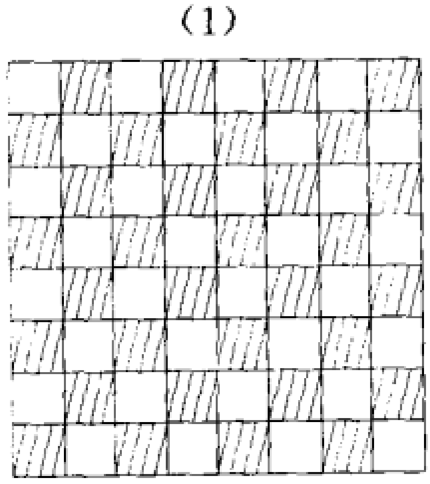
所谓棋盘，常见的有中国象棋棋盘（下图（1）），围棋盘（下图（2）），还有国际象棋棋盘（下图（3））．以这些棋盘为背景而提出的问题统称为棋盘问题．这里面与数学推理、计算相关的棋盘问题，就叫做棋盘中的数学问题．解决棋盘中的数学问题所使用的数学知识，统称棋盘中的数学．



（1）



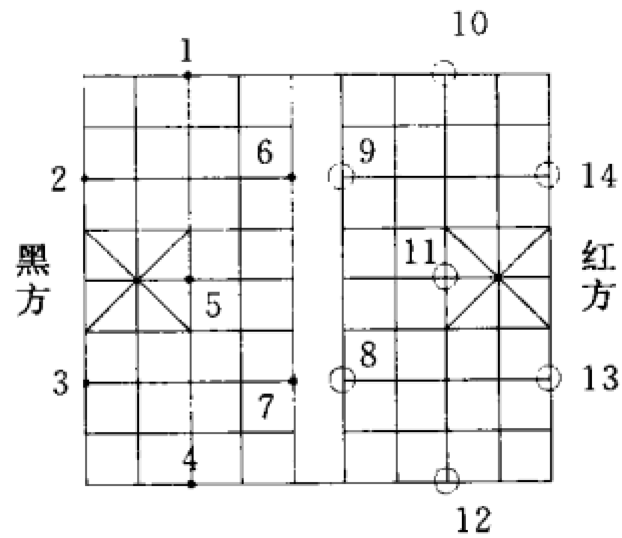
（2）



（3）

作为开篇我们先解几道竞赛中的棋盘问题.

【例 1】 这是一个中国象棋盘，（右图中小方格都是相等的正方形，“界河”的宽等于小正方形边长）. 黑方有一个“象”，它只能在 1，2，3，4，5，6，7 位置中的一个，红方有两个“相”，它们只能在 8，9，10，11，12，13，14 中的两个位置.



问：这三个棋子（一个黑“象”和两个红“相”）各在什么位置时，以这三个棋子为顶点构成的三角形的面积最大？

解：我们设每个小方格的边长为 1 单位. 则小方格正方形面积为 1 平方单位.

由于三个顶点都在长方形边上的三角形面积至多为这个长方形面积的一半. 所以要比较三角形面积的大小，只要比较三角形的三个顶点所在边的外接长方形面积的大小就可见端倪.

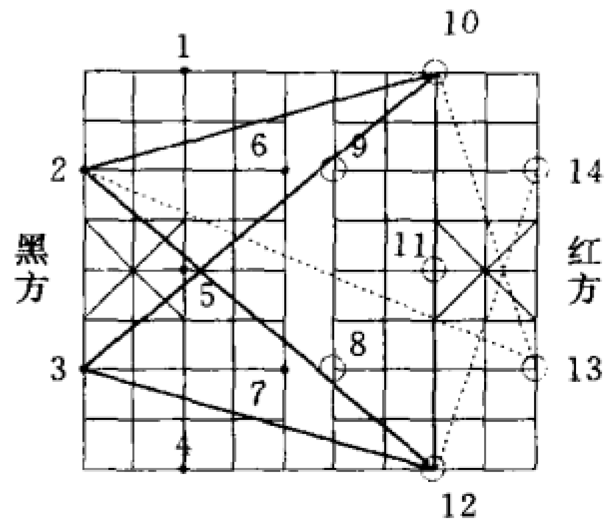
直观可见，只须比较（3，10，12）或（2，10，12）与（3，10，13）或（2，12，14）这两类三角形面积就可以了.

顶点为（3，10，12）或（2，10，12）的三角形面积为：$\frac{1}{2}\times 8\times 7=28$.

顶点为（3，10，13）或（2，12，14）的三角形面积等于：$\frac{1}{2}\times 9\times 6=27$.

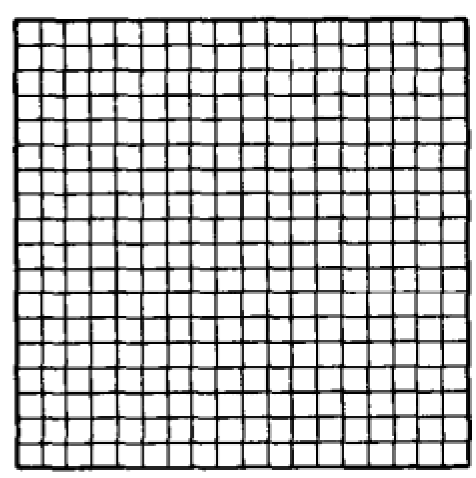
所以顶点在（2，10，12）或（3，10，12）时三角形面积最大.

答：黑“象”在2或3的位置，两个红“相”分别在10，12的位置时，以这三个棋子为顶点的三角形（2，10，12）或（3，10，12）的面积最大，如右图所示.



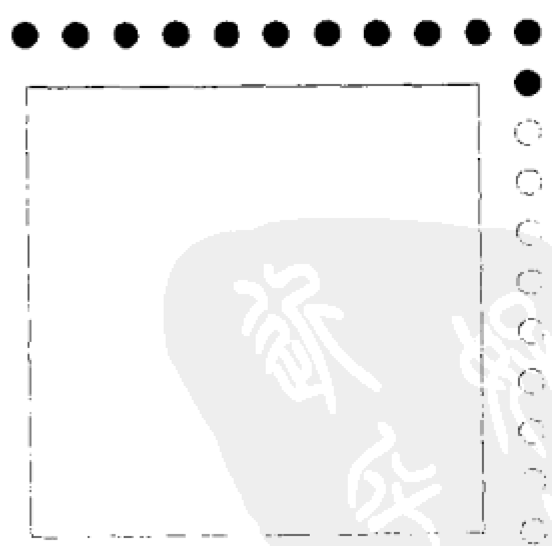
说明：本题是以棋盘格点为基础组成图形计算面积．其实，这类问题所在多有，我们把 $m\times n$ 的方格阵称为广义棋盘，则可以设计出许多这类的问题.

【例 2】 右图是一个围棋盘，另有一堆围棋子，将这堆棋子往棋盘上放，当按格点摆成某个正方阵时，尚多余12枚棋子，如果要将这个正方阵改摆成每边各加一枚棋子的正方阵，则差9枚棋子才能摆满.



问：这堆棋子原有多少枚?

解：第一次排方阵剩余12枚，加上第二次排方阵所不足的9枚，恰是原正方阵扩大后“贴边”的部分（如右图所示），共21枚，它恰是原正方阵每边棋子数与“扩阵”每边棋子数之和．恰是两个相邻自然数之和，所以原正方阵每边10枚棋子，新正方阵每边



11 枚棋子．这堆棋子总数是

$10^2+12=112$ 枚．

答：这堆棋子原有 112 枚．

说明：本题也可以列方程求解．

设原正方阵每边 m 枚棋子，由题意得：

$(m+1)^2-9=m^2+12$．

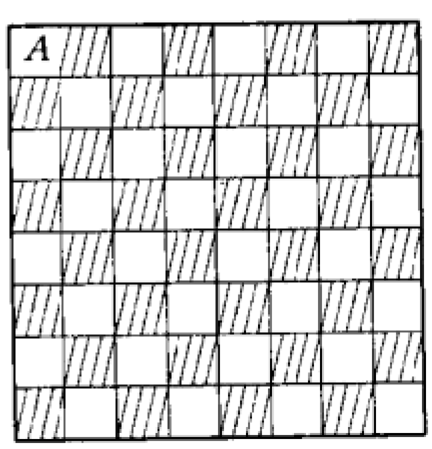
即　$2m+1=21$，

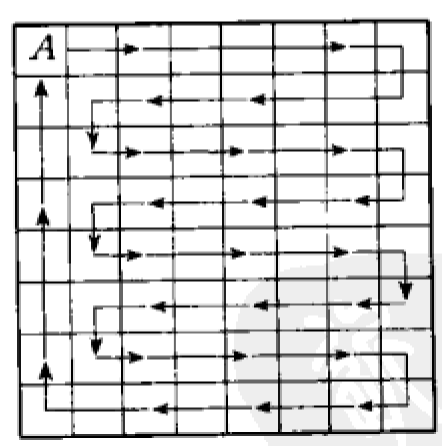
解得　$m=10$．

所以棋子总数为 $10^2+12=112$ 枚．

本题与围棋盘并无本质联系，问题可改述为“一堆棋子若摆成一个实心方阵，剩余 12 粒棋子，若改摆每边各加一枚的方阵，则差 9 枚棋子，问这堆棋子原有多少枚？”应用围棋盘显得更加直观、具体．

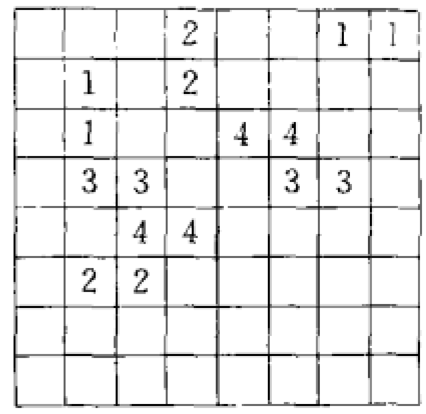
【例 3】　如下左图是一个国际象棋棋盘，A 处有只蚂蚁，蚂蚁只能由黑格进入白格再由白格进入黑格这样黑白交替地行走，已经走过的格子不能第二次进入．请问，蚂蚁能否从 A 出发，经过每个格子最后返回到 A 处？若能，请你设计一种路线，若不能，请你说明理由．





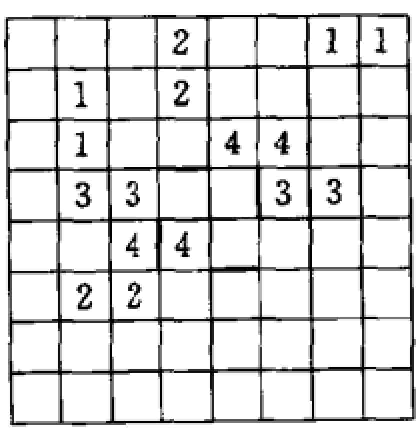
解：这种爬行路线是存在的．具体的设计一条，如右图所示．

【例 4】 在 8×8 的方格棋盘中，如下页图所示，填上了一些数字 1，2，3，4. 试将这个棋盘分成大小和形状都相同的四块，并且每块中都恰有 1、2、3、4 四个数字.

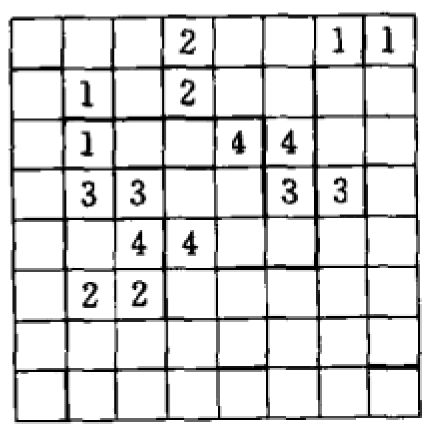


分析 注意这个正方形的面积是 8×8=64 个平方单位，因此切分后的每一块的面积为 16 个平方单位，即由 16 个小方格组成.

解：①将两个并列在一起的“4”分开，先画出这段划分线，并将它分别绕中心旋转 90°，180°和 270°，得到另外三段划分线，如下图（1）所示.

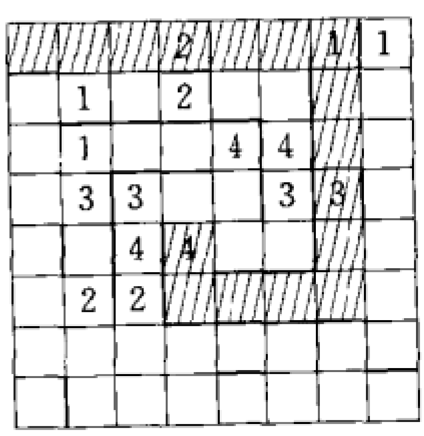


（1）

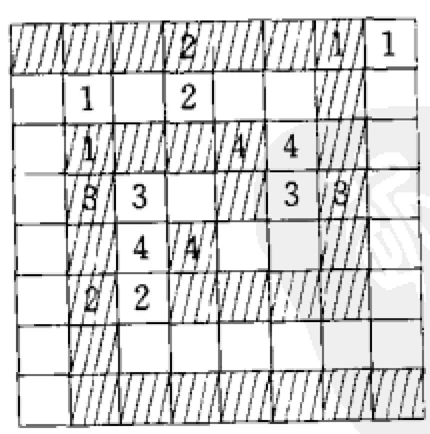


（2）

②仿照上述方法，画出所有这样的划分线，如上图（2）所示.



（3）



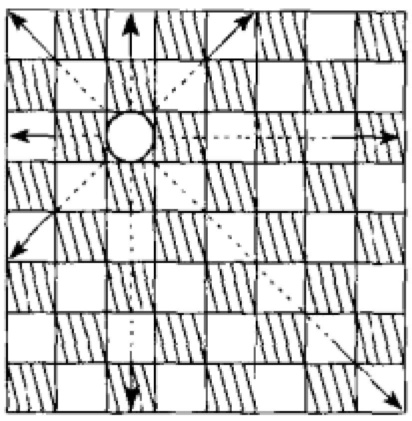
（4）

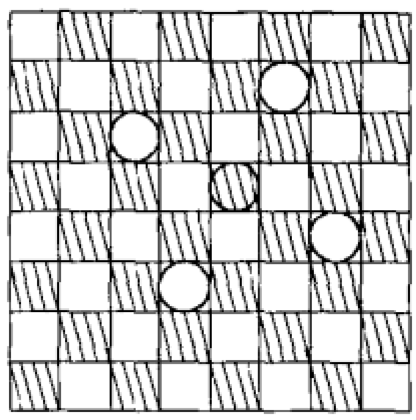
③从最里层开始，沿着画出的划分线作设想分块，如上图（3），这个分块中要含 1，2，3，4 各一个，且恰为 16 块小方格．

④将上面的阴影部分绕中心旋转 180°，可以得到符合条件的另一块，空白部分的两块也符合条件，所求的划分如上页图（4）所示．

【例 5】 国际象棋的棋盘有 64 个方格，有一种威力很大的棋子叫“皇后”，当它放在某格上时，它能吃掉此格所在的斜线和直线上对方的棋子，如下左图上虚线所示．如果有五个“皇后”放在棋盘上，就能把整个棋盘都“管”住，不论对方棋子放在哪一格，都会被吃掉．

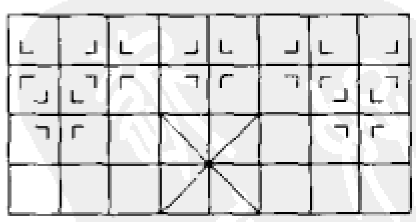
请你想一想，这五个“皇后”应该放在哪几格上才能控制整个棋盘？





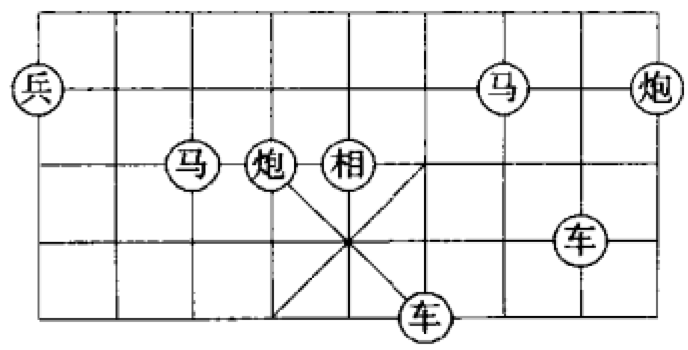
解：本题是构造性的题目．用五个子管住六十四格，如上右图所示就是一种放置皇后的方案．

【例 6】 如右图是半张棋盘，请你用两个车、两个马、两个炮、一个相和一个兵这八个子放在这半个棋盘上，使得其余未被占据的点都在这八个点的控制之下（要符合象棋规则，“相”走田字，只能放在“相”所能到的位置，同样“兵”也只能放在“兵”



所能到的位置．马走“日”字，“车”走直线，“炮”隔子控制等）．

解：这仍是一个占位问题，只需要把指出的几个子排布成所要求的阵势即可，如右图所示．



本节我们初步看到了一些棋盘问题，它们的特点是：

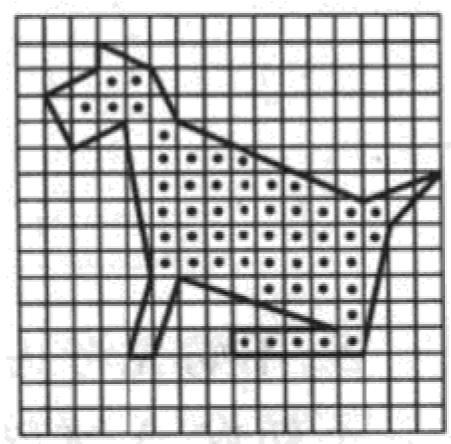
①以棋盘为背景提出各种问题，无论围棋盘、中国象棋盘或是国际象棋盘．更为一般的提法是 $m\times n$ 方格上的数学问题．

②这些问题有面积计算，图形分割，棋子计数，棋子布局等各种类型，这些问题一般属于智巧类的问题或更深一步的组合数学问题．

习　题　十

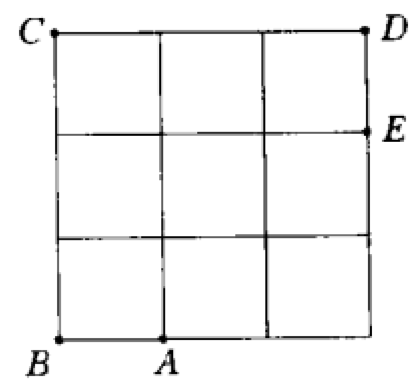
1. 在 4×4 的棋盘中每一格分别填入字母 A、B、C、D. 要求每行、每列、两条斜线的四个格都恰有 A、B、C、D 各一个.

2. 把 A、B、C、D 四个棋子放在 4×4 的棋盘的方格里，使每行每列只能出现一个棋子. 问共有多少种不同的放法？



3. 下页第一图是 16×16 棋盘，每个小正方格面积都是 1，求图中这只狗所占的图形的面积.

4. 中国象棋规定马走“日”字. 定义：在中国象棋盘上从点 A 到 B 马走的最少步数称为 A 与 B 的马步距离，记作 $|AB|_m$. 如右图在 3×3 的棋盘格中，标出了 A、B、C、D、E 五个点，则在 $|AB|_m$, $|AC|_m$, $|AD|_m$, $|AE|_m$ 中最大者是多少？最小者是多少？



5. 在 6×6 的棋盘中至少要放入多少个棋子，（每个小方格内至多放一个），才能使得随意划掉 3 行 3 列上的棋子后，在剩下的方格中至少要留有一枚棋子？

习题十解答

1. 如右图填入即可．答案可能不唯一．

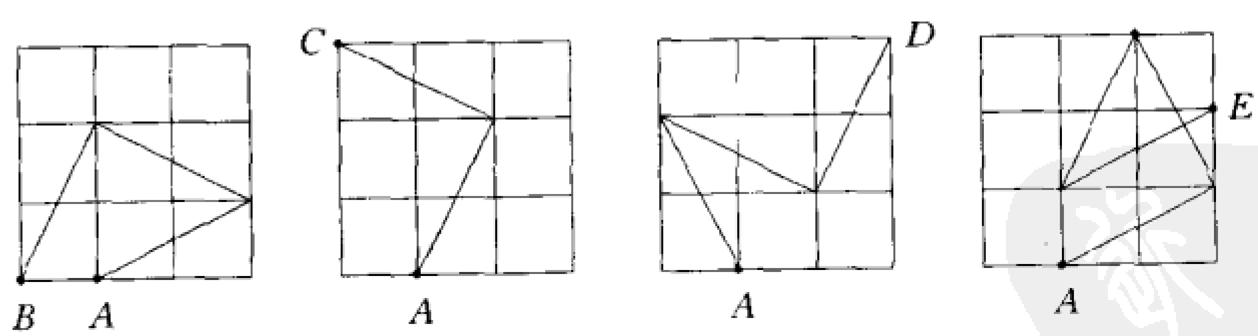
A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

A			
	B		
		C	
			D

2. 不妨先考虑棋子 A 的情况，共有 16 种不同的放法，不妨设 A 就放在左上角．然后考虑棋子 B 的放法，由于 A 所在的行及所在列不能再放棋子，所以棋子 B 只能有 9 种不同放法，不妨设棋子 B 在右图中位置．类似地 C 只有 4 种不同放法，D 只有一种放法，总计共有 $16\times9\times4\times1=576$ 种不同放法．

3. 面积是 71.5（平方单位）．

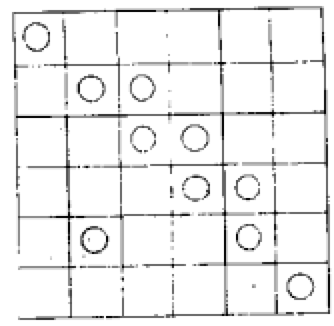
4. 观察下面 4 个图．知最大的是 $|AE|_m=4$，最小的是 $|AC|_m=2$．



$|AB|_m=3$　$|AC|_m=2$　$|AD|_m=3$　$|AE|_m=4$

5. 至少放十枚棋子．十枚棋子如右图放置，划去任意三行、三列后，剩下的格子中至少还有一枚棋子．

如果放入 9 枚棋子，则总能划去某三行、某三列，把这 9 枚棋子都划去（想一想，为什么?）.



第11讲　棋盘中的数学（二）

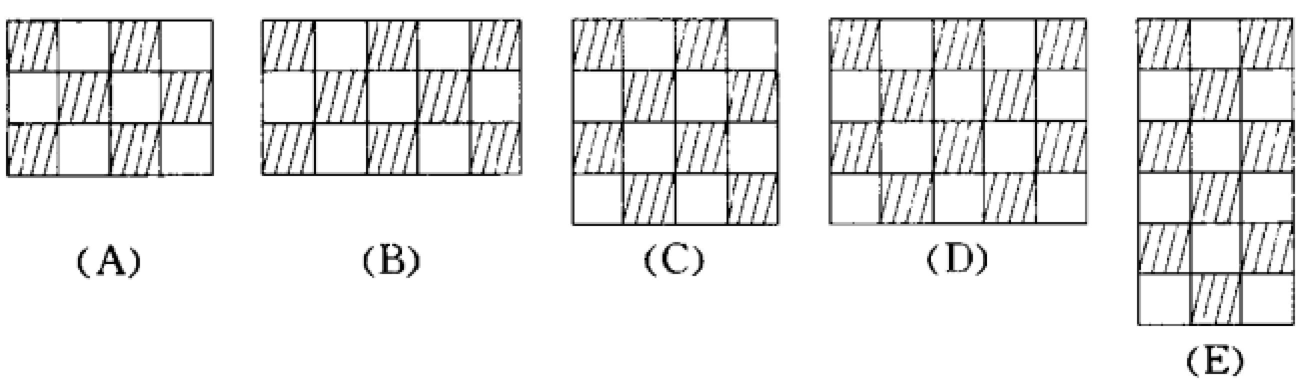
——棋盘覆盖的问题

有这样一道竞赛题：

【例1】　一种骨牌是由形如的一黑一白两个正方形组成，则下图中哪个棋盘不能用这种骨牌不重复地完全覆盖？

(A)3×4　　(B)3×5　　(C)4×4

(D)4×5　　(E)6×3

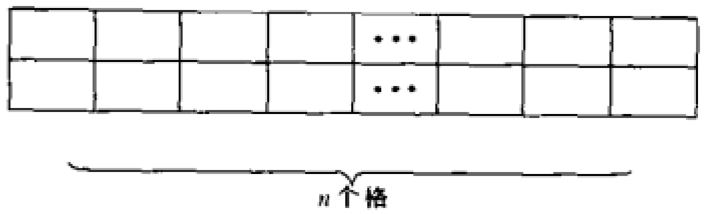


解：通过试验，很容易看到，应选择答案（B）.

这类问题，容易更加一般化，即用 2×1 的方格骨牌去覆盖一个 $m\times n$ 的方格棋盘的问题.

定理1：$m\times n$ 棋盘能被 2×1 骨牌覆盖的充分且必要的条件是 m、n 中至少有一个是偶数.

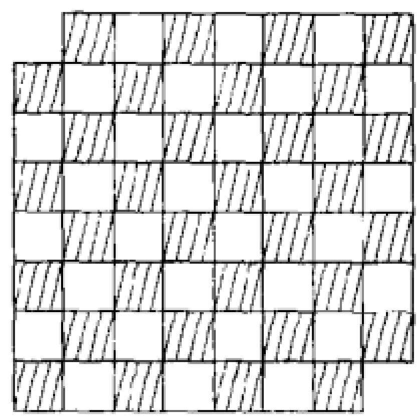
证明：①充分性：即已知 m,n 中至少有一个偶数，求证：$m\times n$ 棋盘可被 2×1 骨牌覆盖. 不失一般性，设 $m=2k$，则 $m\times n=2k\times n=k\times(2n)=\underbrace{2n+2n+2n+\cdots+2n}_{k个}$

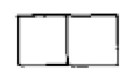
易知 

可被 n 个 2×1 骨牌覆盖，所以 $m\times n$ 棋盘可被 kn 个 2×1 骨牌覆盖.

②必要性：即已知 $m\times n$ 棋盘可以被 2×1 骨牌覆盖. 求证：m,n 中至少有一个偶数. 若 $m\times n$ 棋盘可被 2×1 骨牌覆盖，则必覆盖偶数个方格，即 mn 是个偶数，因此 m、n 中至少有一个是偶数.

【例 2】　右图中的 8×8 棋盘被剪去左上角与右下角的两个小方格，问能否用 31 个 2×1 的骨牌将这个剪残了的棋盘盖住？



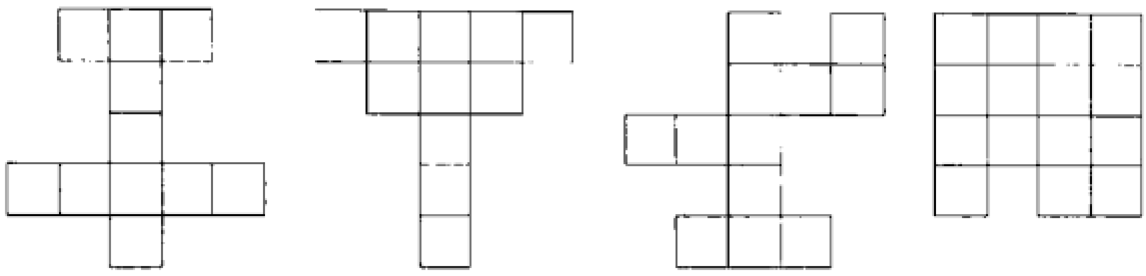


2×1

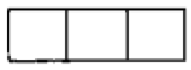
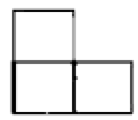
分析　刚一想，31 个 2×1 骨牌恰有 62 个小方格，棋盘去掉两个角后也是 62 个格，好像很有可能盖住. 但只要简单一试，便发现不可能. 仔细分析，发现如果把棋盘格黑、白相间染色后，2×1 骨牌一次只能盖住一个黑格与一个白格. 只要发现这个基本事实立即可以找到解答.

解：我们将残角棋盘黑、白相间染色（如图），62 个格中有黑格 32 个，白格 30 个. 另外，如果用 2×1 骨牌 31 张恰能盖住这个残角棋盘，我们发现，每个骨牌必定盖住一个黑格，一个白格，31 个骨牌将盖住 31 个黑格及 31 个白格. 这与 32 个黑格数，30 个白格数的事实相矛盾. 所以，无论如何用这 31 张 2×1 的骨牌盖不住这个残角棋盘.

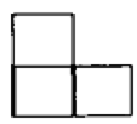
【例 3】　在下图（1）、（2）、（3）、（4）四个图形中：



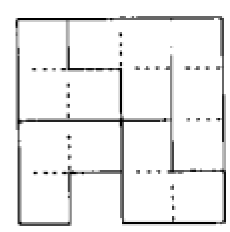
(1)　　(2)　　(3)　　(4)

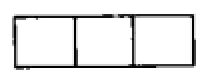
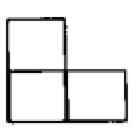
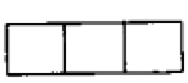
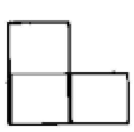
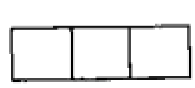
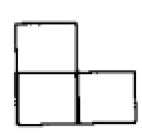
可以用若干块  和  拼成的图形是第几号图形？

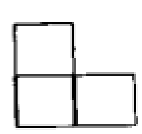
解：图形（1）和（2）中各有 11 个方格，11 不是 3 的倍数，因此不能用这两种图形拼成.

图形（3）的右上角只能用  来拼. 剩下的图形显然不能用这两种图形来拼.

只有图形（4）可以用这两种三个方格的图形来拼，具体拼法有多种，右图仅举出一种为例.

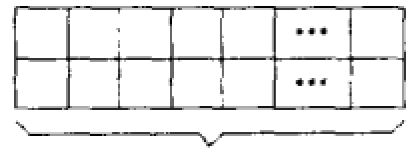


说明：排除图（1）与（2）的方法是很重要的. 因为一个图形可以用若干块  和  盖住，这个图形的小方格数一定是 3 的倍数. 因此，小方格数不是 3 的倍数的图形一定不能用  与  形的“骨牌”盖住，这是“必要条件排除法”. 但要注意，一个图形小方格数是 3 的倍数，也不能保证一定能用  与  盖住. 这表明这个条件并不充分. 图形（3）表明的就是这种情况.

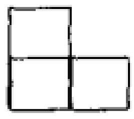
【例 4】 $2\times n$ 的方格棋盘能用  形骨牌覆盖

的充分且必要的条件是 $3|n$.

证明：① 充分性：即已知 $3|n$，

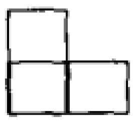
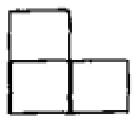


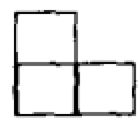
n个

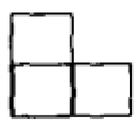
求证　$2\times n$棋盘可被  骨牌覆盖.

当　$3|n$ 时，设 $n=3k$，

则　$2\times n=2\times 3k=k(2\times 3)$

由于两个  可拼成一个 2×3 小棋盘，这时 $2\times n$恰为k 个 2×3 组成，所以，当 $3|n$ 时 $2\times n$ 棋盘可以被若干个  形盖住.

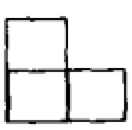
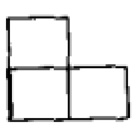
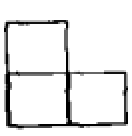
②必要性：即已知 $2\times n$ 棋盘可被  骨牌覆盖，求证：$3|n$.

设 $2\times n$ 棋盘被 x 个  形覆住，则

$2\times n=3\times x$

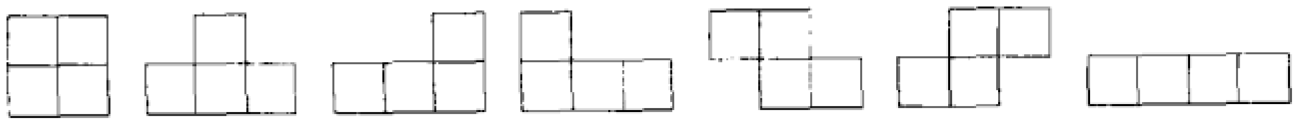
则　$3|2n$，　但　$(2,3)=1$，

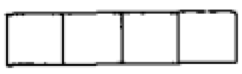
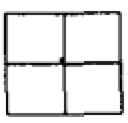
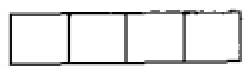
$\therefore$　$3|n$.

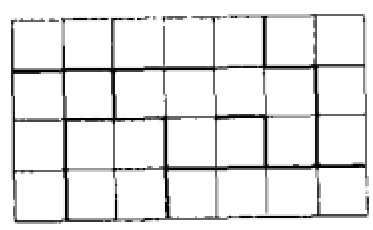
说明：例 4 的结论为我们制定 $m\times n$ 棋盘能否被  形覆盖提供了一种思考方法. 比如，若 $3|n$ 且 $2|m$ 时，$m\times n$ 棋盘可分成若干个 $2\times n$ 棋盘，而每个棋盘都能被  形盖住，因此，$m\times n$ 棋盘可被  形盖住.

【例 5】　一种游戏机的“方块”游戏中共有如下页

图所示的七种图形，每种图形都由4个面积为1的小方格组成．现用7个这样的图形拼成一个7×4的长方形(可以重复使用某些图形)．那么，最多可以用上面七种图形中的几种？

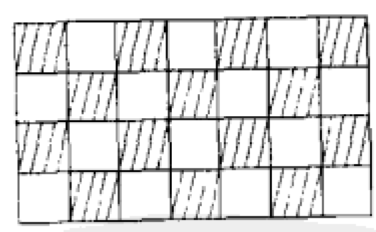


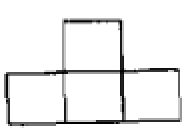
分析 用七个图形，共4×7＝28个方格，要是能拼成4×7的棋盘，小格数一样，这表明存在可能性．显见由  型七个，可以拼成4×7的棋盘；由4个  型及3个  也可以拼成4×7的棋盘，这时采用了小“方块”中的两种．这样试下去，我们会发现，由七种方块中的6种可以拼成4×7棋盘格，如右图所示．但要将七种“方块”每个都只用一次，要拼成4×7棋盘，试几次会发现拼不出来．因此我们会想到，是不是不可能呢？下面我们证明这一点．



证明：用6种“方块”构成4×7棋盘已如上图所示．

下面我们证明不能用七种“方块”各一块构成4×7的长方形棋盘．



将长方形的28个小方格如右图黑、白相间进行染色，则黑、白格各为14个．若能用7种“方块”拼成，则  必占据了3个黑格一个白格或3个白格1个黑格，而其余六种方块图形皆占据黑格、

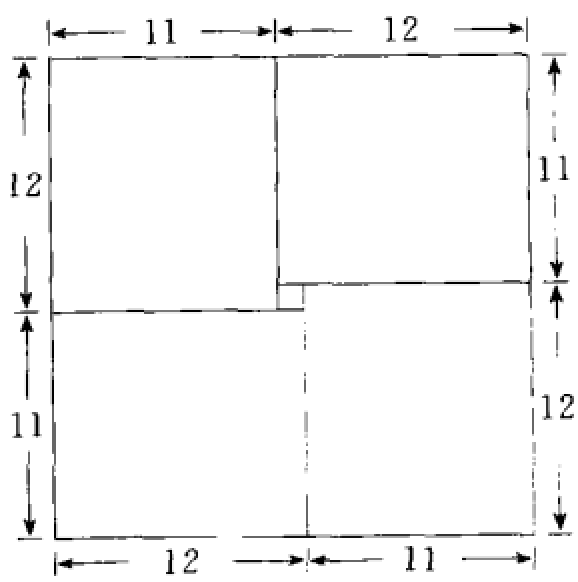
白格各 2 个．因此，7 种方块图形占据的黑白格数必都是奇数，不会等于 14．

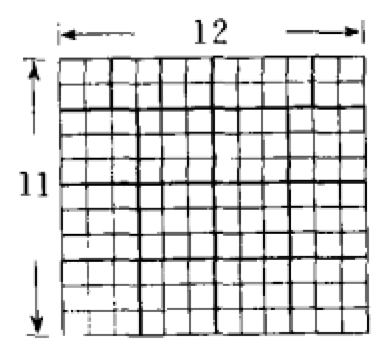
综上所述，要拼成 4×7 的方格，最多能用上七种“方块”中的 6 种图形．

【例 6】　由 1×1、2×2、3×3 的小正方形拼成一个 23×23 的大正方形，在所有可能的拼法中，利用 1×1 的正方形最少个数是多少？试证明你的结论．

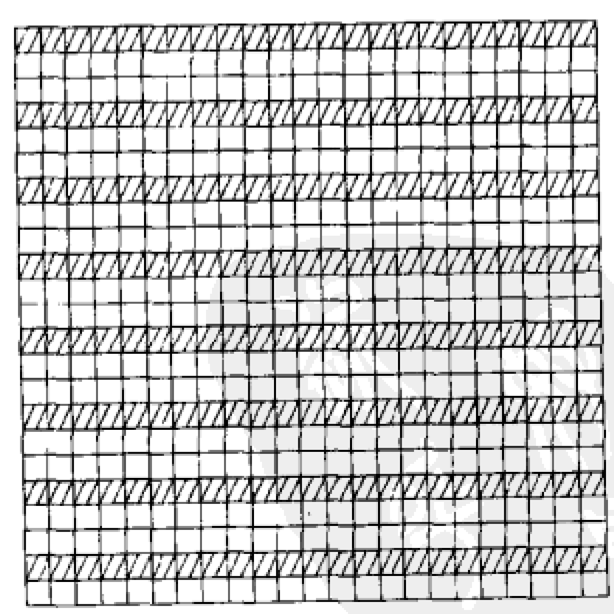
解：用 1×1 的正方形至少一个．

第一步：中心放一个 1×1 的正方形，剩下的 4 个 11×12的矩形，是可以用 6 个 2×2 正方形和 12 个 3×3 正方形拼成的，如下图所示．



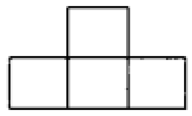


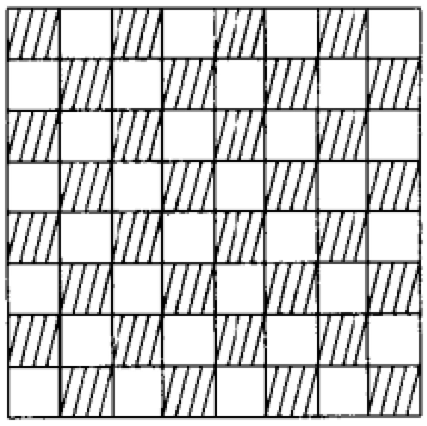
第二步：不用 1×1 而只用 2×2 与 3×3 的正方形是拼不成的．将 23×23 的大正方形的 1，4，7，10，13，16，19，22 各行染红色，其余各行染蓝色如右图．任意 2×2 或 3×3 正方形都将包含偶数个蓝色小格，但



蓝格总数是 23×15，是个奇数，矛盾．所以不用 1×1 的小正方形是拼不成 23×23 棋盘的．

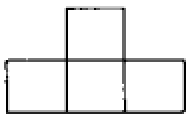
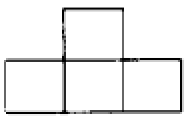
综上所述，要拼成 23×23 棋盘，至少要用一个 1×1 的小正方形．

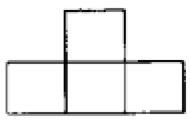
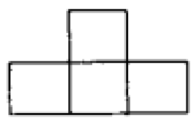
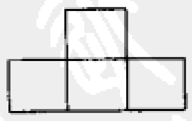
【例 7】 8×8 的棋盘能否用 15 个  形骨牌和 1 个“田”形骨牌覆盖？

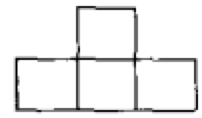


解：如右图用黑白二色相间涂染 8×8 棋盘，总计有 32 个黑格及 32 个白格．

当我们把“田”放入棋盘时，一定盖住两个小黑格及两个小白格．

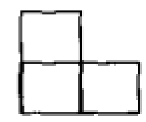
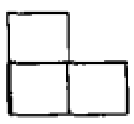
当我们把“  ”形骨牌任意盖在 8×8 棋盘上时，要么它盖住三黑一白（称为第Ⅰ类），要么它盖住三白一黑（称为第Ⅱ类），总之一个“  ”盖住奇数个（3 个，或 1 个）白格．

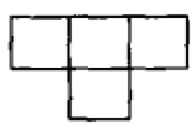
假设用 15 个“  ”形骨牌和 1 个“田”形骨牌可以覆盖这个 8×8 棋盘，则 15 个“  ”形骨牌将盖住 $\underbrace{\text{奇数}+\text{奇数}+\cdots+\text{奇数}}_{15\text{个}}=$ 奇数个白格，1 个“田”字格盖住 2 个白格．所以 15 个“  ”形骨牌和 1 个“田”形骨牌共盖住：奇数 $+2=$ 奇数个白格．这与 8×8 棋盘上共有 32 个白格的总数相矛盾．

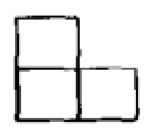
所以 8×8 的棋盘不能用 15 个  形骨牌和 1 个“田”形骨牌所覆盖！

关于棋盘的覆盖问题我们简单介绍到这里，并且只是个别的例题，作为入门的先导罢了！

习题十一

1. 在 4×4 的正方形中，至少要放多少个“”形块，使得在不重叠的情形下无法再在正方形中多放一个“”形块？

2. 3 个“”字形块和一个“田”字形块能否覆盖 4×4 的棋盘纸？

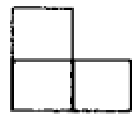
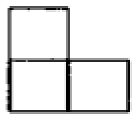
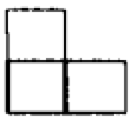
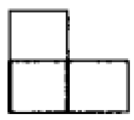
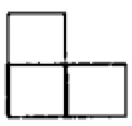
3. 证明一个 5×9 的棋盘能被“”形块覆盖.

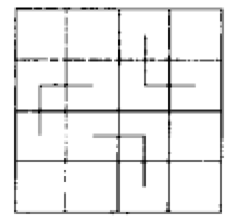
4. 求证 4×4 棋盘格切去左上角与右下角两个格后的残角棋盘，不能用 7 个 1×2 骨牌所覆盖.

5. 请将如右图所示的 6×6 棋盘分成两块，使得两块的形状和大小都相同，并且每一块中都含有 A、B、C、D、E 五个字母.

E					
		B	B		D
D		E		C	
A	A			C	

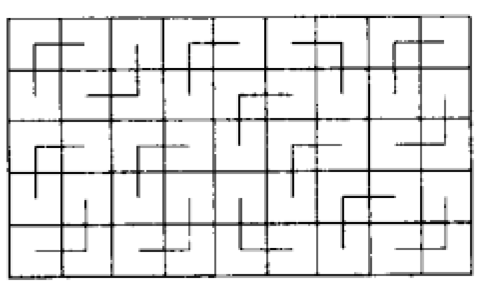
习题十一解答

1．显然用2个“”盖在4×4棋盘上后，至少还可以盖上一个“”形块．而用3个“”形块如右图放入后，在不重叠的情形下已无法再放入“”形块．所以至少要放3个“”形块．



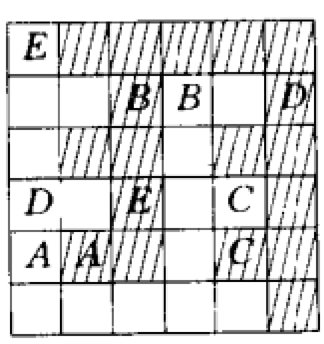
2．不能．理由与例7的解中理由类似．

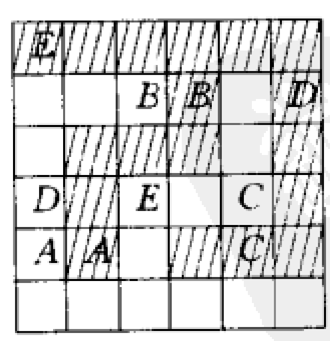
3．如下图，可以盖住．



4．利用黑白相间染色方法仿例2可证．

5．两种切分方法如下图所示．

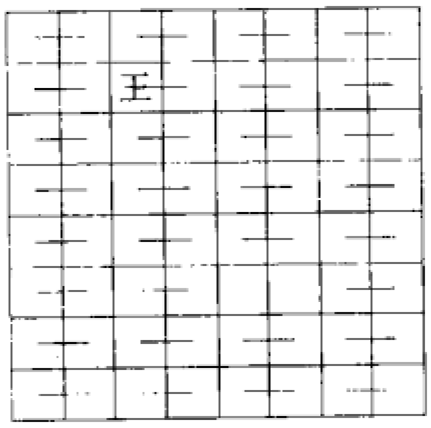




第12讲 棋盘中的数学（三）

——棋盘对弈的数学问题

我们看这样一个比输赢的问题.



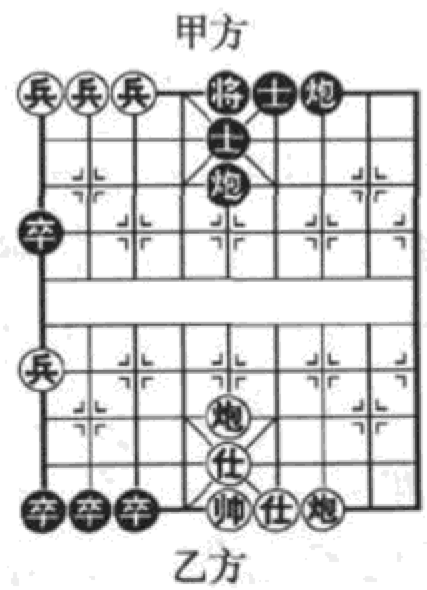
【例 1】 在 8×8 的棋盘格中的某个格子里已放入一枚棋子"王"（如右图），甲、乙两人轮流移动"王"子，每次只能横向或竖向移动一格. 凡"王"子已经占据过的格都不得再进入. 谁先遇到无法移动"王"子时，谁就算输方. 试证明，先走者存在必胜的策略.

分析 "王"子已占一个格，还剩下 $8\times8-1=63$ 个格，比如甲先走一个格，还剩下 62 个格. 若能将 62 个格分成 31 对，每对都是相邻的两小格，这时该乙走，乙领先进入一格，甲就随之进入与其配对的格，这样就造成了甲必取胜的态势. 因此，将 64 个格两两配对成为 32 个 1×2 的小矩形是解决本题的关键.

证明：设甲为先走的一方，在甲的心目中如上图将 64 个方格两两配对分成 32 个 1×2 的小矩形，"王"子必在某个 1×2 的小矩形的一个格子中. 甲先走，将"王"子走入这个 1×2 的小矩形的另一个格子中. 这时还有 31 个 1×2 的小矩形，每个小矩形中都有两个小方格. 这时该乙走，乙总是领先进入某个 1×2 小矩形的第一个格，

甲就可以随之进入这个小矩形的第二个格．由于不能重复进入“王”已经进过的格子，所以乙总处于领先进入新的小矩形的第一格的地位，甲就总可随之进入这个小矩形的第二个格．最后必然乙先无法移动“王”子，乙输．甲必取胜．

【例 2】 右图是一盘未下完的中国象棋残局，各子走法必须按中国象棋的规则办事，将对方憋死或无法走子时算取得胜利．如果轮到乙方走，问乙怎样走法才能取胜？



分析 在上图中，双方的将（帅）均无法移动，双方的士（仕）也无法移动，底炮也不能在横线上移动（否则对方可将炮沉底打闷将）．底线兵（卒）只能横向移动．谁先移动底线兵（卒）打将，会造成对方将（帅）移出，从而出现移兵（卒）方自己必输的态势．因而只有底炮、中炮和边卒（兵）可以在纵线上移动，兵（卒）只能前移 1 步，中炮只能前移 4 步，底炮只能前移 8 步．现在的问题是：乙先走，轮流走完这三对子的 13 步，问乙怎样走才能取胜？

解：我们把乙的获胜策略及甲的各种走法列表于下(其中，“甲$_1$，乙$_2$”分别表示，“甲第一步走棋”与“乙第二步走棋”，其余类同；“中炮 2，相炮 3，卒 1”分别表示“中路炮进 2 步”，“相位炮进 3 步”和“卒进 1 步”．其余类同；“结果”栏表明乙$_1$，甲$_1$，乙$_2$之后的态势，其中的“距”以步为单位)：

乙$_1$		相炮 3									
甲$_1$		①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
		卒 1	相炮 1	相炮 2	中炮 2	相炮 3	中炮 1	相炮 4	中炮 4	相炮 5	中炮 3
乙$_2$		相炮 1	兵 1	中炮 2	相炮 2	中炮 1	相炮 3	中炮 4	相炮 4	中炮 3	相炮 5
结果	兵卒距	0		1		1		1		1	
	中炮距	4		2		3		0		1	
	相炮距	4		3		2		1		0	

其中，情形⑦－10显然为乙胜．情形①，②中，如甲$_2$进炮几步，则乙$_3$就将另一路炮进同样步数，…，这样，终将乙胜．情形③，④与⑤，⑥是类似的．以③为例，甲的各种走法及乙的策略见下表：

甲$_2$		卒 1	相炮 1	相炮 2	中炮 2	相炮 3	中炮 1
乙$_3$		相炮 1	兵 1	中炮 2	相炮 2	中炮 1	相炮 3
结果	兵卒距	0		1		1	
	中炮距	2		0		1	
	相炮距	2		1		0	

显然，各种情形中也是乙胜．

注意，若甲某次退炮几步，则乙接着将同一路炮进相同步数（这样，这两只炮之间的间隔没有改变）．

说明：本题的深刻道理和规律在于自然数的二进制

表示，将1步，4步，8步分别用二进制表示为1，100，1000.

当乙从8步中走了3步后，变为还有5步即1，100，101.

我们把这三个数写成竖式

$$\begin{array}{ccc} & & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{array}$$

容易看出每一个数位上的数字之和都是偶数.（这里均勿进位）. 无论甲怎样走，所走的那一行的步数（用二进制表示）至少有一个数位上的数字发生了变化，从而破坏了上面的规律，即不是每一个数位上的数字之和都是偶数了，比如说，甲在中路炮进一步，三路的步数变为：

$$\begin{array}{ccc} & & 1\\ & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{array}$$

这时三个数位上的数字之和 $1+1+1$，$1+0$，1都不是偶数.

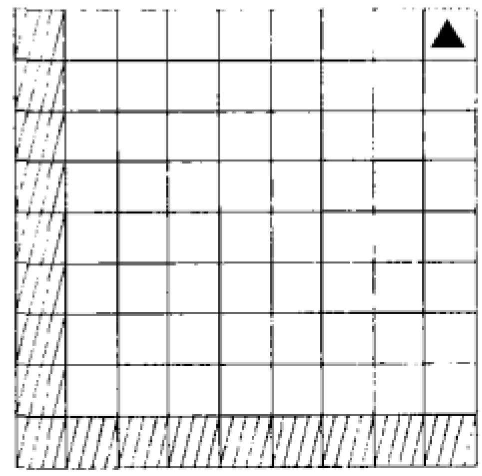
乙再接着走，他的办法是恢复上面的规律. 这是能办到的. 首先，他看一下数字和不是偶数的最高数位，三路步数二进制表示中至少有一路在这数位上的数字是1，然后，他就在这一路上走若干步，使得上述数位上的数字和为0，而较低数位上的数字为1或0以保证这些数位上的数字之和为偶数，其它数位上的数字不变. 比如，对于上面的情形，乙应当在"相"位炮所在的路线上走3步，将三路步数变为：

$$\begin{array}{cc} & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{array}$$

这样继续下去，步数逐渐减少，必有结束的时候，

由于甲走后，不是每个数位上的数字之和都是偶数，所以甲不可能走到最后一步．走最后一步的是乙，所以乙必然取胜．

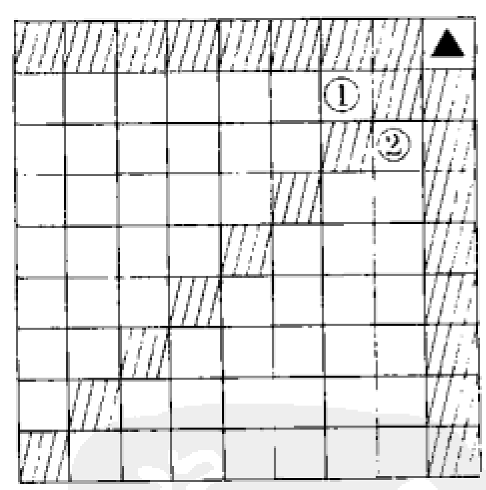
【例 3】 如右图是一个 9×9 棋盘，它有 81 个小正方形的格子，在右上角顶的格子里标有“▲”的符号代表山顶．A、B 两人这样来游戏：由 A 把一位“皇后”（以一枚棋子代表）放在棋盘的最下面一行或最左边一列的某个格子里（即放在右图中阴影区域的一个格子里），然后由 B 开始，两人对弈：“皇后”只能向上，向右或向右上方斜着走，每次走的格数不限，但不得倒退，也不得停步不前；谁把“皇后”走进标有“▲”的那格就得胜．



显然，双方对弈下去决不会出现“和棋”，在有限个回合后，必有一胜一负，试分析 B 必取胜的策略．

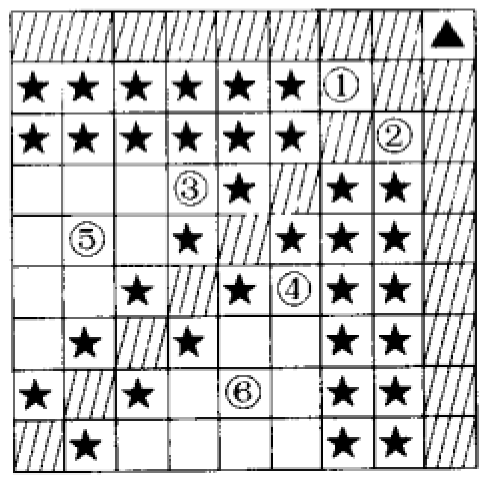
这个游戏我们不妨称之为“皇后登山”问题．

分析 我们采用倒推分析的方法．如果 A 把皇后走进右图中带阴影的格子，则 B 就可一步把皇后走到山顶而获胜．因此任何一方都应该避免把皇后走进右图中的阴影地区，而都应该迫使对方不得不把皇后走至带阴影的格子里去，这是取胜的总的指导思想．



那么 B 应把皇后走到哪些格子中才能迫使对方不得不把皇后走进上图中带阴影的格子里去呢？从上图中可

看出，这样的格子只有两个：有标号①和②的格子．由此可知，如果谁抢占了①或②，只要走法不再失误，就必会得胜．因此，我们形象地称①、②两格为“制高点”．



那么为占①或②，如右图，如果 A 把皇后走进有★的方格里，则 B 就能占领①或②，从而获胜，而 B 又怎样迫使 A 不得不把皇后走进有★的或有阴影的方格呢？同样的分析可知，只要 B 能占领第二对制高点③或④即可．

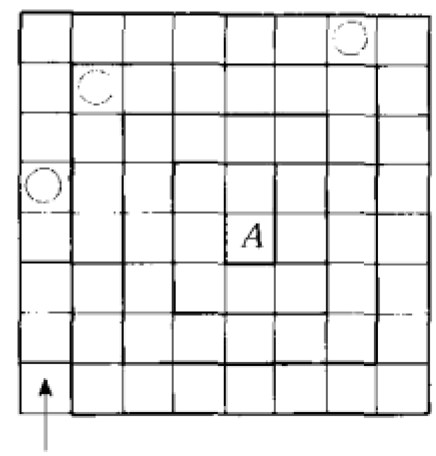
继续运用上述分析方法，还可以得到下一组制高点⑤和⑥．

这时，不论 A 开始把皇后放在最左一列与最下面一行的哪个格子中，B 第一步都可以抢到一个制高点，或者第一步就直接达到▲，只要走法得当，必能稳操胜券的．

说明：1．如果我们给出的是 8×8 的国际象棋盘，玩“皇后登山”游戏，A 开始把皇后放在最左列或最下行的哪个格时，A 必胜？这时我们看到，对 8×8 棋盘，制高点⑤在最左列上，制高点⑥在最下列上，所以 A 开始把皇后放于⑤或⑥，则 A 必胜，放在其它格时，B 可抢到制高点，则 B 必胜．

2．如果在普通的围棋盘上，（共有 $18\times18=324$ 个格）玩“皇后登山”游戏．B 取胜的制高点都是哪些？请读者自己找出来．可以告诉大家，一共有六对，计 12 个制高点．

【例 4】 在 8×8 的国际象棋盘中（如下页图）有三枚棋子，两个人轮流移动棋子，每一次可将一枚棋子移动任意多格（允许两枚或三枚棋子在同一格），但只能按箭头所表示的方向移动．在所有棋子都移到 A 点时，游戏结束，并且走最后一步的算赢，问哪一个人能够获胜？



解：由三枚棋子到 A 的格数分别要走 59 步，50 步和 30 步，这样就与例 2 在三条路线上走步本质上一样的，我们不妨把 59，50，30 这三个数写成 2 进制．

$59=(111011)_2$，$50=(110010)_2$，$30=(11110)_2$

排在一起：

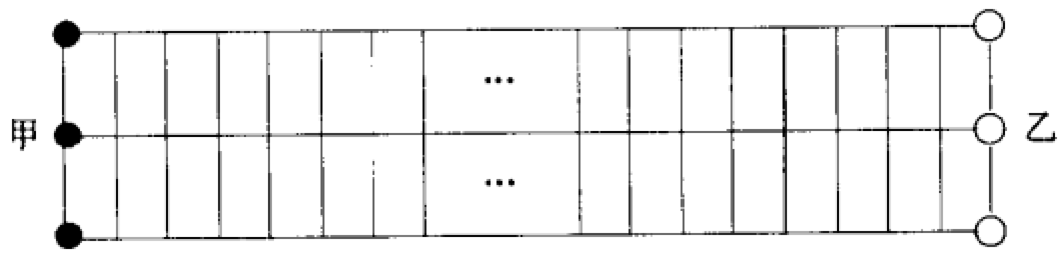
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
	1	1	1	1	0

第一个人应当将第一行的 111011 改为 101100，也就是减少 1111，这样就使各个数位上的数字和为偶数．这时无论第二个人如何走都将破坏这个特性，第一个人接着可以采取使各个数位上的数字和为偶数的方法，稳步地走向胜利．

这就是说，第一个人应当将最外面的棋子移动 15 步（即 $(1111)_2=1\times2^3+1\times2^2+1\times2+1=15$），即可按例 2 的规则稳步取胜．

习题十二

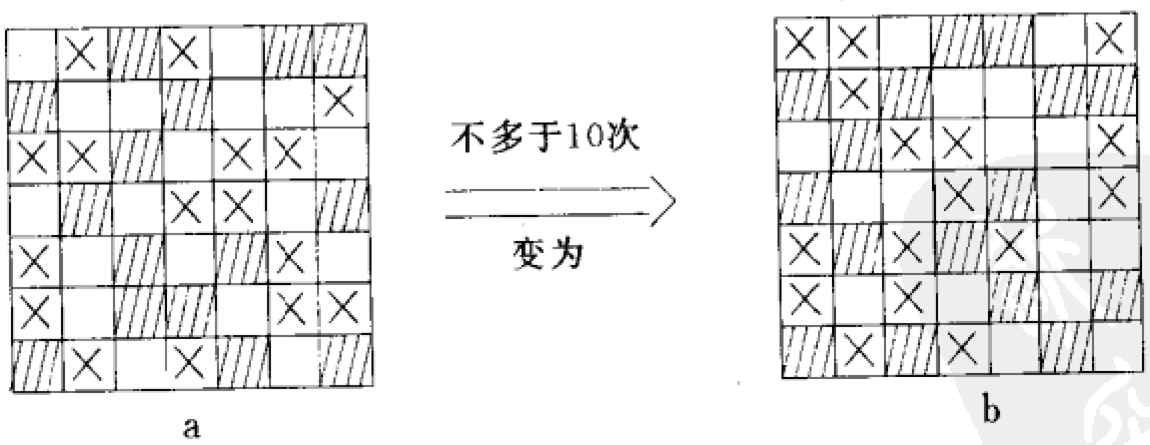
1．如下页图是一个 3×101 的棋盘，甲每次可走一个黑子，乙每次可走一个白子．每枚棋子只能在它所在的行沿固定方向移动，走步数不限，但不能越过对方棋子，谁不能走子谁算输．若甲先走，请指出甲必取胜的着法．



2．对 8×8 的棋盘，讨论“皇后登山”问题．

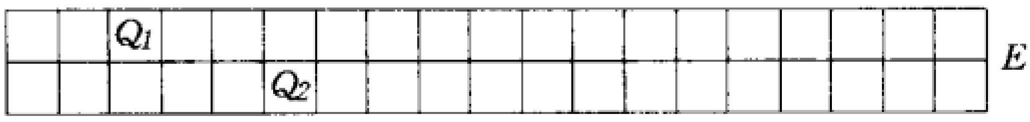
3．在普通围棋盘上（共 $18\times18=324$ 个格）讨论“皇后登山”游戏．

4．图 a 是一个彩色激光棋盘，上面有红（打×）黄（空白格），蓝（斜线格）三种颜色的方格．游戏人可以随意地通过按电钮将某一行或某一列的小方格同时改变颜色，红变黄，黄变蓝，蓝变红，如果按不多于 10 次电钮将图 a 变为图 b，便可得奖．问游戏人能否得奖？



5．由甲在 2×19 的棋盘格上任放两个皇后 Q_1 与 Q_2（如图）于两行中，然后乙开始先走棋：如果走一个皇

后，则可把任一皇后向右（向 E 方向）走任意多少格；如果同时走两个皇后，则必须向右同时走相同的格数，不得不走棋，也不可倒走；这样轮流走棋，谁使得另一方无棋可走时即获胜，试讨论乙取胜的策略.

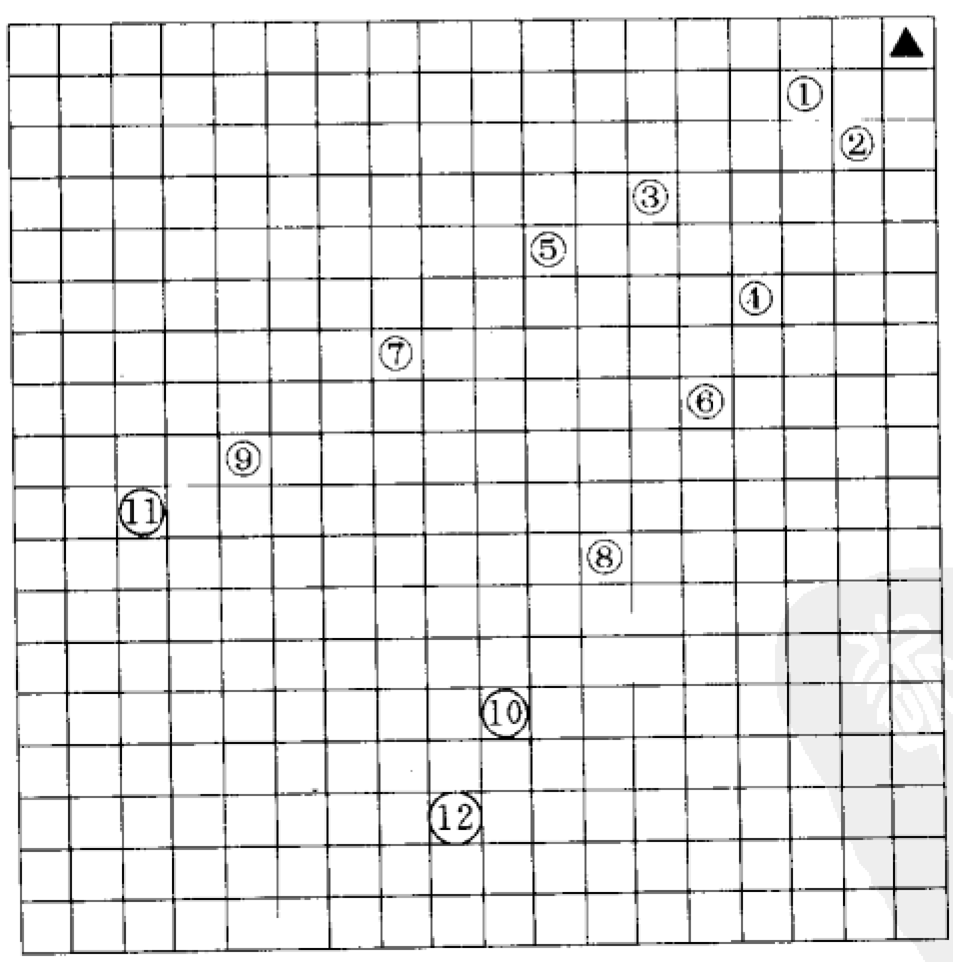


习题十二解答

1. 甲先把一行黑子走 99 步顶住乙方白子，以后乙走多少格，甲在另一行也走多少格，最后甲必取胜.

2. 见例 3 说明中第 1 款.

3. 见例 3 说明中第 2 款，其 12 个制高点如下图所示.



4．参加游戏的人无论按多少次电钮都无法把图 a 变为图 b. 事实上只需证明左上角 3×3 的矩形不能互相转换就行了．为此，我们分别用数字 1、0、-1 分别代换红、黄、蓝三种颜色．注意每按一次电钮，同时改变颜色的三个方格的数字和虽可能改变，但被 3 除余数是不变的，图 a 左上角 9 个数字和被 3 除余数是 0，图 b 左上角 9 个数字和被 3 除余数是 1，故图 a 永变不成图 b.

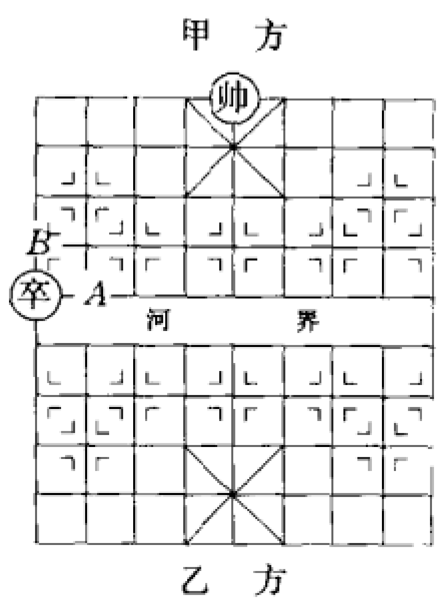
5．Q_1 到 E 有 16 格，Q_2 到 E 有 13 格，可记为（16，13）乙应把棋走成（8，13）或（7，4）．往后只要不犯错误，便可取胜．

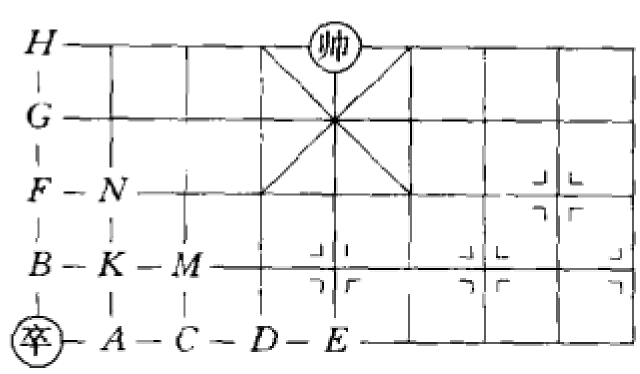
第13讲 棋盘中的数学（四）

——棋盘格的计数问题

与棋盘有关的另一大类数学问题是计数问题．我们只能就一些简单的例题进行解说，并随之介绍解题的思想方法．

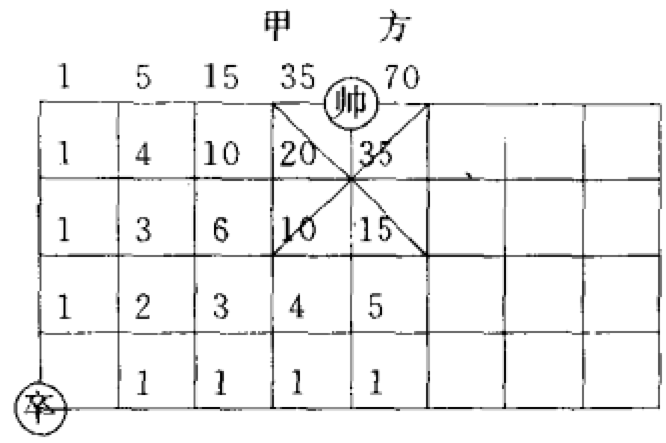
【例1】 如下左图，在中国象棋盘上，乙方一只边卒已经过河，它可以向前移一步到 B，也可以横行一步到 A，要使这个小卒沿最短路线走到对方帅所在的位置（假定前进路上没任何阻难），问有多少种不同的走法？





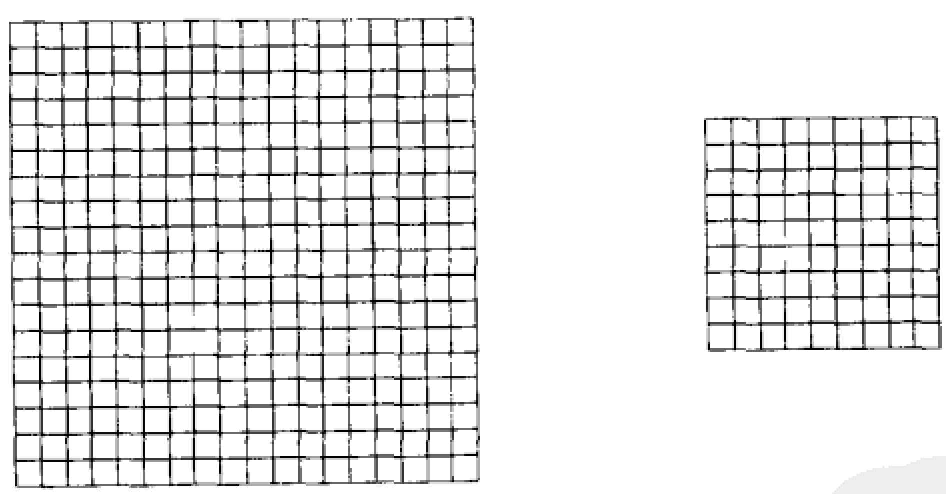
解：为了解这个问题，可以从简单的情形开始，逐步进行．上右图中，小卒沿最短路线走到 A、B、C、D、E、F、G、H 的走法都只有一种，走到 K，则有两种：先走到 A 再走到 K，或者先走到 B，再走到 K．走到 M，则有 $1+2=3$

种：先走到 C 再到 M 有一种，先走到 K 再到 M 有 2 种（因为走到 K 有 2 种走法）．把走法的种数标在各点上，每个数等于它前面的两个数（右图中左方一个，下方一个）的和．走到帅的位置有 70 种不同走法．

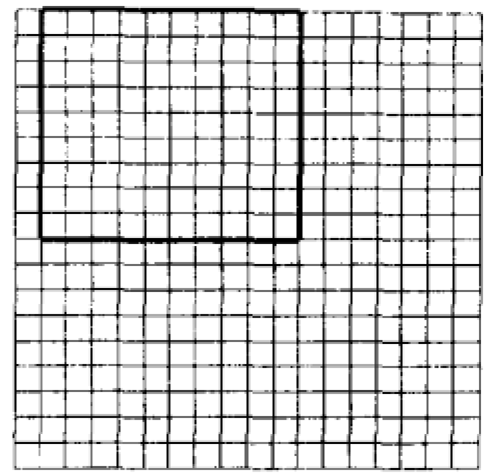


说明：利用标数法可以很快求出从一个点到棋盘上另一点最短的不同路线数，这是一种很直观有用的计数方法．

【例 2】　围棋盘上横竖各有 19 条线（如下图），在棋盘上组成许多大小不同的正方形，问其中有多少个和图中右侧小正方形大小一样的正方形（小正方形面积是这个围棋盘的 $\frac{1}{4}$）？

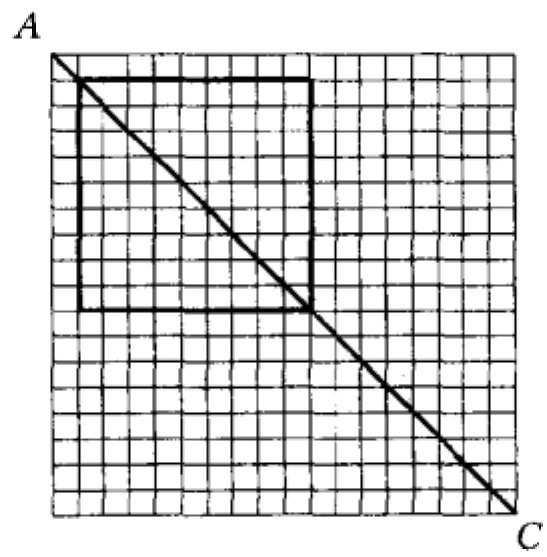


解法 1：我们把小正方形放在大正方形的左上角，则小正方形的右边线与大正方形的第 10 条竖线重合．将小正方形向右平行移动一格（如右图）则又可出现一个小正方形，顺次向右移动 9 次后，小正方形的右边线与大正方形的右边线重合．这样前后共得到 10 个小正方形．

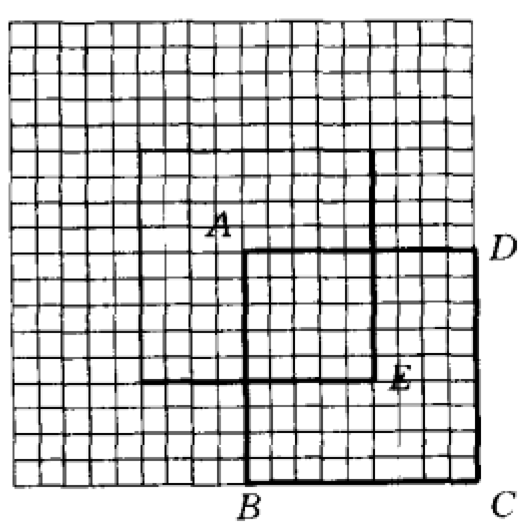


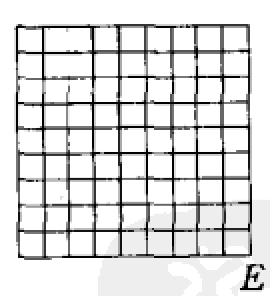
同样，将左上角小正方形再每次向下移动一格，也可得到 10 个小正方形．所以共有 $10\times10=100$ 个小正方形．

解法 2：将大正方形左上角的小正方形沿大正方形的对角线 AC 移动，第 1 次移动（如右图）可视为是右移一格和下移一格的合成，也可视为是下移一格和右移一格的合成．再加上初始位置的小正方形，这时就有 $1+3$ 个小正方形．继续将小正方形沿对角线移动，共移动 9 次，小正方形就移动到大正方形的右下角．这时共包含小正方形 $(1+3+5+\cdots+19)$ 个，我们可按小高斯计算 $1+2+3+\cdots+100$ 的方法求出 $1+3+5+\cdots+19=\frac{(19+1)\times10}{2}=100$ 个．



解法 3：我们先在下右图小正方形中找一个代表点，例





如右下角的代表点 E，然后将小正方形按题意放在围棋盘上，仔细观察点 E 应在什么地方，通过观察，不难发现：

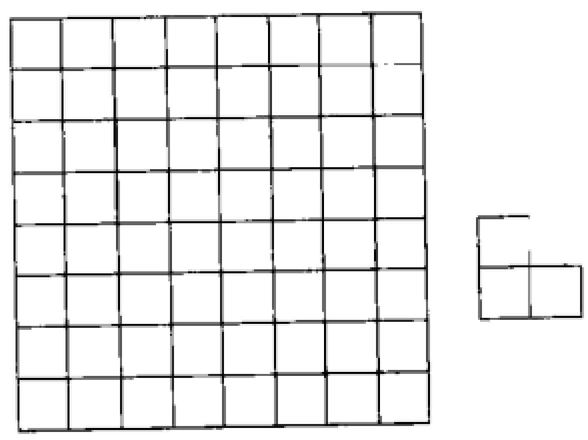
①点 E 只能在棋盘右下角的正方形 $ABCD$（包括边界）的格子点上.

②反过来，右下角正方形 $ABCD$ 中的每一个格子点都可以作为小正方形的点 E，也只能作为一个小正方形的点 E.

这样一来，就将“小正方形的个数”化为“正方形 $ABCD$ 中的格子点个数”了，很容易看出正方形 $ABCD$ 中的格子点为 $10\times10=100$ 个.

说明：以上三种解法都有一定代表性．其中解法 3 既巧妙又迅速，它利用了“一一对应就一样多”的配对原理．配对原理在计数中是非常重要的.

【例 3】 从 8×8 的方格棋盘（右图）中取出一个由三个小方格组成的“L”形（可旋转），问有多少种不同的取法？



分析 如果从 2×2 的方格中取“L”形，则有 4 种不同的取法，因此，我们只要知道从 8×8 的方格棋盘上总共可以取出多少个“田”字形就可以了，又由于每个“田”字形的中心点是棋盘内横线与竖线的交叉点（但不包括边界上的点），反过来每一个这样的交叉点都有一个以它为中心的“田”字形，于是问题就转化为求横线与竖线一共有多少个不在边界上的交叉点.

解：设 S 是从棋盘上所能取出的所有“田”字形组成的集合，S'是棋盘内所有横线和竖线的交叉点（不包括边界上的点）组成的集合.

由于每个“田”字形的中心点是棋盘内横线与竖线

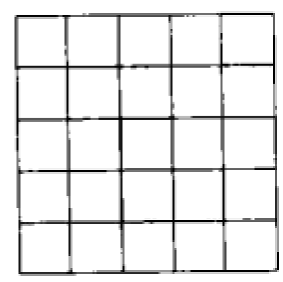
的一个交叉点且不在边界上，反过来，位于棋盘内横线与竖线交叉点四周的四个小方格恰好组成一个“田”字形，因此集合 S 与 S' 的元素能一一配对．由配对原理，这两个集合的元素一样多．

而棋盘内横线与竖线的交叉点有：

$(9-2)\times(9-2)=49$（个）．

所以棋盘上可以取出“田”字形的个数为 49 个．又由于从一个“田”字形中可以取出 4 个“L”形，并且，从不同的“田”字形中取出的“L”形是不同的，所以可知，从棋盘上共可以取出 $49\times4=196$ 个“L”形，即题中“L”形的不同取法共 196 种．

【例 4】　如右图在 5×5 棋盘格中，共有多少个正方形？



解：在 5×5 的棋盘格中

包含 1×1 的正方形共 25 个；

包含 2×2 的正方形共 16 个；

包含 3×3 的正方形共 9 个；

包含 4×4 的正方形共 4 个；

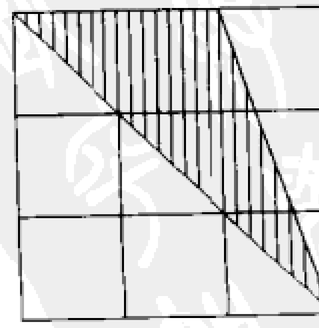
包含 5×5 的正方形共 1 个；

总计包含各种正方形共有：

$25+16+9+4+1=55$ 个．

说明：本题解法是先将正方形分成五类：1×1，2×2，3×3，4×4，5×5，对每一类都仿例 3 中第 3 种解法去解是非常迅速的．

【例 5】　右图中的正方形被分成 9 个相同的小正方形，它们一共有 16 个顶点（共同的顶点算一个），以其中不在一条直



线上的三个点为顶点，可以构成三角形，在这些三角形中，与阴影三角形有同样大小面积的有多少个？

分析 解决这个问题，主要是运用两个结论：

①同底等高的两个三角形的面积相等.

②平行的两条直线间的距离处处相等.

解：设原正方形的边长是3，则小正方形的边长是1，阴影三角形的面积是：

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=3.$

所求的三角形可分两种情形：

①三角形的一边长为2，这边上的高是3. 这时，长为2的边只能在原正方形的边上. 这样的三角形有：

$2\times4\times4=32$（个）.

②三角形的一边长为3，这边上的高是2. 这时，长为3的边是原正方形的一边或平行于一边的分割线（其中，与①重复的三角形不再算入）. 这样的三角形有：

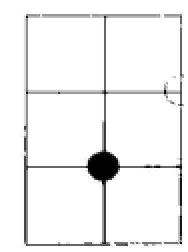
$8\times2=16$（个）.

答：所求的三角形共48个（包括上页图中给出的三角形）.

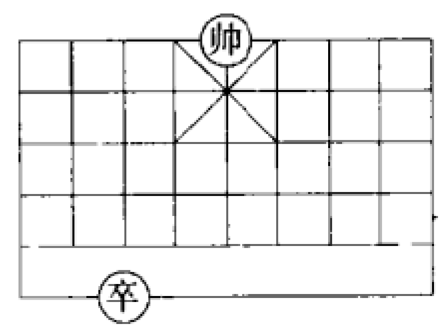
说明：解本题，容易出现两种错误，一是“少”，如忽略了底是3，高是2的三角形，这样就少算了16个；二是“多”：在计算底是3，高是2的三角形时，没有考虑其中有16个在情形①中已经计算过了，于是会得出错误结果64个.

棋盘格计数问题，本质上是一种数数问题. 其一要注意会把对象分类. 其二，在每类数数时要做到不重，不漏. 这样才能得到正确的结果.

习题十三

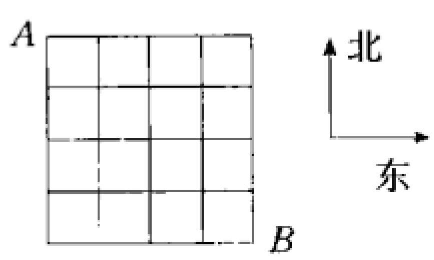


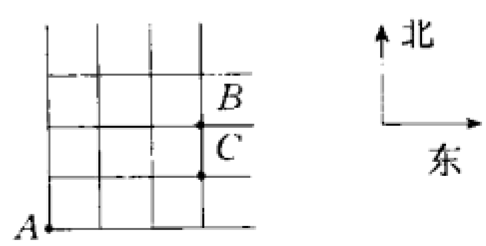
1. 右图是一个棋盘，将一个白子和一个黑子放在棋盘线交叉点上，但不能在同一条棋盘线上，问：共有多少种不同的放法？



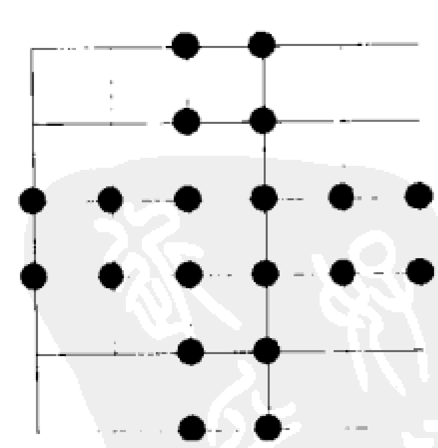
2. 右图中的象棋盘上一只小卒过河后沿最短的路走到对方“帅”处，试问这小卒有多少种不同的走法？

3. 下图表示某城市的街道图，若从 A 走到 B(只能由北往南，由西向东)，问共有多少种不同的走法？





4. 右图是一个道路图，A 处有一大群孩子，这群孩子向东或向北走，在从 A 开始的每个路口，都有一半人向北走，另一半人向东走，如果最后有 60 个孩子到过路口 B，问：先后共有多少孩子到过路口 C?



5. 如右图，在 5×5 的棋盘上放了二十枚棋子，问：以这些棋子为顶点的正方形共有多少个？

习题十三解答

1. 对于黑子每一种确定的位置，白子都有 6 个不同的放法，而黑子总共有 12 个不同位置，所以共有 $12\times6=72$ 种不同的放法.

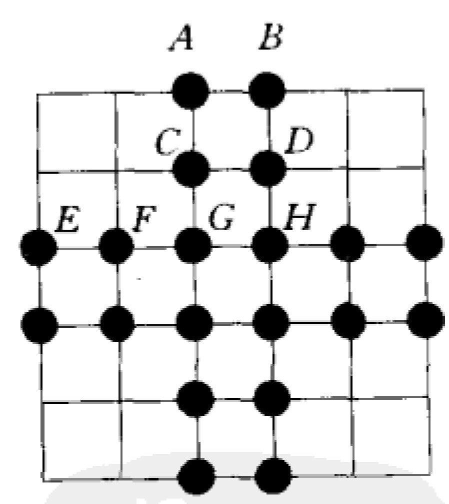
2. 采用例 1 的标数法，得这小卒有 15 种不同的走法.

3. 采用例 1 的标数法，得出从 A 到 B 共有 70 种不同的走法.

4. 设 A 处人数是 1 份，根据每个路口都有一半向北走，另一半向东走的条件，把各路口的学生所占的分数标在图上，B 处标$\frac{5}{16}$，C 处标$\frac{1}{4}$. 所以到 C 处人数是：

$60\div(\frac{5}{16})\times\frac{1}{4}=48$（人）.

5. 边长为 1 的小正方形 9 个；
边长等于 CF 长的小正方形共 4 个；
边长等于 AE 长的小正方形共 4 个；
边长等于 DF 长的小正方形共 2 个；
边长等于 BE 长的小正方形共 2 个.



总计，各种以这些棋子为顶点的正方形为 21 个.

第14讲 典型试题分析

小学数学竞赛实际上就是解题能力的竞赛. 多做好题是提高解题能力的有效途径. 本讲中精选了各类数学竞赛的一些典型试题进行分析与解答，希望对开拓思路能起一点作用.

【例1】 龟兔赛跑，全程5.2公里，兔子每小时跑20公里，乌龟每小时3公里，乌龟不停地跑，但兔子却边跑边玩，它先跑1分钟后玩20分钟，又跑2分钟然后玩20分钟，再跑3分钟然后玩20分钟，…，问先到达终点的比后到达终点的快多少分钟？

分析 只要分别求出乌龟和兔子到达终点各用了多少分钟.

解：乌龟到达终点所用时间为：

$5.2\div3=\frac{26}{15}$（小时）

也就是：$\frac{26}{15}\times60=104$（分钟）.

如果兔子不停地跑，那么它到达终点所用时间为：

$5.2\div20=\frac{13}{50}$（小时）

化为分钟：$\frac{13}{50}\times60=\frac{78}{5}$（分钟）.

又由于 $\frac{78}{5}=15\frac{3}{5}$

$=1+2+3+4+5+\frac{3}{5}$.

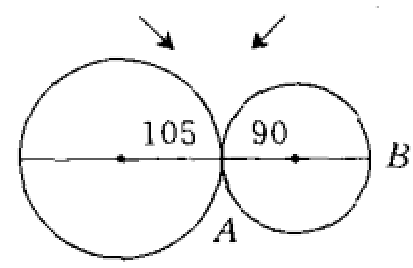
这就说明，兔子共停下来玩了 5 次，玩过第 5 次之后再跑$\frac{3}{5}$分钟，就到达终点了，共用时间：

$$15\frac{3}{5}+20\times 5=115\frac{3}{5}\text{（分钟）}$$

所以乌龟比兔子早到.

$$115\frac{3}{5}-104=11\frac{3}{5}\text{（分钟）}.$$

【例 2】 右图是两个互相啮合的齿轮，大的是主动轮，小的是从动轮，大齿轮半径为 105，小齿轮半径为 90. 现在两个齿轮的标志线在同一直线上，问大齿轮至少转了多少整圈后，两条标志线又在同一直线上？



分析 这道题可以看成下面的问题：

在 A 点有甲、乙二人，同时、同速出发分别沿着两条跑道跑圈，问甲沿左边大圈至少跑了多少圈后，乙沿右边小圈跑到了 A 点或 B 点？

解：由于要求乙到达 A 点或 B 点，所以乙跑的路程应该是小圆周长一半的倍数；又由于乙与甲跑的路程相等，所以问题就变成了：

大圆周长的至少多少倍是小圆周长一半的倍数？设甲跑了 n 圈，则有$\frac{n\cdot 2\pi\times 105}{90\pi}$是整数，约分后可得：

$$\frac{n\cdot 2\pi\times 105}{90\pi}=\frac{7n}{3},$$

这就说明 n 至少取 3 使$\frac{7n}{3}$是整数.

答：主动轮至少转 3 圈，两条标志线又在一条直线

上.

说明：变换问题的叙述方式，往往是发现解题思路的重要手段.

【例 3】　王师傅在某个特殊岗位上工作，他每上 8 天班后，就连续休息两天. 如果这个星期六和星期天他休息，那么至少再过几个星期后，他才能又在星期天休息？

分析　首先应该计算出至少过了多少天，王师傅又在星期天休息，由于他是连续休息 2 天，因此可能出现两种情况：星期六和星期天，星期天和星期一.

解：由于王师傅工作 8 天，休息 2 天，所以每 10 天一循环，设过了 n 个 10 天又是星期天，那么总天数就是 $10n$ 天，又由于每过 7 天是一个星期天，这就要求 $10n$ 是 7 的倍数，因此 n 至少等于 7，总天数就是 70 天；另外一种情况是过了 n 个 10 天是星期一，也可以使王师傅在星期天休息，同样的分析可以知道，$10n-1$ 是 7 的倍数，这时 n 至少等于 5，总天数为

$$10\times5-1=49\ (天).$$

由于　$49<70$，

所以第二种情况在第一种情况之前出现，这就说明王师傅至少过 49 天才又在星期天休息，而不难算出 49 天等于 7 个星期.

答：王师傅至少过 7 个星期又在星期天休息.

【例 4】　祖父现在的年龄是小明年龄的 6 倍，几年后，祖父的年龄将是小明年龄的 5 倍，又过几年以后，祖父年龄将是小明年龄的 4 倍，求祖父今年多少岁？

分析　在"年龄问题"中，有一条差不变原理要注

意，也就是说无论什么时候，祖、孙二人的年龄差都是一样的.

解：设祖、孙二人今年的年龄分别为 x 和 y，根据已知条件：今年祖父年龄是小明年龄的 6 倍，就有：

$$x-y=5y,$$

设过 a 年后，祖父年龄是小明年龄的 5 倍，由差不变原理知道：

$$x-y=4(y+a),$$

设过 b 年后，祖父年龄是小明年龄的 4 倍，同样道理又有：

$$x-y=3(y+b),$$

综合上面三个式子有：

$$5y=4(y+a)$$

$$5y=3(y+b).$$

整理后得：

$$y=4a$$

$$2y=3b,$$

也就是 $8a=3b$.

从这个式子看出应该有：

$$a=3, b=8,$$

从而就有 $y=4\times3=12$

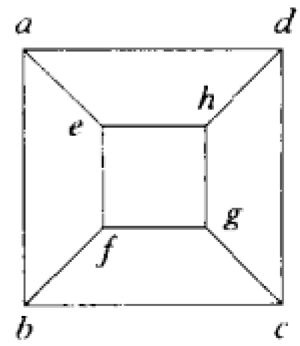
$x=6\times12=72$.

答：祖父今年 72 岁.

说明：事实上，从 $8a=3b$ 这个公式看出 a 应为 3 的倍数，b 为 8 的倍数，如果取 $a=6$、$b=16$ 或更大的话，将得出不合常理的结果.

【例 5】 右图中 8 个顶点处标注数字 $a,b,c,d,e,f,$

g, h，其中的每一个数都等于相邻三个顶点处数的和的$\frac{1}{3}$，求：



$(a+b+c+d)-(e+f+g+h)$的值

解：由已知条件得：

$3a=b+d+e$

$3b=a+c+f$

$3c=b+d+g$

$3d=a+c+h$

把这四式相加，得

$3(a+b+c+d)=2(a+b+c+d)+(e+f+g+h)$

$\therefore \quad a+b+c+d=e+f+g+h$

$\therefore \quad (a+b+c+d)-(e+f+g+h)=0$.

【例 6】　从 1～100 这 100 个不等的数中，每次取出 2 个数，要使它们的和大于 100，有多少种不同的取法？

分析　在这 100 个不等的数中，每次取出 2 个其中必有一个较小的，又这二数之和要大于 100，我们可以枚举较小数的所有可能取值情况来讨论.

解：较小数是 1，有 1 种取法，即（1，100）；

较小数是 2，有 2 种取法，即（2，99），（2，100）；

…

较小数是 50，有 50 种取法，即（50，51），（50，52），（50，53），…，（50，100）；

较小数是 51，有 49 种取法，即（51，52），（51，53），（51，54），…，（51，100）；

…

较小数是 99，有 1 种取法，即（99，100）.

所以共有取法：

$1+2+\cdots+49+50+49+\cdots+2+1$

$=2\ (1+2+\cdots+49+50)\ -50$

$=2\left[\dfrac{(50+1)\times 50}{2}\right]-50$

$=2500$（种）.

【例 7】 有 A、B、C 三人参加 M 项全能比赛，在每一个项目中，第一名、第二名和第三名分别得分 P_1、P_2 和 P_3，它们都是自然数，并且 $P_1>P_2>P_3$，最后计算总分时，A 得 22 分，B 与 C 均得 9 分，B 跑百米第一，问：

①M 等于多少？

②在跳高比赛中，谁得第二名？

分析 我们来分析如何求 M，由于题中已知有百米和跳高两项比赛，所以 M 至少是 2，又由已知条件知有：

$M\ (P_1+P_2+P_3)=22+9\times 2=40$

所以 M 是 40 的约数，M 的可能取值只有 2、4、5、8、10、20、40 以下只需依次枚举试验，淘汰非解.

解：由于 $P_1\geqslant 3$，$P_2\geqslant 2$，$P_1\geqslant 1$，因此 $M\ (1+2+3)\leqslant M\ (P_1+P_2+P_3)=40$. 也就是 $M\leqslant 6$，这样一来 M 只有三种可能取值了：2、4、5. 下面我们分别讨论.

如果 $M=2$，这时只有百米和跳高两项比赛，由于 B 在百米赛中得分 P_1，他的总分只有 9 分，因此 P_1 至多等于 8，这样 A 无论如何也得不到 22 分，所以 $M\neq 2$.

如果 $M=4$，这时有：

$P_1+P_2+P_3=10$

由于 B 得了一个第一，所以他至少得分：

P_1+3P_3

又由于 B 的总分是 9，所以我们有：

$$P_1+3P_3\leqslant 9$$

由此不难看出 P_1 不能超过 6，又由 A 得总分 22 知 P_1 还不能小于 6，所以 $P_1=6$，这样一来就有 $P_2+P_3=4$，所以就有 $P_3=1$，$P_2=3$。这是不可能的，因为这时 A 最多得分为 $6\times 3+3=21$，不够 22，因此 $M\neq 4$。

排除了以上两种情况，只有 $M=5$。下面我们来分析每个人的得分情况，这时我们有：

$$P_1+P_2+P_3=8.$$

由于 P_1、P_2、P_3 互不相同，所以 $P_3=1$，否则的话，左边至少等于 $2+3+4=9>8$。因此就有 $P_1+P_2=7$。不难发现 P_1 至多等于 5，同时又不能小于 5，所以 $P_1=5$，从而也就有 $P_2=2$。我们用下表来表示每个人的名次：且由表可见，C 是跳高比赛的第二名。

名次 项目	一	二	三
百米	B	A	C
其	A	C	B
余	A	C	B
四	A	C	B
项	A	C	B

这个表的填充过程读者应自己独立地作一遍。

【例 8】　1978 年，有个人在介绍自己的家庭时说：我有一儿一女，他们不是双胞胎，儿子年龄的立方，加上女儿年龄的平方，正好是我的出生年，我是在 1900 年以后出生的，我的儿女都不满 21 岁，我比我妻子大 8 岁，

请求出全家每个人的年龄.

分析 本题的关键在于先确定儿子的年龄，其次是求出女儿的年龄，这可用前面介绍的“筛”法来做到.

解：由于 $13^3=2197$，所以儿子的年龄一定小于 13 岁；又由于 $11^3=1331$，既使加上 $21^2=441$，也只是 $1331+441=1772<1900$，所以儿子的年龄一定大于 11 岁，只有 12 岁了.

设女儿的年龄为 x，根据已知条件有：

$12^3+x^2>1900$

所以 $x^2>1900-12^3$

$x^2>172$

也就是说女儿的年龄大于 13 岁，又已知这个年龄小于 21 岁，所以女儿的年龄可能岁数是：

14，15，16，17，18，19，20

如果 $x=15$，那么父亲的出生年数就等于：

$12^3+15^2=1953$

这显然是不合理的（想一想为什么?），同样道理，女儿的年龄也不能是大于 15 的数，只能是 14 岁.

这时父亲的出生年数为：

$12^3+14^2=1924$

1978 年时的年龄为：

$1978-1924=54$（岁）

1978 年时母亲的年龄为：

$54-8=46$（岁）：

答：（略）.

说明：从本题的解答可以发现，运用筛选法解题时，关键是确定筛选的范围，范围越小，筛选的工作量越小.

从上面的几个例子我们看出，用枚举法解题的基本方法是：

按某种规律一一列举问题的有限个解；或者是：把研究对象划分为不重复、不遗漏的若干类一一解决，从而得到原问题的解答.

有时为了求出某一答案，若不能直接解得，就可以运用筛选法，也叫排除法，它的做法可以用四句话概括：

确定范围，逐一试验，淘汰非解，求出解答.

在遇到一个较复杂的问题时，一时不知从何下手，有时可先把问题简单化，考虑它的特殊情形. 在解决这个特殊情形的过程中，得到启发，从而获得解决原题的方法，这样的解题方法，我们叫作**从特殊到一般**的分析方法，简单地说就是**难的不会，想简单的**.

【例 9】　问 5 条直线最多将平面分为多少份？

分析　直接想五条直线的情况不好想，先研究一些简单的情况，不难知道：

一条直线最多将平面分为 2 部分；

二条直线最多将平面分为 4 部分；

三条直线最多将平面分为 7 部分；

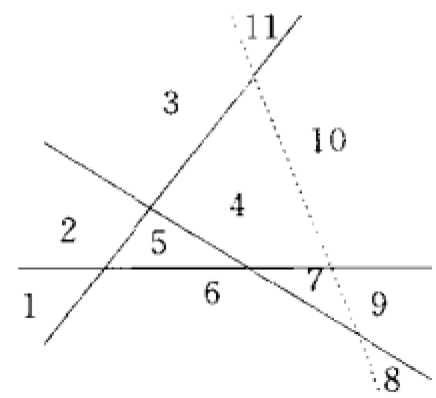
四条直线最多将平面分为 11 部分；

五条直线的图不易画出，所以很难下结论，分析一下上面特殊情形的结论，看看能不能发现一些规律.

二条直线分平面的 4 部分恰好是在一条直线分平面的 2 部分的基础上增添了 2 部分；三条直线分平面的 7 部分恰好是在二条直线分平面的 4 部分的基础上增添了 3 部分，类似地，四条直线分平面的 11 部分是在三条直线分平面的 7 部分的基础上增添 4 部分，怎样解释这个规

律呢？我们以四条直线的情形作为例子.

三条直线将平面分为 7 部分，新加上一条虚线，由于要求分平面的部分数尽可能多，所以新添虚线不能过实线的交点，这样，虚线与三条实线有三个交点，这三个交点将虚线分为四段，其中的每一段都将所在的平面部分一分为二，所以也就是使所分平面的份数增加 4.



解：因为四条直线最多分平面为 11 部分，添上第五条线，它与前四条线至多有 4 个交点，这 4 个交点将第五条线分为 5 段，其中每一段将所在平面部分一分为二，所以五条直线最多将平面分为 $11+5=16$ 部分.

说明：仿照前面的分析方法不难分析出 n 条直线最多分平面的部分数为：

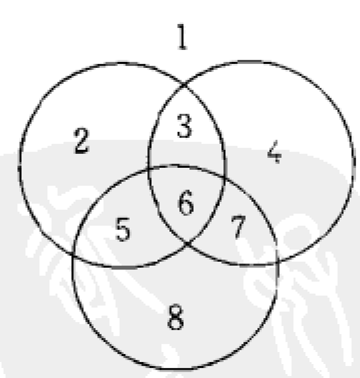
$$2+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

$$=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

【例 10】 在平面上画 20 个圆，问这 20 个圆最多可能将平面分为多少个部分？

分析 直接画出 20 个圆去数当然是行不通的. 先考虑一些简单的情况：



一个圆最多分平面为 2 部分；

二个圆最多分平面为 4 部分；

三个圆最多分平面为 8 部分；

当第二个圆在第一个圆的基础上加上去时，第二个圆应与第一个圆有 2 个交点，这两个交点将新加的圆分

为 2 段，其中每一段弧都将所在平面部分一分为二，所以所分平面部分数在原有 2 部分的基础上又增添 2 部分．同样道理，三个圆最多分平面的部分数是在 2 个圆分平面为 4 部分的基础上又增加 4 部分．

解：继续前面的分析过程，画第 20 个圆时，与前 19 个圆最多有 $19\times2=38$ 个交点，第 20 个圆的圆弧被分成为 38 段，也就是增加了 38 个区域，所以 20 个圆最多分平面的部分数为：

$$
\begin{aligned}
&2+1\times2+2\times2+\cdots+19\times2\\
&=2+2(1+2+3+\cdots+19)\\
&=2+2\times\frac{19\times(19+1)}{2}\\
&=382.
\end{aligned}
$$

说明：类似的分析我们可以得到计算 n 个圆最多分平面部分数的公式：

$$
\begin{aligned}
&2+1\times2+2\times2+\cdots+(n-1)\times2\\
&=2+2[1+2+\cdots+(n-1)]\\
&=2+n(n-1)\\
&=n^2-n+2.
\end{aligned}
$$

【例 11】　有 70 个数排成一排，除两头两个数外，每个数的 3 倍都恰好等于它两边两个数之和，已知前面两个数是 0 和 1，问最后一个数除以 6 的余数是多少？

分析　直接求第 70 个数除以 6 的余数不容易，先求它除以 2 和除以 3 的余数．

解：设最后一个数为 x，先求 x 除以 2 的余数，列出下表观察规律：

原数	0	1	3	8	21	55	…
余数	0	1	1	0	1	1	…

我们发现这列数的规律是：

偶，奇，奇，偶，奇，奇，…

这个规律是可靠的，如果一个数左边两个数都是奇数，那么这个数就是奇数的3倍减去一个奇数，所以这个数一定是偶数，同样可以分析出，如果一个数左边两个数一奇一偶，那么这个数一定是奇数.

因为 $70\div3$ 余1，所以 x 是偶数，下面来求 x 除以3的余数，列出下表观察一下这列数除以3余数的规律：

原数	0	1	3	8	21	55	144 …
余数	0	1	0	2	0	1	0 …

因为每个数的3倍是它两边两个数之和，所以间隔一个数的两个数之和一定是3的倍数. 所以不难分析出这列数除以3的余数规律是：

0，1，0，2，0，1，0，2，…

又由于 $70\div4$ 余2，所以第70个数 x 除以3的余数为1.

我们已经知道 x 是一个除以3余1的偶数，所以 x 除以6应该余4.

我们还可以用带余除式推出这个结论，因为 x 除以3余1，所以 x 可以写成下式：

$x=3k+1$ （k 是自然数）

又因为 x 是偶数，所以 k 应是一个奇数，也就是说 k 被2除余1，写成带余除式就是：

$k=2m+1$ （m 是自然数）

综合两个式子就得到

$$x=3(2m+1)+1=6m+3+1=6m+4$$

因此，x 除以 6 余 4.

说明：本题的解法告诉我们，如果已知一个数除以两个数后各自的余数，那么应如何去求它除以这两个数的乘积的余数．作为练习请同学们完成下题.

已知某数除以 3 余 2，除以 4 余 3，求这个数除以 12 的余数是多少？

【例 12】　43 位同学，他们身上带的钱从 8 分到 5 角，钱数互不相同，每个同学都把身上带的全部钱各自买了画片，画片只有两种，3 分一张和 5 分一张，每人都尽量多买 5 分一张的画片，问他们共买了多少张 3 分的画片？

分析　本题实际上是要将 8 到 50 的所有自然数表示成若干个 3 与若干个 5 的和，其中 5 的个数要尽可能多．因为求的是 3 的个数，所以只要求出 8 至 12 的表示中有多少个 3 即可.

解：我们有：

$8=5+3$

$9=3+3+3$

$10=5+5$

$11=5+3+3$

$12=3+3+3+3$.

下面的表示式中 3 的个数不会再增加，只要在前面的表示中加 5 就可以了，例如.

$13=8+5=5+5+3$

$14=9+5=3+3+3+5$

等等

前五个式子中3的个数为：

$1+3+0+2+4=10$.

因为 $43\div5=8$ 余3，所以3的总个数为：

$10\times8+1+3+0=84$.

答：3分的画片共买了84张.

思考：

①本题中如果要求5分画片共买多少张应怎样做？

②如果本题改为让3分画片尽可能多，求5分画片共有多少张，应怎样做？

【例13】 有十个人各拿一只提桶同时到水龙头前排队打水. 设水龙头注满第一个人的桶需要1分钟，注满第二个人的桶需要2分钟，…，如此下去. 问：

①当只有一个水龙头时，应如何安排这十个人的次序，使他们总的费时为最少？这时间等于多少分钟？

②当只有两个水龙头可用时，应如何安排这十个人的次序，使他们总的花费时间为最少？这时间等于多少分钟？

分析 ①我们用 $A_1,A_2,\cdots,A_9,A_{10}$ 分别表示第一，第二，…，第九，第十个人，先考虑只有 A_1、A_2 两个人的情形.

如果 A_1 在前，A_2 在后，总共花费的时间为：

$1\times2+2\times1=4$（分钟）.

如果 A_2 在前，A_1 在后，总共花费的时间为：

$2\times2+1\times1=5$（分钟）.

因此，对两个人的情况，提小桶的人在前，提大桶的人在后，总共花费的时间最少，由此就不难知道十个

人如何排列，总费时最少.

②先考虑只有 A_1,A_2,A_3,A_4 四个人的情况．这时候可能的排列方法有以下几种：

$$1.\begin{cases}\text{甲龙头} & A_1\\ \text{乙龙头} & A_2A_3A_4\end{cases}$$

总费时 $=1\times1+2\times3+3\times2+4\times1=17$（分钟）

$$2.\begin{cases}\text{甲龙头} & A_2\\ \text{乙龙头} & A_1A_3A_4\end{cases}$$

总费时 $=2\times1+1\times3+3\times2+4\times1=15$（分钟）

$$3.\begin{cases}\text{甲龙头} & A_3\\ \text{乙龙头} & A_1A_2A_4\end{cases}$$

总费时 $=3\times1+1\times3+2\times2+4\times1=14$（分钟）

$$4.\begin{cases}\text{甲龙头} & A_4\\ \text{乙龙头} & A_1A_2A_3\end{cases}$$

总费时 $=4\times1+1\times3+2\times2+3\times1=14$（分钟）

$$5.\begin{cases}\text{甲龙头} & A_1A_2\\ \text{乙龙头} & A_3A_4\end{cases}$$

总费时 $=1\times2+2\times1+3\times2+4\times1=14$（分钟）

$$6.\begin{cases}\text{甲龙头} & A_1A_3\\ \text{乙龙头} & A_2A_4\end{cases}$$

总费时 $=1\times2+3\times1+2\times2+4\times1=13$（分钟）

通过比较发现，第 6 种方法最合理（甲龙头 A_1A_4、乙龙头 A_2A_3 费时与第 6 种方法一样多），下面就来分析十个人的排列方法.

解：①根据两个人的排队顺序规律，不难推测出多于 2 人的排队方法应是从 A_1 开始，按由小到大的顺序排队．因为在多于 2 人的排队方法中，如有二人不是从小

到大排列，只要交换这二人的位置，总费时必然减少，所以本题十个人的排队方法为：

$A_1, A_2, \cdots, A_9, A_{10}$

总共花费时间为：

$1\times10+2\times9+3\times8+4\times7+5\times6+6\times5+7\times4+8\times3+9\times2+10\times1$

$=(1\times10+2\times9+3\times8+4\times7+5\times6)\times2$

$=220$（分钟）.

②根据四个人的排队规律，不难分析出十个人的排队规律为：

甲龙头：A_1, A_3, A_5, A_7, A_9

乙龙头：$A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}$

总共花费时间：

$1\times5+3\times4+5\times3+7\times2+9\times1+2\times5+4\times4+6\times3+8\times2+10\times1$

$=125$（分钟）.

习题十四

1. 计算

① $3.85-1\frac{2}{7}-1\frac{5}{7}$

② $4\times7.38\times2.5$

③ $19\frac{27}{28}\times23$

④ $\frac{4}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{15}-\frac{1}{35}-\frac{1}{63}$

⑤ $3.9\times10.5\div(1.4\times0.9\times52)$

2. 某项工程，甲队独做 12 天完成，乙队独做 24 天

完成，若按整日安排两队工作，且两队合作的天数尽可能少，怎样安排才能使这项工作恰好 10 天完成，这样两队合做了几天？

3. 有一辆汽车，以某一固定的速度从甲地行驶至乙地，如果每小时比原定的行驶速度快 6 公里，就可以早到 5 分钟；如果每小时比原定的行驶速度慢 5 公里，就要迟到 6 分钟，求甲、乙两地的距离？

4. 一项工程甲独做 50 天可以完成，乙独做 75 天完成，现在二人合做，但中途乙因事离开了几天，从开工后 40 天把这个工程做完，问乙中途离开几天？

5. 从 1 到 1988 的自然数中，每次取两个不同的数，要使它们的和大于 1988 共有多少种取法？

6. A, B 二人的对话如下：

A 问：你有几个孩子？

B 答：3 个.

A 问：他们的年龄各是多少？

B 答：他们的年龄的积是 36，和恰好等于你家门牌号.

A 说：你的条件还不够.

B 说：老大现在上小学，其余两个还没上学.

请根据对话判断：三个孩子的年龄分别为多少岁？

7. 有一串数，第一个数是 1989，第二个数是 1988，以后每个数是它前边两个数的差（以大减小），问这串数的第 1989 个数是多少？

8. 有一天，三个小朋友在图书馆相会，其中一个说："现在我每隔一天来一次."第二个说："我每隔两天来一次."第三个说他每隔三天来一次，管理员告诉他们说，每逢星期三闭馆，小朋友说，如果预定来的日子正好是

闭馆日，那就次日来，从今天开始，他们按这个规律去图书馆，下一次在星期一他们三人又在图书馆相聚，问上次谈话是星期几？

习题十四解答

1.（1）0.85　（2）73.8　（3）$459\frac{5}{28}$

（4）0　（5）$\frac{5}{8}$.

2．解：设甲队做 x 天，乙队做 y 天，则有：

$\frac{x}{12}+\frac{y}{24}=1$，　且 $1\leqslant x, y\leqslant 10$

$\therefore\quad 2x+y=24, y=24-2x$

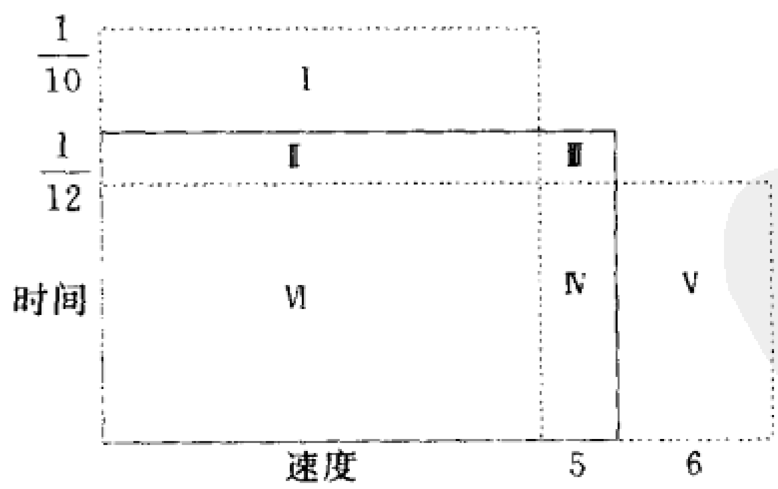
$\therefore\quad 1\leqslant 24-2x\leqslant 10 \quad\Rightarrow\quad 7\leqslant x\leqslant 10$

枚举如下：

① $\begin{cases}x=7\\y=10\end{cases}$　② $\begin{cases}x=8\\y=8\end{cases}$　③ $\begin{cases}x=9\\y=6\end{cases}$　④ $\begin{cases}x=10\\y=4\end{cases}$

按要求应取④，合做了 4 天.

3．解：画图分析：



$\mathrm{I}=\mathrm{III}+\mathrm{IV}$，$\mathrm{V}=\mathrm{II}+\mathrm{III}$，$\mathrm{III}=\frac{5}{12}$，$\mathrm{I}=\frac{6}{5}\mathrm{II}$，

$\mathrm{V}=\frac{6}{5}\mathrm{IV}$，

$$\therefore\quad \mathrm{I}=\frac{6}{5}\mathrm{II}=\frac{6}{5}\left(\mathrm{V}-\frac{5}{12}\right)$$

$$=\frac{6}{5}\left(\frac{6}{5}\mathrm{IV}-\frac{5}{12}\right)$$

$$=\frac{6}{5}\left[\frac{6}{5}\left(\mathrm{I}-\frac{5}{12}\right)-\frac{5}{12}\right]$$

$$=\frac{36}{25}\mathrm{I}-\frac{11}{10}.$$

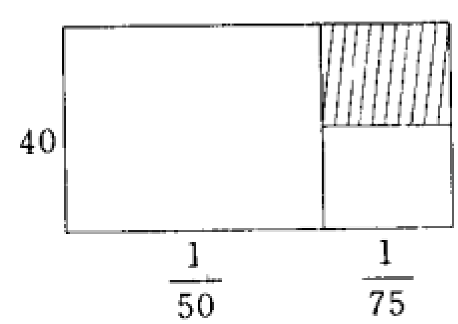
$\therefore\quad \frac{11}{25}\mathrm{I}=\frac{11}{10}\quad\therefore\quad \mathrm{I}=\frac{5}{2}$

原速度 $=\frac{5}{2}\div\frac{1}{10}+5=30$.

$\therefore\quad \mathrm{IV}+\frac{5}{12}=\frac{5}{2}\quad\therefore\quad$ 原时间 $=\frac{5}{2}\div5=\frac{1}{2}$小时

$\therefore\quad S_{甲乙}=30\times\frac{1}{2}=15$ 千米.

4．解：从右图不难知：



$[40\times(\frac{1}{50}+\frac{1}{75})-1]\div\frac{1}{75}$

$=25$ 天.

5．解：用枚举法：

$1+2+3+\cdots+994+\cdots+3+2+1=988036$.

6．解：枚举法．$xyz=36$ 的解：

(1，1，36)，(1，2，18)，(1，3，12)，(1，4，9)，

(1，6，6)，　(2，2，9)，　(2，3，6)，　(3，3，4)，

和相等的有 (2，2，9)，(1，6，6).

∴　应为 (2，2，9).

7．解：从特殊到一般分析：

1989，1988，1，1987，1986，1，…

$1989 \div 3 = 663 \cdots 0$，故所求的数为 1.

8. 列表倒推分析，知上次谈话是星期六.

星期	六	日	一	二	三	四	五	六	日	一
A		√	×	√	×	√	×	√	×	√
A	√	×	√	×	×	√	×	√	×	√
B	√	×	×	√	×	×	√	×	×	√
C		√	×	×	×	√	×	×	×	√
C	√	×	×	×	×	√	×	×	×	√

下册

第1讲　列方程解应用题

这一讲学习列方程解应用题.

【例 1】　甲乙两个数，甲数除以乙数商 2 余 17. 乙数的 10 倍除以甲数商 3 余 45. 求甲、乙二数.

分析　被除数、除数、商和余数的关系：被除数 = 除数 × 商 + 余数. 如果设乙数为 x, 则根据甲数除以乙数商 2 余 17，得甲数 $=2x+17$. 又根据乙数的 10 倍除以甲数商 3 余 45 得 $10x=3(2x+17)+45$, 列出方程.

解：设乙数为 x, 则甲数为 $2x+17$.

$10x=3(2x+17)+45$

$10x=6x+51+45$

$4x=96$

$x=24$

$2x+17=2\times24+17=65$.

答：甲数是 65，乙数是 24.

【例 2】　电扇厂计划 20 天生产电扇 1600 台. 生产 5 天后，由于改进技术，效率提高 25%，完成计划还要多少天?

思路 1：

分析　依题意，看到工效（每天生产的台数）和时间（完成任务需要的天数）是变量，而生产 5 天后剩下的台

数是不变量（剩余工作量）. 原有的工效：$1600\div20=80$（台），提高后的工效：$80\times(1+25\%)=100$（台）. 时间有原计划的天数，又有提高效率后的天数，因此列出方程的等量关系是：提高后的工效×所需的天数=剩下台数.

解：设完成计划还需 x 天.

$$1600\div20\times(1+25\%)\times x=1600-1600\div20\times5$$
$$80\times1.25x=1600-400$$
$$100x=1200$$
$$x=12.$$

答：完成计划还需 12 天.

思路 2：

分析　“思路 1”是从具体数量入手列出方程的. 还可以从“率”入手列方程. 已知“效率提高 25%”是指比原效率提高 25%. 把原来效率看成单位“1”，原计划 20 天完成，每天完成总数的$\frac{1}{20}$，5 天完成$\frac{1}{4}$，剩下的台数则占总数的 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

解：设完成计划还要 x 天.

$$\frac{1}{20}\times(1+25\%)\times x=1-\frac{1}{20}\times5$$
$$\frac{1}{16}x=\frac{3}{4}$$
$$x=12.$$

答：完成计划还需 12 天.

【例 3】　有一项工程，由甲单独做，需 12 天完成，丙单独做需 20 天完成. 甲、乙、丙合作，需 5 天完成. 如果这项工程由乙单独做，需几天完成？

分析　如果把全部工程看作单位"1"，则甲每天完成$\frac{1}{12}$，丙每天完成$\frac{1}{20}$. 若乙单独做完成这件工程用 x 天，则乙每天完成$\frac{1}{x}$, 甲、乙、丙合作一天完成 $(\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{20})$, 他们合作 5 天完成这项工程的 $(\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{20})\times 5$. 于是我们找到等量关系 $(\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{20})\times 5=1$, 即工作总量 = 工作总量.

解：设乙单独做，需 x 天完成这项工程.

$$(\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{20})\times 5=1$$

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{x}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$$

$$5+\frac{60}{x}+3=12$$

$$\frac{60}{x}=4$$

$$x=15.$$

答：乙单独做这项工程需 15 天完成.

【例 4】　中关村中学数学邀请赛中，中关村一、二、三小六年级大约有 380～450 人参赛. 比赛结果全体学生的平均分为 76 分，男、女生平均分数分别为 79 分、71 分. 求男、女生至少各有多少人参赛?

分析　若把男、女生人数分别设为 x 人和 y 人. 依题意全体学生的平均分为 76 分，男、女生平均分数分别为 79 分、71 分，可以确定等量关系：男生平均分数 × 男生人数 + 女生平均分数 × 女生人数 = (男生人数 + 女生人数) × 总平均分数. 解方程后可以确定男、女生人数的

比，再根据总人数的取值范围确定参加比赛的最少人数，从而使问题得解.

解：设参加数学邀请赛的男生有 x 人，女生有 y 人.

$$79x+71y=(x+y)\times 76$$

$$79x+71y=76x+76y$$

$$3x=5y$$

$\therefore \quad x:y=5:3$

总份数：$5+3=8$.

在 380～450 之间能被 8 整除的最小三位数是 384，所以参加邀请赛学生至少有 384 人.

男生：$384\times\frac{5}{8}=240$（人）

女生：$384\times\frac{3}{8}=144$（人）.

答：男生至少有 240 人参加，女生至少有 144 人参加.

【例 5】 瓶子里装有浓度为 15% 的酒精 1000 克. 现在又分别倒入 100 克和 400 克的 A、B 两种酒精，瓶子里的酒精浓度变为 14%. 已知 A 种酒精的浓度是 B 种酒精的 2 倍，求 A 种酒精的浓度.

分析 依题意，A 种酒精浓度是 B 种酒精的 2 倍. 设 B 种酒精浓度为 $x\%$，则 A 种酒精浓度为 $2x\%$. A 种酒精溶液 100 克，因此 $100\times 2x\%$ 为 100 克酒精溶液中含纯酒精的克数. B 种酒精溶液 400 克，因此 $400\times x\%$ 为 400 克酒精溶液中含纯酒精的克数.

解：设 B 种酒精浓度为 $x\%$，则 A 种酒精的浓度为 $2x\%$.

$$\frac{1000\times 15\%+100\times 2x\%+400\times x\%}{1000+100+400}=14\%$$

$$\frac{150+2x+4x}{1500}=14\%$$

$$150+6x=14\times 15$$

$$6x=60$$

$2x\%=2\times 10\%=20\%$.

答：A 种酒精的浓度为 20%.

【例 6】　有人用车把米从甲地运到乙地，装米的重车日行 50 里，空车日行 70 里，5 日往返三次. 问两地相距多少里？（选自《九章算术》）

分析　当你用算术法解这道题时会感到比较困难. 但用方程解这一算术“难题”就容易多了. 列方程解应用题的关键在于确定等量关系，确立等量关系还有一种常用的方法叫译式法，即把日常用语译成代数语言，通过列表可以看出列方程的过程.

日常的语言	代数的语言
两地相距多少里	x（里）
重车从甲地到乙地需要时间	$\frac{x}{50}$（日）
空车从乙地到甲地需要时间	$\frac{x}{70}$（日）
往返一次需要的时间	$\frac{x}{50}+\frac{x}{70}$（日）
5 日往返 3 次	$(\frac{x}{50}+\frac{x}{70})\times 3=5$

解：设两地相距 x 里.

$$3\times(\frac{x}{50}+\frac{x}{70})=5$$

$$\frac{3x}{50}+\frac{3x}{70}=5$$

$$21x+15x=1750$$

$$36x=1750$$

$$x=48\frac{11}{18}$$

答：甲乙两地相距 $48\frac{11}{18}$ 里.

【例 7】 设六位数 $\overline{1abcde}$ 乘以 3 以后变成 $\overline{abcde1}$，求六位数 $\overline{1abcde}$.

分析与解答 设五位数 $\overline{abcde}$ 为 x，则

$$\overline{1abcde}=100000+x$$

$$\overline{abcde1}=10x+1$$

依题意列方程：

$$3\times(100000+x)=10x+1$$

$$300000+3x=10x+1$$

$$7x=299999$$

$$x=42857$$

$\therefore\quad \overline{1abcde}=142857$.

【例 8】 兄弟二人三年后的年龄和是 26 岁，弟弟今年的年龄恰好是兄弟二人年龄差的 2 倍. 问，3 年后兄弟二人各几岁？

分析 设 3 年后哥哥年龄为 x 岁，弟弟年龄为 $(26-x)$ 岁. 则今年哥哥年龄为 $(x-3)$ 岁，弟弟年龄为 $(26-x-3)$ 岁，兄弟二人的年龄差是 $(x-3)-(26-x-3)$ 岁. 列方程的等量关系是：弟弟今年的年龄 = 兄弟二人年龄差的 2 倍.

解：设 3 年后哥哥 x 岁，则弟弟 3 年后的年龄是 $(26-x)$ 岁.

$$[(x-3)-(26-x-3)]\times2=26-x-3$$

$$[2x-26]\times2=23-x$$

$$4x-52=23-x$$
$$5x=75$$
$$x=15$$

$26-x=26-15=11$

答：3 年后哥哥年龄是 15 岁，弟弟 11 岁．

习　题　一

1．某工厂三个车间共有 180 人，第二车间人数是第一车间人数的 3 倍还多 1 人，第三车间人数是第一车间人数的一半少 1 人．三个车间各有多少人？

2．甲、乙两个容器共有溶液 2600 克，从甲容器中取出$\frac{1}{4}$，从乙容器中取出$\frac{1}{5}$，两个容器共剩溶液 2000 克，求两个容器原来各有溶液多少克？

3．25 支铅笔分给甲、乙、丙三人．乙分到的比甲的一半多 3 支，丙分到的比乙的一半多 3 支．问：甲、乙、丙三人各分到几支铅笔？

4．甲、乙共有图书 63 册，乙、丙共有图书 77 册．三人中图书最多的人的书数是图书最少的人的书数的 2 倍．问：甲、乙、丙三人各有图书多少册？

5．体育用品商店购进 50 个足球、40 个篮球，共 3000 元．零售时足球加价 9%，篮球加价 11%，全部卖出后获利润 298 元．问：每个足球、篮球进价各多少元？

6．王虎用 1 元钱买了油菜籽、西红柿籽和萝卜籽共 100 包．油菜籽 3 分钱一包，西红柿籽 4 分钱一包，萝卜籽 1 分钱 7 包．问王虎买进油菜籽、西红柿籽和萝卜籽各多少包？

习题一解答

1. 解：设第一车间有 x 人，则第二车间有 $(3x+1)$ 人，第三车间有 $(\frac{1}{2}x-1)$人.

$x+3x+1+\frac{1}{2}x-1=180.$

$x=40$

$3x+1=3\times40+1=121,$

$\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{2}\times40-1=19.$

答：第一车间有 40 人，第二车间有 121 人，第三车间有 19 人.

2. 解：设甲容器原有溶液 x 克，乙容器原有溶液 $(2600-x)$克.

$x\times(1-\frac{1}{4})+(2600-x)\times(1-\frac{1}{5})=2000$

$x=1600$

$2600-x=2600-1600=1000.$

答：甲容器原有溶液 1600 克，乙容器原有溶液 1000 克.

3. 提示：设甲有 x 支，乙分到的比甲的一半多 3 支，则乙有 $(\frac{1}{2}x+3)$支. 丙分到的比乙的一半多 3 支，则丙有$[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+3)+3]$支.

解：设甲有铅笔 x 支，则乙有铅笔 $(\frac{1}{2}x+3)$支，丙有铅笔 $[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+3)+3]$支.

$$x+\frac{1}{2}x+3+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+3)+3=25$$

$$1\frac{3}{4}x+\frac{15}{2}=25$$

$$x=10$$

$$\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{2}\times 10+3=8$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+3)+3=7.$$

答：甲、乙、丙各分得铅笔 10 支、8 支、7 支.

4. 提示：这道题要先推理后列方程. 关键是分析出甲、乙、丙三人中谁最多、谁最少. 依题意：甲 + 乙 = 63，乙 + 丙 = 77，两式相减得丙 − 甲 = 14. 题目中还给出图书最多的人的书数是图书最少的人的书数的 2 倍，也即它们的和是图书最少的人的 3 倍，又 $3\nmid 77$，所以不可能是乙和丙两人. 由丙大于甲，知丙不是最少. 若丙最多，甲最少. 设丙有图书 x 册，则由条件有：

$$x-\frac{x}{2}=14$$

$$x=28.$$

求出乙为 49 本，这样显然丙不是最多，也不是最少. 因此，乙最大，甲最小.

解：设甲有图书 x 册，则乙有图书 $2x$ 册

$$x+2x=63$$

$$x=21$$

$2x=42$　　　　$77-42=35.$

答：甲有图书 21 册，乙有图书 42 册，丙有图书 35 册.

5. 解：设每个足球进价 x 元，每个篮球进价 y 元.

$$\begin{cases}50x+40y=3000 & (1)\\ 9\%\cdot x\cdot 50+11\%\cdot y\cdot 40=298 & (2)\end{cases}$$

由（1）得　$5x+4y=300$　　(3)

由（2）得　$45x+44y=2980$　　(4)

用（4）-（3）×9 得　$8y=280$

$\therefore\quad y=35.$

把 $y=35$ 代入（3）得　$5x+4\times35=300$

$\therefore\quad x=32.$

答：每个足球进价 32 元，每个篮球进价 35 元.

6. 解：设买回油菜籽 x 包，西红柿籽 y 包，则萝卜籽为 $(100-x-y)$包.

$$3x+4y+\frac{1}{7}\times(100-x-y)=100$$

$$x=30-\frac{27y}{20}$$

依题意，x 的值一定是整数，那么$\frac{27}{20}y$ 也一定是整数，所以 y 必须是 20 的倍数.

当 $y=20$ 时，$x=3,100-x-y=77.$

当 $y\geqslant40$ 时，x 是负数，不合题意. 所以只能有一组解.

答：王虎买油菜籽 3 包，西红柿籽 20 包，萝卜籽 77 包.

第2讲　关于取整计算

在数学计算中，有时会略去某些量的小数部分，而只需求它的整数部分．比如，用 5 米长的花布做上衣，已知每件上衣需用布 2 米，求这块布料可以做几件上衣？$\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$，我们的答案取 $2\frac{1}{2}$的整数部分 2．又如，我们收水费时，为方便经常是忽略掉用水量的小数吨数，而是先按用水量的整数吨数收费把余量推至下一个月一起收．所以数学上引进了符号〔　〕①，使我们的表述简明．

$[a]$表示不超过 a 的最大整数，称为 a 的整数部分．

【例】：$[0]=0$，$[0.03]=0$，$[\frac{5}{2}]=2$，$[10.25]=10$，$[7]=7$，$[\frac{1}{3}]=0$．

$[a]$显然有以下性质：

① $[a]$是整数；

② $[x]\leqslant x$；

③ $x<[x]+1$；

④若 $b\geqslant1$，则 $[a+b]>[a]$；

若 $b\leqslant1$，则 $[a+b]\leqslant[a]+1$．

请你自己举些例子验证前三条性质．

性质④举例：a 取 2.7，则 $[a]=2$．

---

① 现在国际数学界还通用另一种代替本节〔　〕记号的符号，用⌊　⌋表示下整数，即⌊x⌋表示不大于 x 的最大整数，尤其在计算机科学界，⌊　⌋比之于〔　〕用的更多．

若 $b=1.1$，那么$[a+b]=[2.7+1.1]=3>2=[a]$.

若 $b=0.5$，那么$[a+b]=[2.7+0.5]=[3.2]=3=[a]+1$;

若 $b=0.1$，那么$[a+b]=[2.8]=2<[a]+1$.

$[a]$还有许多性质．例：若 n 是整数，则有：

$[a+n]=[a]+n$.

与 $[a]$相关的是数 a 的小数部分，我们用符号 $\{a\}$ 表示.

【例】 $\{0\}=0$， $\{0.03\}=0.03$， $\{\frac{5}{2}\}=\frac{1}{2}$，

$\{10.25\}=0.25$， $\{7\}=0$， $\{\frac{1}{3}\}=\frac{1}{3}$.

显然，$a=[a]+\{a\}$，而且 $0\leqslant\{a\}<1$.

下面我们应用取整符号 $[\ \ ]$ 解题.

例 1　判断正误：若 $2x+3[x]=1$. 则 $\{x\}=0$.

解：不正确.

假设 $\{x\}=0$，则：$[x]=x$.

原式为：$2[x]+3[x]=1$，$5[x]=1$，

$[x]=\frac{1}{5}$，矛盾.

【例 2】　求 1～1993 中可被 2 或 3 或 5 整除的整数的个数.

分析　我们知道，自然数中不超过 x 的 n 的倍数的个数是 $[\frac{x}{n}]$. 所以 1～1993 中能被 2、3、5 整除的数分别有 $[\frac{1993}{2}]=996$(个)，$[\frac{1993}{3}]=664$(个)，$[\frac{1993}{5}]=398$(个). 但若把这三个数相加，作为答案就多了，因为有些数被重复计算了．例如 6 及其倍数，既是 2 的倍数，又

是 3 的倍数，被计算了两次．同理，重复计算两次的数还有 10 及它的倍数和 15 及它的倍数，一共有 $\left[\frac{1993}{6}\right]+\left[\frac{1993}{10}\right]+\left[\frac{1993}{15}\right]=663$（个）要从和中减去．进一步还要考虑 30 及它的倍数，它们既是 2、3 与 5 的公倍数，也是 6、10 与 15 的公倍数．开始计算了三次，后来又减去了三次，所以要补上．

解：合题意的数有：

$$\left[\frac{1993}{2}\right]+\left[\frac{1993}{3}\right]+\left[\frac{1993}{5}\right]-\left[\frac{1993}{6}\right]-\left[\frac{1993}{10}\right]-\left[\frac{1993}{15}\right]+\left[\frac{1993}{30}\right]$$
$$=2058-663+66$$
$$=1461(\text{个}).$$

【例 3】　求 $\left[\frac{3\times 1}{11}\right]+\left[\frac{3\times 2}{11}\right]+\cdots+\left[\frac{3\times 10}{11}\right]$ 的值．

分析　加法运算中常用高斯求和法简算．求 $[x]$ 的基本方法是根据定义 $x=[x]+\{x\}$．要善于观察特殊值．

解：$\because$　$\left[\frac{3\times 1}{11}\right]+\left[\frac{3\times 10}{11}\right]$ 是整数，$\frac{3\times 1}{11}+\frac{3\times 10}{11}=3$ 也是整数，

而 $\frac{3\times 1}{11}+\frac{3\times 10}{11}=\left[\frac{3\times 1}{11}\right]+\left[\frac{3\times 10}{11}\right]+\left\{\frac{3\times 1}{11}\right\}+\left\{\frac{3\times 10}{11}\right\}$，

$\therefore$　$\left\{\frac{3\times 1}{11}\right\}+\left\{\frac{3\times 10}{11}\right\}$ 是整数，又因

$0<\left\{\frac{3\times 1}{11}\right\}<1$，　$0<\left\{\frac{3\times 10}{11}\right\}<1$，

$\therefore$　$0<\left\{\frac{3\times 1}{11}\right\}+\left\{\frac{3\times 10}{11}\right\}<2$，

在 0 至 2 之间的整数只有 1．

$\therefore\quad \{\frac{3\times1}{11}\}+\{\frac{3\times10}{11}\}=1$

$\therefore\quad [\frac{3\times1}{11}]+[\frac{3\times10}{11}]=3-1=2.$

同理　$[\frac{3\times2}{11}]+[\frac{3\times9}{11}]=2,\cdots,[\frac{3\times5}{11}]+[\frac{3\times6}{11}]=2.$

$\therefore\quad [\frac{3\times1}{11}]+[\frac{3\times2}{11}]+\cdots+[\frac{3\times10}{11}]=10.$

【例 4】　求满足方程 $[x]+[2x]=19$ 的 x 的值.

分析　解这道题的关键是由 $x=[x]+\{x\}$ 求 $2x$ 的整数部分和小数部分.

解：因为 $x=[x]+\{x\}$,

则　$2x=2[x]+2\{x\}.$

$[2x]=[2[x]+2\{x\}]$

$\quad=2[x]+[2\{x\}].$

因 $0\leqslant\{x\}<1$, $\therefore$　$0\leqslant2\{x\}<2.$

现在对$\{x\}$分段来讨论：

①当 $0\leqslant\{x\}<\frac{1}{2}$时，

$0\leqslant2\{x\}<1$,

这时$[2x]=2[x]$,

原方程化为：$3[x]=19,[x]=\frac{19}{3}$,

此时无解.

②当$\frac{1}{2}\leqslant\{x\}<1$ 时，　$1\leqslant2\{x\}<2$,

这时$[2x]=2[x]+1$,原方程化为：$3[x]+1=19$,

$\therefore$　$3[x]=18$,

$\therefore$　$[x]=6.$

故满足原方程的 x 为大于或等于 $6\frac{1}{2}$，且小于 7 的

数，即 $6\frac{1}{2}\leqslant x<7$.

说明：此题运用了适当分类讨论的数学思想.

【例 5】 问下面一列数中共出现了多少个互不相同的数？

$$\left[\frac{1^2}{1993}\right],\left[\frac{2^2}{1993}\right],\cdots,\left[\frac{1993^2}{1993}\right]$$

分析 首先要考虑由已知条件我们能推出什么？

①可推知这一列数的第一项 $\left[\frac{1^2}{1993}\right]=0$，第二项 $\left[\frac{2^2}{1993}\right]=0$，一共有 1993 个数，最后一项 $\left[\frac{1993^2}{1993}\right]=1993$.

②可推知这一列数不等于同一个数，但也不是互不相同.

③可推知这一列数是逐渐增大的，即

$$\left[\frac{1^2}{1993}\right]\leqslant\left[\frac{2^2}{1993}\right]\leqslant\cdots\leqslant\left[\frac{1993^2}{1993}\right].$$

④考虑利用公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 分析项的变化.

因 $\left[\frac{(k+1)^2}{1993}\right]=\left[\frac{k^2}{1993}+\frac{2k+1}{1993}\right]$，根据性质 4，

若 $\frac{2k+1}{1993}>1$，则这列数的相邻两项有关系：

$$\left[\frac{k^2}{1993}\right]<\left[\frac{k^2}{1993}+\frac{2k+1}{1993}\right].$$

若 $\frac{2k+1}{1993}\leqslant1$，则这列数的相邻两项有关系：

$\left[\frac{k^2}{1993}\right]+1\geqslant\left[\frac{k^2}{1993}+\frac{2k+1}{1993}\right]$，即相邻两项或相等或是相邻自然数.

关键在确定 k.

解：数列的第 k 项是 $[\frac{k^2}{1993}]$，$k=1$、2、…、1993.

由 $\frac{2k+1}{1993}>1$ 得 $2k+1>1993$，

也就是 $k>996$.

这说明当 $k>996$ 时，$\frac{2k+1}{1993}>1$.

由分析知从 $[\frac{997^2}{1993}]$ 至最后一项 $[\frac{1993^2}{1993}]$ 互不相同，共有 $1993-997+1=997$（个）.

而当 $k\leqslant 996$ 时，前 996 项的相邻两项相等或差 1.因知第一项 $[\frac{1^2}{1993}]=0$，又第 996 项 $[\frac{996^2}{1993}]=497$，所以共有 $497+1=498$ 个不同的数.

综上所述，这一列数共有 $997+498=1495$ 个不同的数.

【例 6】 设 $A=100!=12^n\cdot M$，其中 M、n 均是自然数.则 n 最大取多少？

解：$\because$ $12=2^2\times 3$，

而 A 中因数 2 有 $[\frac{100}{2}]+[\frac{100}{2^2}]+\cdots+[\frac{100}{2^6}]=97$ 个，

A 中因数 3 有 $[\frac{100}{3}]+[\frac{100}{3^2}]+[\frac{100}{3^3}]+[\frac{100}{3^4}]=48$ 个.

$\therefore$ $A=2^{48\times 2+1}\cdot 3^{48}\cdot k=2\cdot(12)^{48}\cdot k=12^{48}\cdot M$，

其中 $12\nmid M$.

$\therefore$ n 最大取 48.

习　题　二

1. 在 1～10000 这一万个自然数中，有多少个数能够被 5 或 7 整除？

2. 已知：$S=\left[\dfrac{199\times 1}{97}\right]+\left[\dfrac{199\times 2}{97}\right]+\cdots+\left[\dfrac{199\times 96}{97}\right]$

求：$S=?$

3. 求满足方程 $[x]+[2x]=18$ 的 x 的值.

4. k 是自然数，且

$$\frac{1001\cdot 1002\cdot\cdots\cdot 1985\cdot 1986}{11^k}$$

是整数，k 的最大值是多少？

习题二解答

1．解：在 1～10000 这一万个自然数中，能被 5 或 7 整除的数有 $\left[\frac{10000}{5}\right]+\left[\frac{10000}{7}\right]-\left[\frac{10000}{35}\right]=3143$ 个．

2．解：∵ $\left[\frac{199\times1}{97}\right]+\left[\frac{199\times96}{97}\right]$是整数，

$\frac{199\times1}{97}+\frac{199\times96}{97}=199$（整数）．

而 $\left[\frac{199\times1}{97}\right]+\left[\frac{199\times96}{97}\right]+\left\{\frac{199\times1}{97}\right\}+\left\{\frac{199\times96}{97}\right\}$

$=\frac{199\times1}{97}+\frac{199\times96}{97}$．

∴ $\left\{\frac{199\times1}{97}\right\}+\left\{\frac{199\times96}{97}\right\}$是整数．

又 $0<\left\{\frac{199\times1}{97}\right\}<1$，$0<\left\{\frac{199\times96}{97}\right\}<1$，

∴ $0<\left\{\frac{199\times1}{97}\right\}+\left\{\frac{199\times96}{97}\right\}<2$

可得 $\left\{\frac{199\times1}{97}\right\}+\left\{\frac{199\times96}{97}\right\}=1$

∴ $\left[\frac{199\times1}{97}\right]+\left[\frac{199\times96}{97}\right]=198$

同理 $\left[\frac{199\times2}{97}\right]+\left[\frac{199\times95}{97}\right]=198$，…，

$\left[\frac{199\times48}{97}\right]+\left[\frac{199\times49}{97}\right]=198$．

∴ $S=198\times48=9504$．

3．解：∵ $x=[x]+\{x\}$，　$2x=2[x]+2\{x\}$，

∴ $[2x]=2[x]+[2\{x\}]$

若 $0\leqslant\{x\}<\frac{1}{2}$，　则 $0\leqslant2\{x\}<1$，

原方程化为 $3[x]=18$，　　$[x]=6$，

∴　$6\leqslant x<6\frac{1}{2}$.

若 $\frac{1}{2}\leqslant\{x\}<1$，　　则 $1\leqslant 2\{x\}<2$

原方程化为 $3[x]+1=18$，显然此时无解.

∴　适合方程的 x 为 $6\leqslant x<6\frac{1}{2}$.

4. 解：由已知条件推知，k 的最大值 $=1001\cdot1002\cdot\cdots\cdot1985\cdot1986$ 中因子 11 的个数，也就是 11 的幂次数.

∵　$1001\cdot1002\cdot\cdots\cdot1985\cdot1986=1986!\div1000!$

而 1986! 中因子 11 的幂次数为：

$\left[\frac{1986}{11}\right]+\left[\frac{1986}{11^2}\right]+\left[\frac{1986}{11^3}\right]=180+16+1=197$，

1000! 中因子 11 的幂次数为：

$\left[\frac{1000}{11}\right]+\left[\frac{1000}{11^2}\right]=90+8=98$.

∴　k 的最大值为 $197-98=99$.

第3讲　最短路线问题

通常最短路线问题是以“平面内连结两点的线中，直线段最短”为原则引申出来的．人们在生产、生活实践中，常常遇到带有某种限制条件的最近路线即最短路线问题．

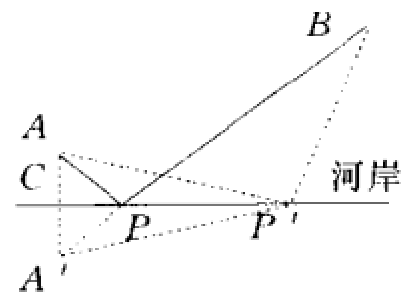
在本讲所举的例中，如果研究问题的限制条件允许已知的两点在同一平面内，那么所求的最短路线是线段；如果它们位于凸多面体的不同平面上，而允许走的路程限于凸多面体表面，那么所求的最短路线是折线段；如果它们位于圆柱和圆锥面上，那么所求的最短路线是曲线段；但允许上述哪种情况，它们都有一个共同点：当研究曲面仅限于可展开为平面的曲面时，例如圆柱面、圆锥面和棱柱面等，将它们展开在一个平面上，两点间的最短路线则是连结两点的直线段．

这里还想指出的是，我们常遇到的球面是不能展成一个平面的．例如，在地球（近似看成圆球）上 A、B 二点之间的最短路线如何求呢？我们用过 A、B 两点及地球球心 O 的平面截地球，在地球表面留下的截痕为圆周（称大圆），在这个大圆周上 A、B 两点之间不超过半个圆周的弧线就是所求的 A、B 两点间的最短路线，航海上叫短程线．关于这个问题本讲不做研究，以后中学会详讲．

在求最短路线时，一般我们先用“对称”的方法化成两点之间的最短距离问题，而两点之间直线段最短，

从而找到所需的最短路线. 像这样将一个问题转变为一个和它等价的问题，再设法解决，是数学中一种常用的重要思想方法.

【例 1】　如右图，侦察员骑马从 A 地出发，去 B 地取情报. 在去 B 地之前需要先饮一次马，如果途中没有重要障碍物，那么侦察员选择怎样的路线最节省时间，请你在图中标出来.



解：要选择最节省时间的路线就是要选择最短路线.

作点 A 关于河岸的对称点 A'，即作 AA' 垂直于河岸，与河岸交于点 C，且使 $AC = A'C$，连接 $A'B$ 交河岸于一点 P，这时 P 点就是饮马的最好位置，连接 PA，此时 $PA + PB$ 就是侦察员应选择的最短路线.

证明：设河岸上还有异于 P 点的另一点 P'，连接 $P'A$，$P'B$，$P'A'$.

$\because$　$P'A + P'B = P'A' + P'B > A'B = PA' + PB = PA + PB$，

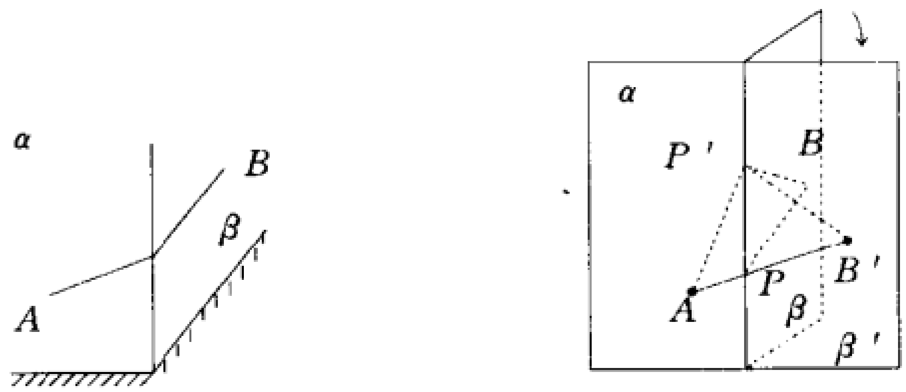
而这里不等式 $P'A' + P'B > A'B$ 成立的理由是连接两点的折线段大于直线段，所以 $PA + PB$ 是最短路线.

此例利用对称性把折线 APB 化成了易求的另一条最短路线即直线段 $A'B$，所以这种方法也叫做化直法，其他还有旋转法、翻折法等. 看下面例题.

【例 2】　如下页左图一只壁虎要从一面墙壁 α 上 A 点，爬到邻近的另一面墙壁 β 上的 B 点捕蛾，它可以沿许多路径到达，但哪一条是最近的路线呢?

解：我们假想把含 B 点的墙 β 顺时针旋转 $90°$（如下页右图），使它和含 A 点的墙 α 处在同一平面上，此时 β 转过来的位置记为 β'，B 点的位置记为 B'，则 A、B' 之间

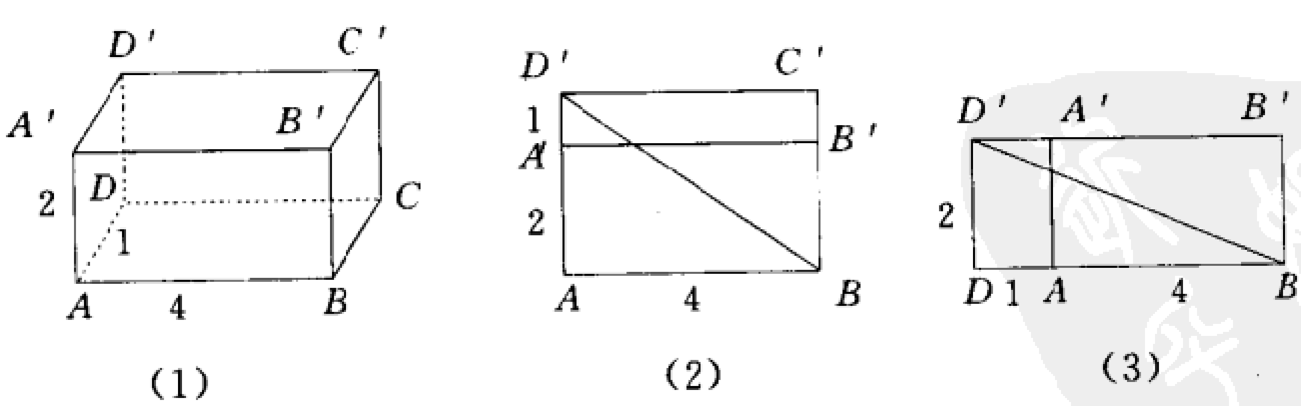
最短路线应该是线段 AB'，设这条线段与墙棱线交于一点 P，那么，折线 APB 就是从 A 点沿着两扇墙面走到 B 点的最短路线.



证明：在墙棱上任取异于 P 点的 P' 点，若沿折线 $AP'B$ 走，也就是沿在墙转 90°后的路线 $AP'B'$ 走都比直线段 APB' 长，所以折线 APB 是壁虎捕蛾的最短路线.

由此例可以推广到一般性的结论：想求相邻两个平面上的两点之间的最短路线时，可以把不同平面转成同一平面，此时，把处在同一平面上的两点连起来，所得到的线段还原到原始的两相邻平面上，这条线段所构成的折线，就是所求的最短路线.

【例 3】 长方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中，$AB=4$，$A'A=2'$，$AD=1$，有一只小虫从顶点 D' 出发，沿长方体表面爬到 B 点，问这只小虫怎样爬距离最短？（见图（1））



解：因为小虫是在长方体的表面上爬行的，所以必需把含 D'、B 两点的两个相邻的面"展开"在同一平面上，在这个"展开"后的平面上 $D'B$ 间的最短路线就是连结这两点的直线段，这样，从 D' 点出发，到 B 点共有六条路线供选择.

①从 D' 点出发，经过上底面然后进入前侧面到达 B 点，将这两个面摊开在一个平面上（上页图（2）），这时在这个平面上 D'、B 间的最短路线距离就是连接 D'、B 两点的直线段，它是直角三角形 ABD' 的斜边，根据勾股定理，

$D'B^2 = D'A^2 + AB^2 = (1+2)^2 + 4^2 = 25$，$\therefore \quad D'B = 5$.

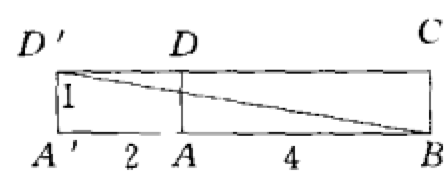
②容易知道，从 D' 出发经过后侧面再进入下底面到达 B 点的最短距离也是 5.

③从 D' 点出发，经过左侧面，然后进入前侧面到达 B 点. 将这两个面摊开在同一平面上，同理求得在这个平面上 D'、B 两点间的最短路线（上页图（3）），有：

$D'B^2 = 2^2 + (1+4)^2 = 29$.

④容易知道，从 D' 出发经过后侧面再进入右侧面到达 B 点的最短距离的平方也是 29.

⑤从 D' 点出发，经过左侧面，然后进入下底面到达 B 点，将这两个平面摊开在同一平面上，同理可求得在这个平面上 D'、B 两点间的最短路线（见图），有



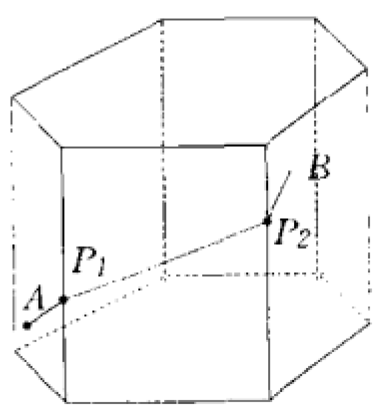
$D'B^2 = (2+4)^2 + 1^2 = 37$.

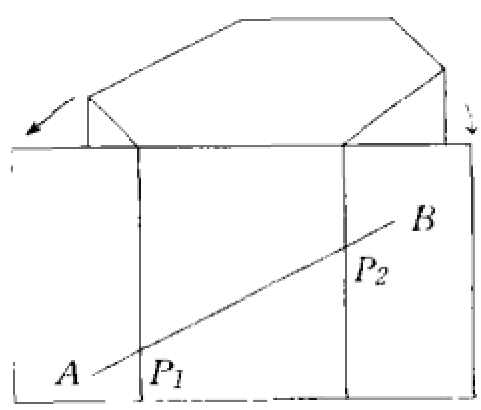
⑥容易知道，从 D' 出发经过上侧面再进入右侧面到达 B 点的最短距离的平方也是 37.

比较六条路线，显然情形①、②中的路线最短，所

以小虫从 D' 点出发，经过上底面然后进入前侧面到达 B 点（上页图（2）），或者经过后侧面然后进入下底面到达 B 点的路线是最短路线，它的长度是 5 个单位长度.

利用例 2、例 3 中求相邻两个平面上两点间最短距离的旋转、翻折的方法，可以解决一些类似的问题，例如求六棱柱两个不相邻的侧面上 A 和 B 两点之间的最短路线问题（下左图），同样可以把 A、B 两点所在平面及与这两个平面都相邻的平面展开成同一个平面（下右图），连接 A、B 成线段 AP_1P_2B, P_1、P_2 是线段 AB 与两条侧棱线的交点，则折线 AP_1P_2B 就是 AB 间的最短路线.

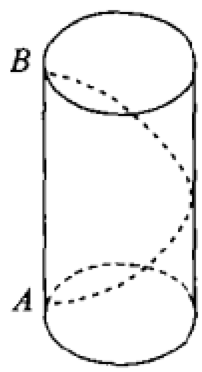


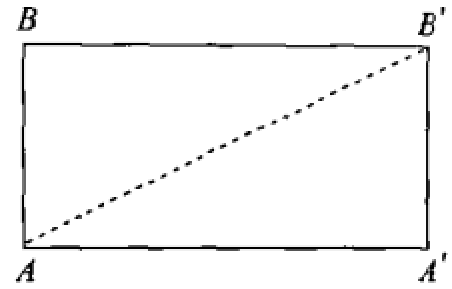


圆柱表面的最短路线是一条曲线，“展开”后也是直线，这条曲线称为螺旋线. 因为它具有最短的性质，所以在生产和生活中有着很广泛的应用. 如：螺钉上的螺纹，螺旋输粉机的螺旋道，旋风除尘器的导灰槽，枪膛里的螺纹等都是螺旋线，看下面例题.

【例 4】 景泰蓝厂的工人师傅要给一个圆柱型的制品嵌金线，如下左图，如果将金线的起点固定在 A 点，绕一周之后终点为 B 点，问沿什么线路嵌金线才能使金线的用量最少?

解：将上左图中圆柱面沿母线 AB 剪开，展开成平面图形如上页右图（把图中的长方形卷成上页左图中的

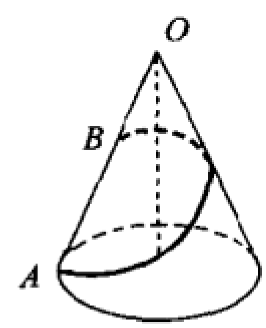




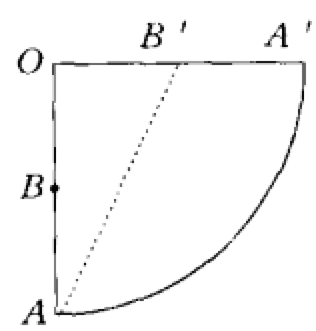
圆柱面时，A'、B'分别与 A、B 重合），连接 AB'，再将上页右图还原成上页左图的形状，则 AB'在圆柱面上形成的曲线就是连接 AB 且绕一周的最短线路.

圆锥表面的最短路线也是一条曲线，展开后也是直线. 请看下面例题.

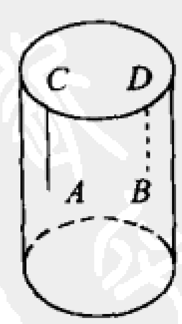
【例 5】　有一圆锥如右图，A、B 在同一母线上，B 为 AO 的中点，试求以 A 为起点，以 B 为终点且绕圆锥侧面一周的最短路线.



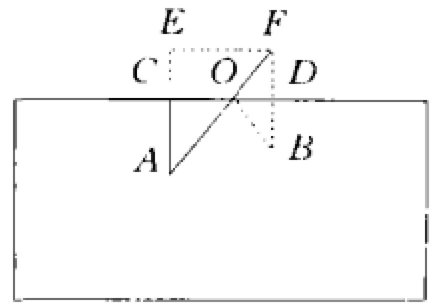
解：将圆锥面沿母线 AO 剪开，展开如右图（把右图中的扇形卷成上图中的圆锥面时，A'、B'分别与 A、B 重合），在扇形中连 AB'，则将扇形还原成圆锥之后，AB'所成的曲线为所求.



【例 6】　如右图，在圆柱形的桶外，有一只蚂蚁要从桶外的 A 点爬到桶内的 B 点去寻找食物，已知 A 点沿母线到桶口 C 点的距离是 12 厘米，B 点沿母线到桶口 D 点的距离是 8 厘米，而 C、D 两点之间的（桶口）弧长是 15 厘米. 如果蚂蚁爬行的是最短路线，应该怎么走？路程总长是多少？



分析 我们首先想到将桶的圆柱面展开成矩形平面图（右图），由于 B 点在里面，不便于作图，设想将 BD 延长到 F，使 $DF=BD$，即以直线 CD 为对称轴，作出点 B 的对称点 F，用 F 代替 B，即可找出最短路线了.



解：将圆柱面展成平面图形（上页图），延长 BD 到 F，使 $DF=BD$，即作点 B 关于直线 CD 的对称点 F，连结 AF，交桶口沿线 CD 于 O.

因为桶口沿线 CD 是 B、F 的对称轴，所以 $OB=OF$，而 A、F 之间的最短线路是直线段 AF，又 $AF=AO+OF$，那么 A、B 之间的最短距离就是 $AO+OB$，故蚂蚁应该在桶外爬到 O 点后，转向桶内 B 点爬去.

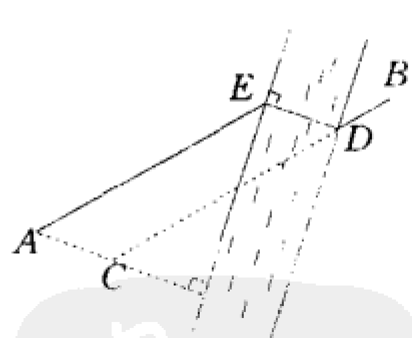
延长 AC 到 E，使 $CE=DF$，易知 $\triangle AEF$ 是直角三角形，AF 是斜边，$EF=CD$，根据勾股定理，

$$AF^2=(AC+CE)^2+EF^2$$

$$=(12+8)^2+15^2=625=25^2\text{，解得}\quad AF=25.$$

即蚂蚁爬行的最短路程是 25 厘米.

【例 7】 A、B 两个村子，中间隔了一条小河（如右图），现在要在小河上架一座小木桥，使它垂直于河岸. 请你在河的两岸选择合适的架桥地点，使 A、B 两个村子之间路程最短.

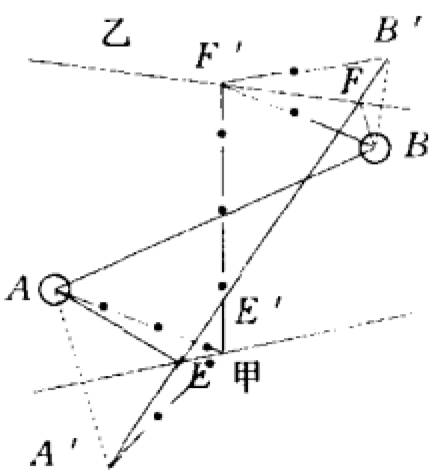


分析 因为桥垂直于河岸，所以最短路线必然是条折线，直接找出这条折线很困难，于是想到要把折线化为直线. 由于桥的长度相当于河宽，而河宽是定值，所以桥长是定值. 因此，从 A 点作河岸的垂线，并在垂线

上取 AC 等于河宽，就相当于把河宽预先扣除，找出 B、C 两点之间的最短路线，问题就可以解决.

解：如上图，过 A 点作河岸的垂线，在垂线上截取 AC 的长为河宽，连结 BC 交河岸于 D 点，作 DE 垂直于河岸，交对岸于 E 点，D、E 两点就是使两村行程最短的架桥地点. 即两村的最短路程是 $AE+ED+DB$.

【例 8】　在河中有 A、B 两岛（如右图），六年级一班组织一次划船比赛，规则要求船从 A 岛出发，必须先划到甲岸，又到乙岸，再到 B 岛，最后回到 A 岛，试问应选择怎样的路线才能使路程最短？

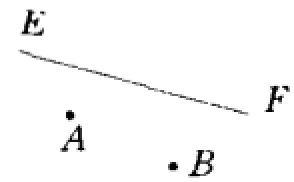


解：如上图，分别作 A、B 关于甲岸线、乙岸线的对称点 A' 和 B'，连结 A'、B' 分别交甲岸线、乙岸线于 E、F 两点，则 $A \to E \to F \to B \to A$ 是最短路线，即最短路程为：$AE+EF+FB+BA$.

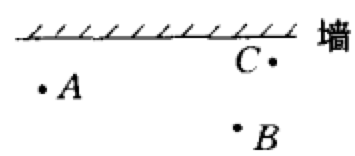
证明：由对称性可知路线 $A \to E \to F \to B$ 的长度恰等于线段 $A'B'$ 的长度. 而从 A 岛到甲岸，又到乙岸，再到 B 岛的任意的另一条路线，利用对称方法都可以化成一条连接 A'、B' 之间的折线，它们的长度都大于线段 $A'B'$，例如上图中用"·—·—·"表示的路线 $A \to E' \to F' \to B$ 的长度等于折线 $AE'F'B$ 的长度，它大于 $A'B'$ 的长度，所以 $A \to E \to F \to B \to A$ 是最短路线.

习　题　三

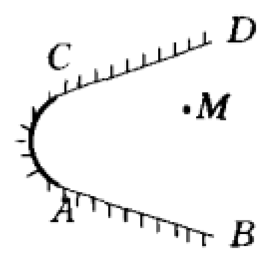
1. 如右图，EF 为一河流的河岸线，假设成一条直线，A、B 是河中两个小岛，有一只船经常从 A 岛把水产运回岸上，再把食品等物运回 B 岛，再由 B 岛将水产运上岸上，最后由岸上将食品等物运回 A 岛，问转运码头应设在何处，才能使运输船的航程最短.



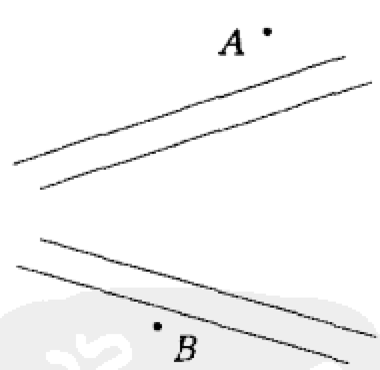
2. 少先队一小队组织一次有趣的赛跑比赛，规则是从 A 点出发（见右图），跑到墙边，用手触摸墙壁，然后跑到 B 点. 接着，离 B 点再次跑到墙边手触摸墙壁后，跑到 C 点. 问选择怎样的路线最节省时间，请你在图中标出来.



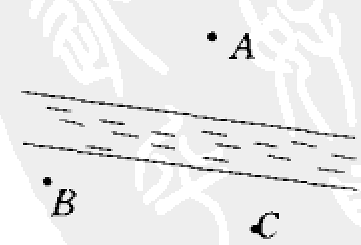
3. 如右图，在河弯处 M 点有个观测站，观测员要从 M 点出，先到 AB 岸，再到 CD 岸，然后返回 M 点，问船应该走什么路线最短？



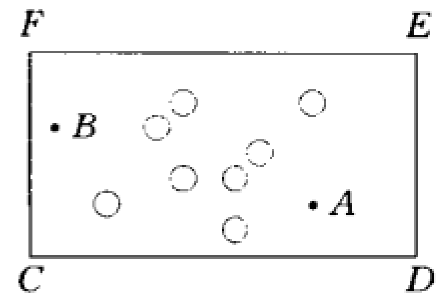
4. 如右图，A、B 两个村子之间隔了两条河，两条河的宽度相同，为了使两个村子之间的行程最短，在这两条河上架桥的时候，应该把桥架在哪里？（两座桥分别垂直于两条河的河岸.）



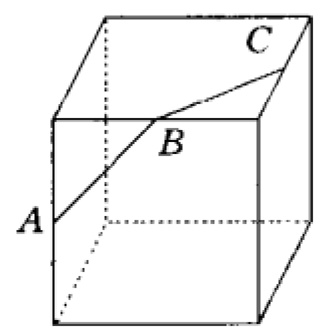
5. 如下图，在河的两岸共有三个小镇 A、B、C. 问应在河的什么位置架两座桥，使两岸人们来往路程最短？（两座桥都垂直于河岸.）



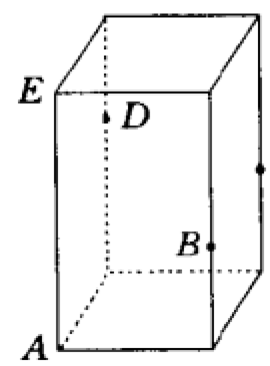
6. 如右图是一张台球桌子，桌子上球 A 与球 B 之间有其它球阻隔．现在要击 A 球，经桌边 CD、CF 两次反射再碰到 B 球，请你画出 A 球行走的最短路线．



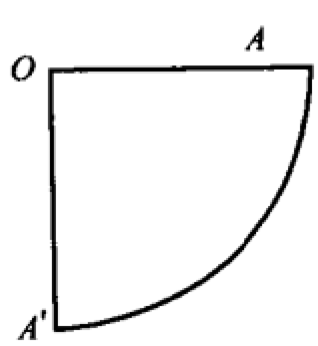
7. 如右图，A、B、C 三点分别是正方体三条棱的中点，一只小虫沿着正方体的表面从点 A 爬到点 C，图中所示路线是否为小虫爬行的最短路线？

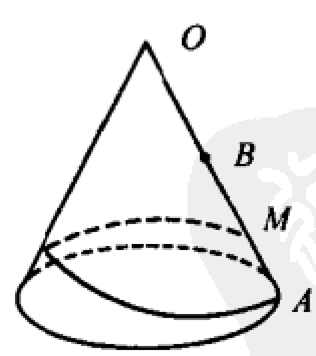


8. 如右图，A、E 为长方体同一棱上的两个顶点，且 $AE=8$，底面为边长是 2 的正方形，B、C、D 分别到底面距离为 2、4、6，连接 AB、BC、CD、DE，则折线 $ABCDE$ 为以 A 为起点，以 E 为终点绕棱柱侧面一周最短的路线，请说明理由．



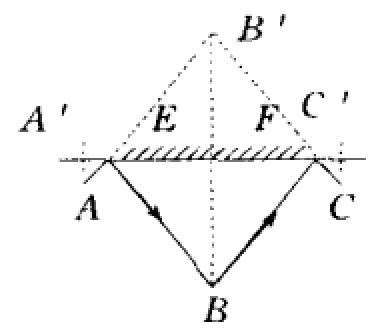
9. ⊙ O 的半径为 8 厘米，扇形 OAA' 是⊙ O 的四分之一（下左图），把扇形 OAA' 卷成圆锥面（下右图），取母线 OA 中点 B 及 AB 中点 M．从 M 拉一绳子，围绕圆锥面转到下底面 A 点（下右图），试求此绳的最短长度．





习题三解答

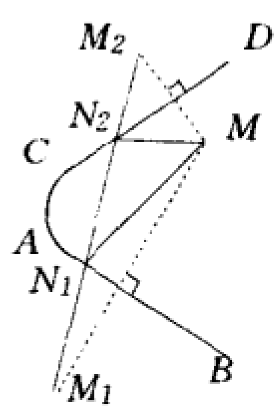
1. 作点 A 关于 EF 的对称点 A' 点，连结 A' 点、B 点交 EF 于 P 点，则 P 点即为所求，它就是转运码头应设的位置.



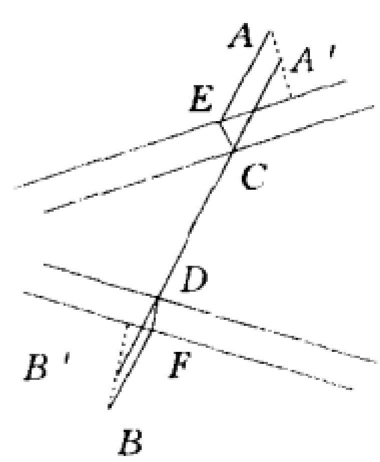
2. 解法 1：分别作 A、C 关于墙线的对称点 A'、C'，分别连结 A'、B 和 C'、B，它们分别交墙线于 E、F 两点，

则　$A \to E \to B \to F \to C$ 即最短路线.

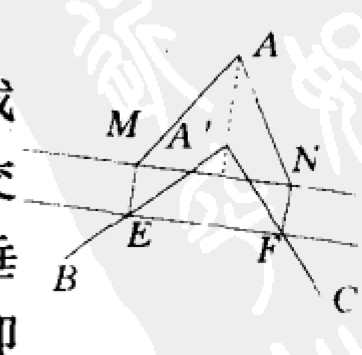
解法 2：作 B 关于墙线的对称点 B'，连结 A、B'，C、B'，它们交于墙线处也为 E、F 点，最短路线同解法 1.



3. 分别作 M 点关于 AB、CD 的对称点 M_1、M_2，连结 M_1M_2 分别交 AB、CD 于 N_1、N_2 两点，连结 MN_1、MN_2，则 $MN_1+N_1N_2+N_2M$ 就是最短路程.



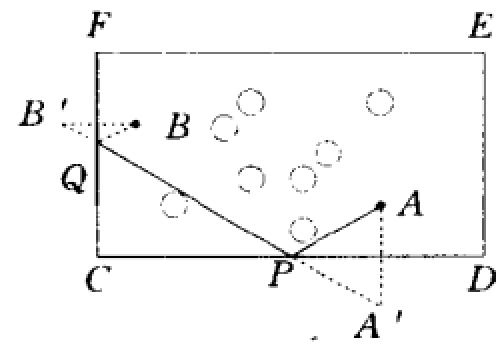
4. 过 A、B 分别向两条河作垂线，并截取 $AA'=BB'$ 等于河宽，连结 A'、B' 分别交两相邻河岸于 C、D 两点，分别过 C、D 两点向两条河的另一岸作垂线，分别交另一岸于 E、F 两点，CE、DF 即架桥位置.



5. 过 A 作河岸线垂线，并在其上截取 AA' 等于河宽，连结 $A'B$ 和 $A'C$，分别交河岸于 E、F 两点，过 E、F 分别作河岸垂线交另一岸于 M、N 两点，则 EM、FN 即

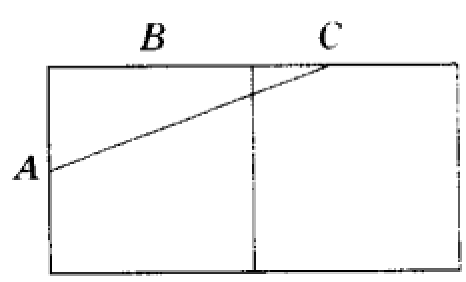
为架桥位置.

6. 分别作 A、B 关于 CD、CF 的对称点 A'、B'，连结 $A'B'$，交 CD、CF 于 P、Q 两点，则 $AP \to PQ \to QB$ 就是 A 球所走的最短路线.

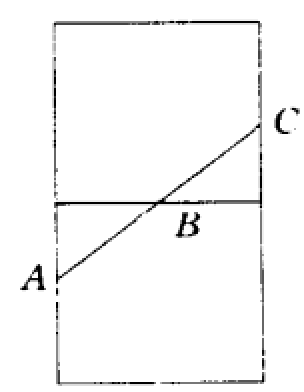


7. 共有三种路线可供选择.

第一，如图甲，把前面和右侧面展开在平面上，连结 AC. 若设正方体边长为 2，由勾股定理可求得 $AC^2 = 1^2 + (2+1)^2 = 10$；第二，$A$ 经左面至上面到 C，易知其最短距离的平方也为 10；第三，如图乙，把前面和上面展开在平面上，连结 AC，(B 在线段 AC 上)，同理求得 $AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$，所以第三种路线，即题中所示路线，是沿正方体表面从 A 到 C 的最短路线.

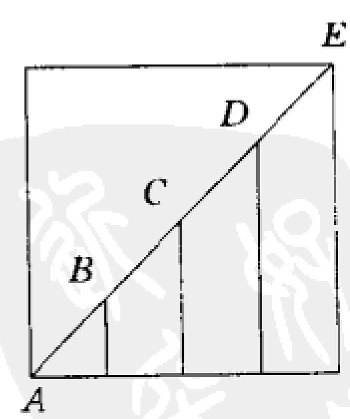


甲

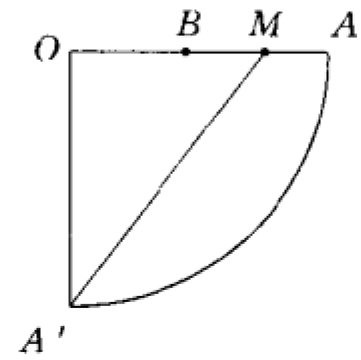


乙

8. 因为将棱柱的侧面展开之后为一正方形，如右图，$ABCDE$ 恰好为正方形的对角线，因此折线 $ABCDE$ 是绕侧面一周的最短路线.



9. 将圆锥面沿母线 OA 剪开，把圆锥面摊成平面（如下页图），则 $A'M$ 为绳的最短距离，根据勾股定理：



$$MA'^2 = OM^2 + OA'^2 = (4+2)^2 + 8^2$$
$$= 100(\text{平方厘米})$$

$\therefore$ $MA' = 10(\text{厘米})$

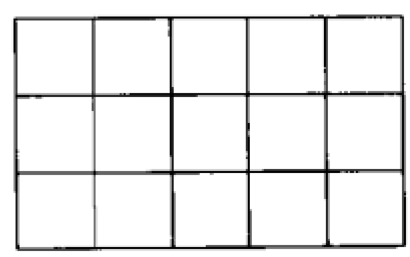
即　绳的最短距离为 10 厘米.

第4讲　奇妙的方格表

方格表是人们最熟悉最简单的图形之一，但这个简单的图形却可以说是一个广阔的数学天地，其中包含着许许多多奇妙的数学问题．许多问题看起来非常简单非常有趣，但却要用到许多数学方法，蕴含着许多深刻的道理．这些方法和道理在我们以后的学习中将经常用到．

一、计数问题

例 1　右图中共有多少个矩形？

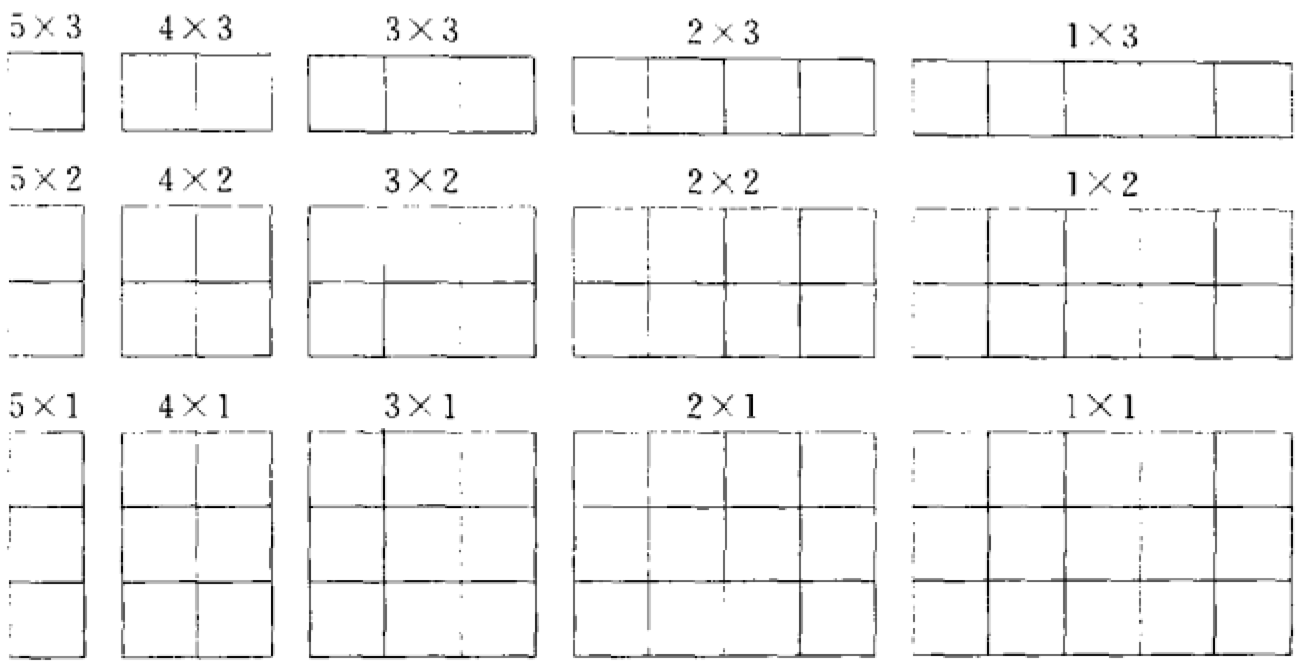


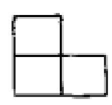
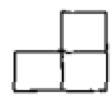
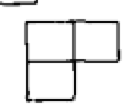
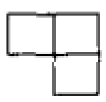
分析　如果直接数，很容易遗漏或者重复．为了避免遗漏或重复，可以将图形中的各种矩形按形状大小分类，分别计数后再相加．在分类计数中如果能发现规律，那就更简单了．

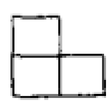
解法 1：在已知的方格表中，“□”共有 $5\times3=15$ 个，“□□”共有 $4\times3=12$ 个，“□□□”共有 $3\times3=9$ 个，…如此进行下去，把各类矩形的个数相加，可得矩形总数为 90 个．

解法 2：将各类矩形列出表来（如下页图），分析各类矩形个数的算式，很容易发现规律，于是可得矩形总个数为：

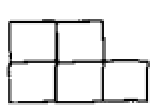
$(1+2+3+4+5)\times(3+2+1)=90$ 个．

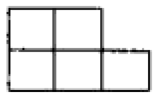
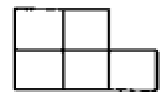


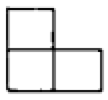
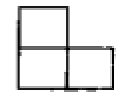
【例 2】 在上页的方格表中，共有几个“”形（含有 3 个小方格的拐，也可以是“”或“”或“”）？

分析 不妨称“”形为 L 形. 容易看出，在每个由 4 个小方格组成的正方形中都含有 4 个 L 形. 因此为了求 L 形的个数，只需先求“田”字形的个数.

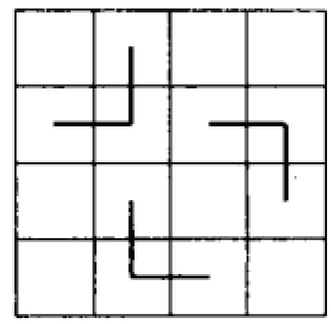
解： 在上页的方格表的第 1、2 行中含有“田”字形 4 个，第 2、3 行中也含 4 个，共有“田”字形 8 个，每个“田”字形对应 4 个 L 形，因此共有 L 形 $4\times 8=32$ 个.

说明：计数最基本的方法是分类讨论. 如果在分类讨论中发现规律，就可以改进算法. 例 2 中的计数方法利用了对应的思想. 当直接计算某一事物的个数有困难时，往往可以先转化成计算另一事物的个数，然后再研究这两种事物之间的对应关系，例如在 3×5 的方格表中计算“”形的个数，可以先计算 2×3 的矩形共有

多少个，然后由每个 2×3 的矩形中都含有 4 个“”形，于是就能算出“”形的总个数，共有 10×4＝40 个．在例 1 中计算矩形个数还有一些更高明的方法，这些方法将在中学里学到．

【例 3】　在 4×4 的方格表中，至少放上几个“”后，才能使这一表中不能再放下一个“”了（不许重叠）？如果是 6×6 或 8×8 的方格表，结果如何？

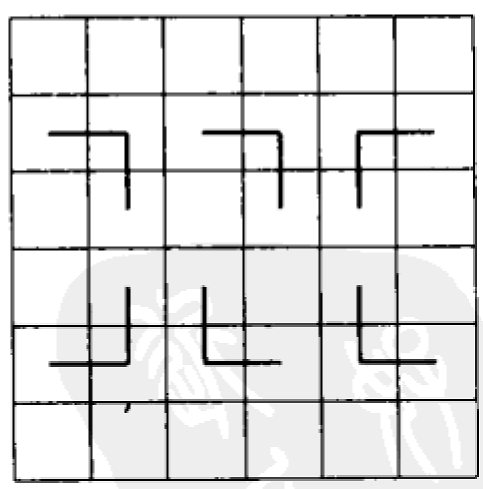
解：如右图，在 4×4 的方格表中放下 3 个 L 形，即不能再放下一个 L 形了．



如果只放了两个 L 形，那么可以证明总还能再放下一个 L 形．因为每个“田”字形内至少盖住两格后才不再能放下 L 形，而 4×4 的方格表中共有 4 个不相重叠的“田”字形，至少应盖住2×4＝8 格后，才不再能放一个 L 形，如果只放了两个 L 形，仅仅盖住 6 格，所以总还能再放一个 L 形．

从以上两步，可以看出 4×4 的方格表中至少放上 3 个 L 形后，才能使这一表中不再能放下一个 L 形．

在 6×6 的方格表中有 9 个不相重叠的“田”字形，每个“田”字形至少盖住两格，才不再能放下一个 L 形，这样至少应盖住 18 格，也就是至少要放上 6 个 L 形．如右图，已放了 6 个 L 形，确实已不能再放下一个 L 形了，因此 6 个是最少的数目．

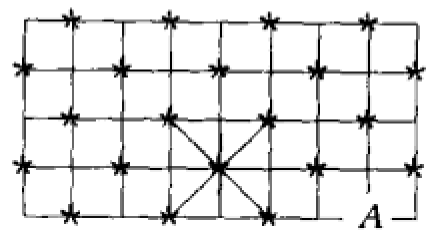


用同样的方法可以得到在 8×8 的方格表中至少放上 11 个 L 形后，就不再能放下一个 L 形了．

二、染色方法

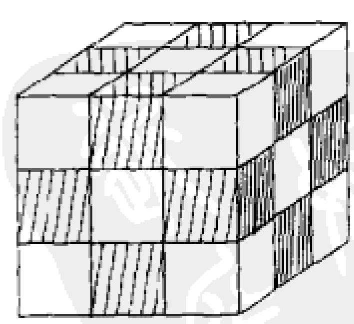
染色方法实际上是一种分类方法，不过对有些问题来说，通过染色能使问题比较直观，解决起来更方便.

【例 4】 如右图是半张象棋盘，一只马能否从 A 处出发，跳遍半张象棋盘而使每个格点只经过一次？



解：把半张象棋盘的格点（共 45 个）相间地涂上黑、白两色（黑色用“×”表示，如图共有 22 个黑点，23 个白点．按照马走步的规则，每步走“日”字的对角线，不论马在何处也不论往哪个方向跳，起点和终点的颜色总是不同的．由于 A 处是黑格点，如果马从 A 处出发跳遍每个格点且每个格点只经过一次，那么需经过 21 个黑点，23 个白点，黑、白格点数相差 2，故这样的走法是不可能的.

【例 5】 正方体形的房子共分 27 个小房间，每相邻两个房间都有门相通（上、下两间也有门相通）．每个房间里都有一块奶酪，右下角的房间有一门通向外面．一只耗子从最中间的房间出发，想走遍各个房间，且每个房间只经过一次，最后从右下角出来，这样是可否能？如果可能，该怎么走？



解：将 27 个小正方体相间染成黑、白两色（如右图），共 13 个房黑间，14 个白房间，中间房间是黑色．如果从中间房间出发，每个房间经过一次，共需经过 12 个黑房间（除中间房间外）、14 个白房

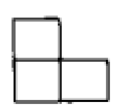
间．但是与黑房间相邻的都是白房间，与白房间相邻的都是黑房间，路线只能是：黑—白—黑—白…这是不可能实现的．

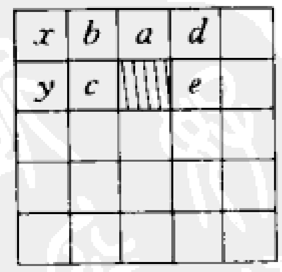
如果改从任一个（不是右下角的）白房间出发，就能达到目的．请自己设计路线．

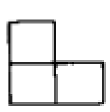
三、抽屉原理

【例 6】 能否在 8×8 的方格表的每个方格中写上 0、1、2 中的一个数，使每行、每列以及两条对角线上各数之和都互不相等？

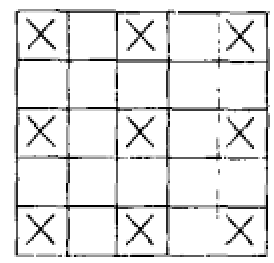
解：8 行、8 列及两条对角线共有 18 个和数，将这 18 个和数作为“苹果”．8 个数（每个数是 0、1、2 中的一个）的和最小是 0，最大是 16，共有 17 种不同的和，将这 17 个不同的和作为“抽屉”．根据抽屉原理，必有一个“抽屉”中存在 2 个或 2 个以上的“苹果”，这就是说，在 18 个和数中至少有 2 个相等，不可能都互不相等．

【例 7】 在 5×5 的方格表中，任意挖去一个方格后，是否总能用 8 个“”形完全盖住？如果不能，请说明道理．



解法 1：如右图，将 5×5 的方格表挖去一格（阴影）后，剩下的 24 格不可能用 8 个“”形完全盖住．因为如果完全盖住，为了盖住 a 格，需要用一个 L 形盖住 a、d、e 或 a、b、c 三格，由于两边对称，不妨设盖住 a、b、c 三格，这样，x 格就不可能被任何一个 L 形盖住（否则就重叠

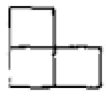
了），所以这 24 格不可能被完全盖住.



解法 2：如右图，标上“×”的格共有 9 个，如果挖去的一格不是标上“×”的格，那么剩下的 24 格不可能被 8 个 L 形盖住. 这是因为任意两个“×”格不可能被同一个 L 形盖住，这 9 个“×”格若都能被盖住，至少需要 9 个 L 形，因此不能用 8 个 L 形盖住剩下的 24 格.

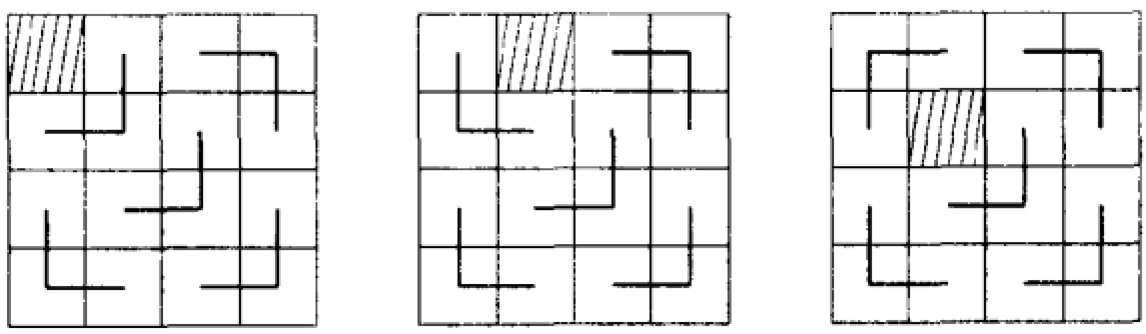
说明：解法 1 虽然很简单，但要想到这种解法，需要做多次试验（当挖去的一格在某些位置时，题目的要求是可以成立的）. 解法 2 实际上用了抽屉原理，“×”格看作“苹果”，8 个 L 形看成“抽屉”. 用抽屉原理的关键是要设计好“抽屉”和“苹果”.

四、分类、试验、递推、寻求规律

【例 8】 在 4×4 的方格表中任意挖去一格，是否总能用 5 个“”形盖住？对于 8×8 或 16×16 的方格表，结论如何？

分析 对于 4×4 的方格表，由挖去一格的位置不同，可分三种情况讨论. 这种分类讨论的方法，对于 4×4的方格表来说，由于试验次数较少，还比较容易得到结论. 但对于 8×8 的方格表，需要分 10 种情况，分别去试验；对于 16×16 的方格表，则需要分 36 种情况. 对于每种情况，由于表格较大，试验起来也很繁琐. 如果运用数学上称为“递推”的方法，问题就简单得多了，不仅能轻易地解决 8×8、16×16 的方格表的问题，还能解决 32×32、64×64、…等方格表中的类似问题.

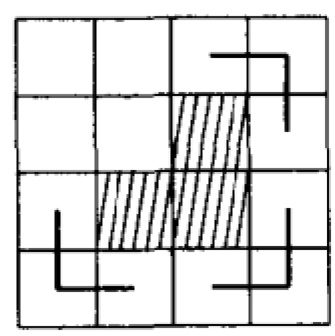
解法 1：对于 4×4 的方格表，由挖去一格的不同位置，可分三种情况，每种情况都能运用 5 个 L 形盖住，因此在 4×4 的方格表中任意挖去一格，总能用 5 个 L 形盖住（如下页图）.



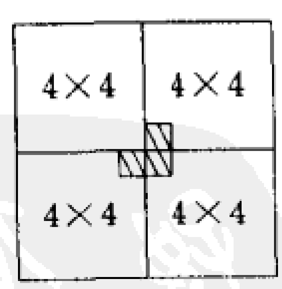
对于 8×8 及 16×16 的方格表，由于分类情况较多，这里从略.

解法 2：先考虑 2×2 的方格表，任意挖去一格，剩下 3 格总是恰好能用 1 个 L 形盖住.

对于 4×4 的方格表，挖去的一格总在某个角上的 2×2小方格表内，不妨设在左上角，那么左上角的 2×2 小方格表中剩下 3 格能用 1 个L 形盖住．在右上、右下、左下的 3 个 2×2方格表中，先各挖去靠中间的一格（如右图），剩下的各能用 1 个 L 形盖住，而挖去的 3 格也恰能用 1 个 L 形盖住.



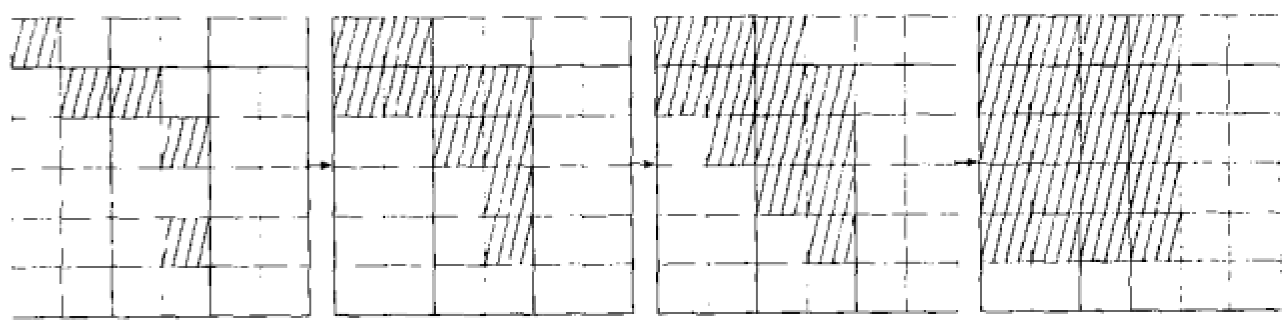
对于 8×8 的方格表，挖去的一格总在某个角上的4×4方格表内，不妨设在左上角，那么左上角剩下的部分总能用 5 个 L 形盖住．在右上、右下、左下的 3 个 4×4 方格表中，先各挖去靠中央的一格（如右图），由上述结论，各 4×4 方格表中剩下部分总能分别用 5 个 L 形盖住．而挖去的 3 格也恰能用 1 个 L 形盖住，所以，8×8 方格表中任意挖



去一格，总能用 21 个 L 形完全盖住.

同样，对于 16×16 的方格表，任意挖去一格后，总可以用 85 个 L 形完全盖住.

【例 9】 在一个 6×6 的方格表中，任选 5 个方格涂黑，然后再逐步将凡是与两个或两个以上黑格相邻的方格涂黑，不断按这个法则做下去，证明：无论怎样选择最初的 5 个方格，都不可能按这样的法则将所有方格全部涂黑.



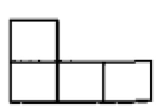
(1)　(2)　(3)　(4)

分析 先试验一下，在上图的方格表中选 5 格涂黑，然后按给定法则涂黑另一些格，直到上图 (4)，已无法再将其余的方格涂黑. 如果改变最初 5 格的位置，虽然最后涂黑的部分会不同，但都不能将所有方格全部涂黑. 为了证明这一结论，如果将最初 5 格的不同位置一一列举出来，再逐个证明，当然也是可以的（这种方法叫枚举法），不过过于繁琐. 因此，应该在试验中寻求规律，不被表面现象迷惑.

证明：考虑涂黑过程中黑色区域的周界总长度. 设小方格的边长为 1，则开始有 5 个黑格，黑色区域总长度不大于 20. 按照题设的涂黑法则，每格在涂黑前后，黑色区域的周界不会变长（此方格至少有两边是原来黑色区域的周界，当此格涂黑后，这两边已不再是边界，而

另两边可能成为边界)．如果能将所有方格都涂黑，那么黑色边界的总长度应为 24，由以上分析，这是不可能的，因此，无论怎样选择最初的 5 个方格，都不可能按照题设的法则将全部方格涂黑．

习　题　四

1．在 3×5 的方格表中共有多少个正方形？共有多少个“”形？

2．在例 5 中，是否从任意一个（不是右下角的）白房间出发，都能走遍各个房间后从右下角出来？

3．在例 7 中，如果挖去一个“×”格，剩下的方格表是否总能用 8 个 L 形完全盖住？

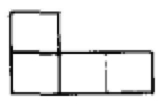
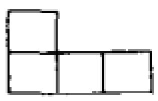
4．①在 4×4 的方格表中的任意 5 个格中各放一枚棋子，是否总可选出 2 行 2 列，使这 5 个棋子都在这 2 行 2 列中？如果放 6 个棋子（每个棋子占一格），结果如何？放 7 个棋子，结果如何？

②在 6×6 的方格表中最多放几个棋子（每个棋子占一格），不论如何放，使得总能选出 3 行 3 列，使这些棋子都在这 3 行 3 列中？

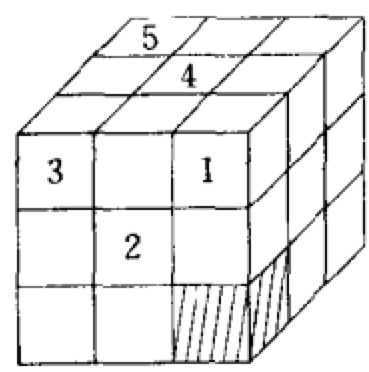
5．在 4×4 的方格表中除一格写上“—”外，其余都写上“+”．现允许任选一行，或一列，或一条平行于对角线的斜线（特殊情况，可以是角上一格，或整条对角线），将它们每格中符号变成相反的．不断施行这种变换，是否能使整个方格表的所有格内都是“+”号？

若改为 5×5 的方格表，结论如何？

习题四解答

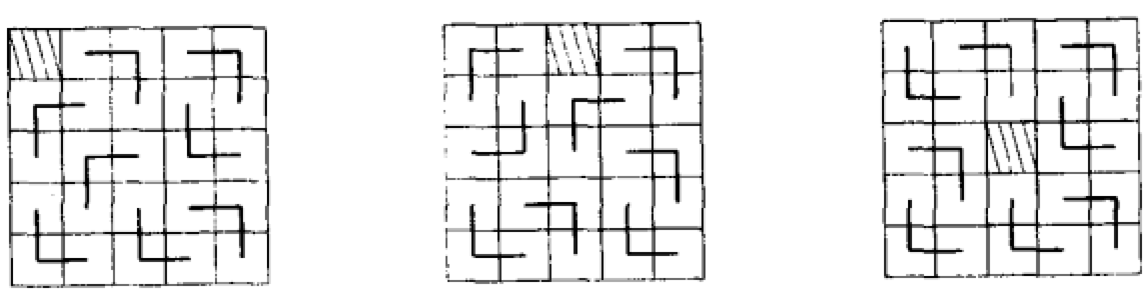
1. 在此方格表中，1×1 的正方形共 15 个，2×2 的正方形共 8 个，3×3 的正方形共 3 个，因此共有正方形 26 个. 在此方格表中共有 2×3 的矩形 10 个，每个这样的矩形含有 4 个“”形，因此共有 40 个“”形.

2. 能. 由对称性，仅需按出发点的位置分 5 种情况考虑. 如右图. 出发点分别在 1、2、3、4、5 时，都能走遍各个房间后从右下角走来（含阴影的房间）.

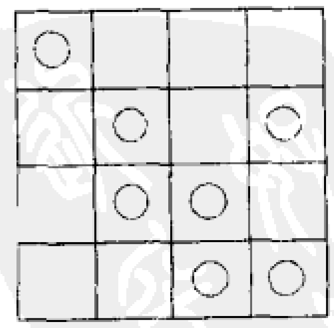


3. 能. 如下图，分三种情况考虑.

4. ①若共 5 个棋子，那么总有一列含



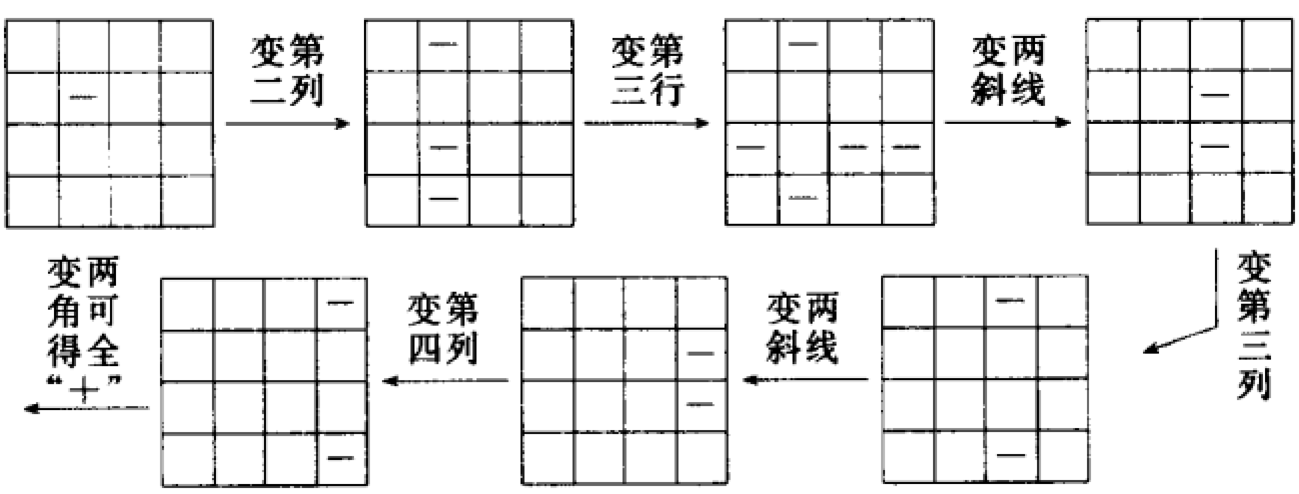
2 个（或 2 个以上的）棋子，选出此列后，至多还剩 3 个棋子，总能使它们在另外一列及两行中；若共 6 个棋子，则按每列的棋子个数从大到小排列，选出棋子最多的两列，最多还剩下 2 个棋子（若还剩下 3 个或 3 个以上棋子，那么剩下的两列中有一列含 2 个棋子，而选出的两列中却有一列仅一个棋子，这是不可能的），至多在两行内；若共 7 个棋子，则不一定能使它们

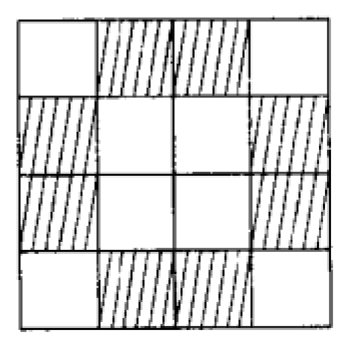


都在某 2 行及 2 列内，如上图中任 2 行 2 列都不能包含这所有的 7 个棋子.

②最多放 9 个棋子.

5. 对于 4×4 的方格表，如果“−”号在角上或中部，则都可通过题设变换将整个方格表变为全“+”（“−”在角上显然，“−”在中部，则如下图）：





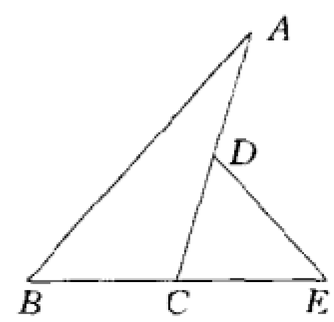
如果“−”在边上而不在角上，则无论如何变换，都不可能变成全“+”. 如右图，边上 8 格涂黑色，通过每一步变换，这 8 个黑格中的符号总是改变偶数个（0 个或 2 个）. 当开始的“−”在这黑格内时，黑格内含“−”的格数为奇数，这样，无论怎样变换，黑格中含“−”的格数永远是奇数，不可能消失.

对于 5×5 的方格表，当“−”不在角上或中央时，通过变换不能把“−”都去掉. 因为对于这样的一个“−”号，总还可以在 5×5 的方格表中划出一个 4×4 的表，使这个“−”号位于这个 4×4 表的边上且不在角上，于是由前述理由可知无论怎样变换都不能使“−”号都消失.

第5讲 巧求面积

本讲主要介绍平面图形面积的一些巧妙算法，首先看一个例子.

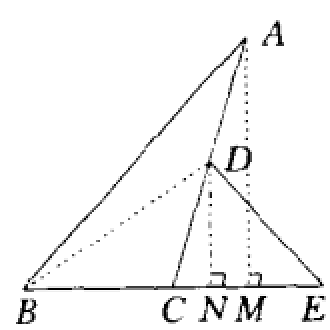
如右图，$BC=CE$, $AD=CD$, 求三角形 ABC 的面积是三角形 CDE 面积的几倍?



解：连结 BD, 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 中，因为 $AD=DC$, 又因为这两个三角形的高是同一条高，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCD}$. 在 $\triangle BCD$ 与 $\triangle DCE$ 中，因为 $BC=CE$, 又因为这两个三角形也具有同一条高，所以有 $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}$. 因此，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=2S_{\triangle CDE}$.

从以上的推导中看一看这两个三角形面积之比与这两个三角形的边有什么关系.

因为三角形的面积 $=\frac{1}{2}\times$底$\times$高，作 DN 垂直 CE 于 N, AM 垂直 CE 于 M, 如右图，



$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AM,$$

$$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\times CE\times DN.$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CDE}}=\frac{\frac{1}{2}\times BC\times AM}{\frac{1}{2}\times CE\times DN}=\frac{BC}{CE}\times\frac{AM}{DN}$$

在$\triangle ACM$与$\triangle DCN$中，有$AC:CD=AM:DN$. 因此，$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CDE}}=\dfrac{BC}{CE}\times\dfrac{AC}{CD}$.
即，当两个三角形各有一个角，它们的和是180°时，这两个三角形的面积之比等于分别夹这两个角的两条边的长度乘积之比.

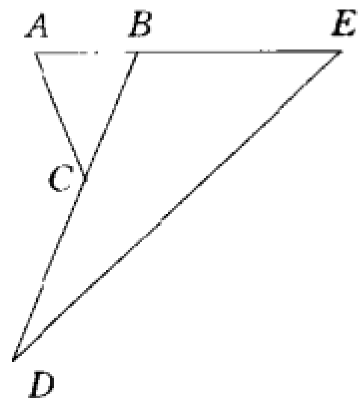
类似可知，当两个三角形各有一个角，它们相等时，这个结论也成立.

解：在$\triangle ABC$与$\triangle CDE$中，因为$AD=DC$，所以$AC=2CD$，又因为$BC=CE$，所以
$S_{\triangle ABC}=2\times1\times S_{\triangle CDE}=2S_{\triangle CDE}$.

答：$\triangle ABC$的面积是$\triangle CDE$面积的2倍.

下面我们就应用上面这个结论来看几个具体例子.

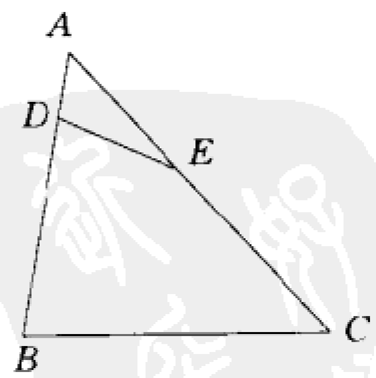
【例 1】 如右图，三角形ABC的面积为1，并且$AE=3AB$，$BD=2BC$，那么$\triangle BDE$的面积是多少？



解：在$\triangle BDE$与$\triangle ABC$中，$\angle DBE+\angle ABC=180°$. 因为$AE=3AB$，所以$BE=2AB$. 又因为$BD=2BC$，所以$S_{\triangle BDE}=2\times2\times S_{\triangle ABC}=4\times1=4$.

答：$\triangle BDE$的面积是4.

【例 2】 如右图，在$\triangle ABC$中，AB是AD的6倍，AC是AE的3倍. 如果$\triangle ADE$的面积等于1平方厘米，那么$\triangle ABC$的面积是多少？

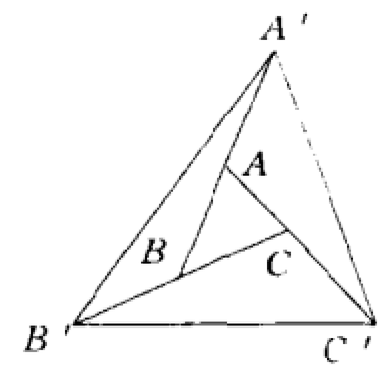


解：在$\triangle ABC$与$\triangle ADE$中，$\angle BAC=\angle DAE$.
因为$AB=6AD$，$AC=3AE$，

所以 $S_{\triangle ABC}=6\times3\times S_{\triangle ADE}=18\times1=18$(平方厘米).

答：$\triangle ABC$ 的面积为 18 平方厘米.

【例 3】 如右图，将$\triangle ABC$ 的各边都延长一倍至 A'、B'、C'，连接这些点，得到一个新的三角形 $A'B'C'$. 若$\triangle ABC$ 的面积为 1，求$\triangle A'B'C'$的面积.



解：在$\triangle A'B'B$ 与$\triangle ABC$ 中，

$\angle A'BB'+\angle ABC=180°$.

因为 $AB=AA'$，

所以 $A'B=2AB$，又因为 $B'B=BC$，

所以 $S_{\triangle A'B'B}=1\times2\times S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABC}=2$.

同理 $S_{\triangle B'C'C}=2\times1\times S_{\triangle ABC}=2$.

$S_{\triangle A'C'A}=2\times1\times S_{\triangle ABC}=2$.

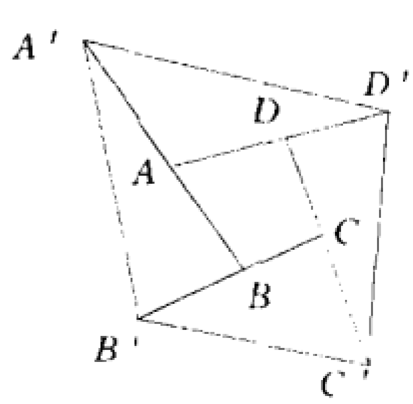
所以 $S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle A'B'B}+S_{\triangle B'C'C}+S_{\triangle A'C'A}+S_{\triangle ABC}$

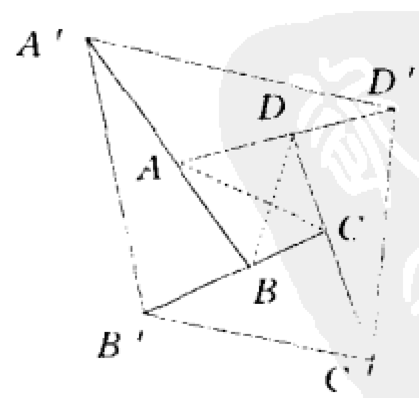
$=2+2+2+1$

$=7$

答：$\triangle A'B'C'$的面积为 7.

【例 4】 如图，将凸四边形 $ABCD$ 的各边都延长一倍至 A'、B'、C'、D'，连接这些点得到一个新的四边形 $A'B'C'D'$，若四边形 $A'B'C'D'$ 的面积为 30 平方厘米，那么四边形 $ABCD$ 的面积是多少？





分析　要求四边形 $ABCD$ 的面积，必须求出四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 的关系，因而就要求出 $\triangle A'B'B$、$\triangle B'C'C$、$\triangle C'D'D$、$\triangle A'D'A$ 与四边形 $ABCD$ 的关系.

解：连结 AC、BD.

在 $\triangle A'B'B$ 与 $\triangle ABC$ 中，$\angle A'BB' + \angle ABC = 180°$. 因为 $A'A = AB$，所以 $A'B = 2AB$. 又因为 $B'B = BC$，所以有 $S_{\triangle A'B'B} = 2 \times 1 \times S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABC}$.

同理　有 $S_{\triangle B'C'C} = 2 \times 1 \times S_{\triangle BCD} = 2S_{\triangle BCD}$

$$S_{\triangle C'D'D} = 2 \times 1 \times S_{\triangle ADC} = 2S_{\triangle ADC}$$

$$S_{\triangle A'D'A} = 2 \times 1 \times S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ABD}.$$

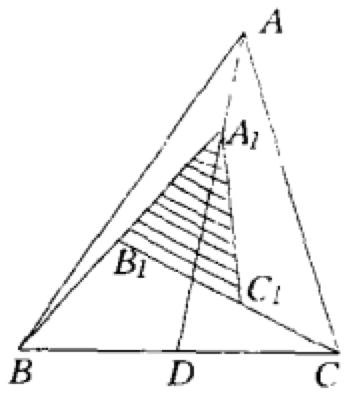
所以
$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}A'B'C'D'} &= S_{\triangle A'B'B} + S_{\triangle B'C'C} + S_{\triangle C'D'D} + S_{\triangle A'D'A} \\ &\quad + S_{\text{四边形}ABCD} \\ &= 2S_{\triangle ABC} + 2S_{\triangle BCD} + 2S_{\triangle ADC} + 2S_{\triangle ABD} \\ &\quad + S_{\text{四边形}ABCD} \\ &= 2\,(S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}) + 2\,(S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABD}) \\ &\quad + S_{\text{四边形}ABCD} \\ &= 2S_{\text{四边形}ABCD} + 2S_{\text{四边形}ABCD} + S_{\text{四边形}ABCD} \\ &= 5S_{\text{四边形}ABCD} \end{aligned}$$

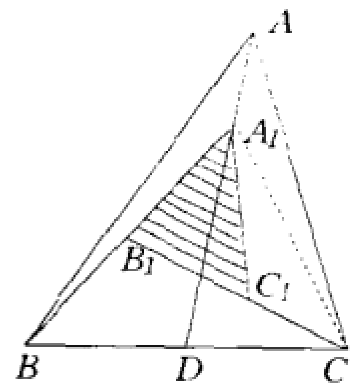
则 $S_{\text{四边形}ABCD} = 30 \div 5 = 6$(平方厘米).

答：四边形 $ABCD$ 的面积为 6 平方厘米.

【例 5】　如下页左图，在 $\triangle ABC$ 中，$BD = DC$, $AA_1 = \frac{1}{3}AD$, $A_1B_1 = \frac{1}{3}A_1B$, $B_1C_1 = C_1C$, $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 1 平方厘米，则 $\triangle ABC$ 的面积为多少平方厘米？

解：连接 A_1C. 如下页右图





在$\triangle BB_1C$与$\triangle A_1B_1C_1$中，$\angle BB_1C+\angle A_1B_1C_1=180°$，因为$A_1B_1=\frac{1}{3}A_1B$，所以$BB_1=2A_1B_1$，又因为$B_1C_1=C_1C$，所以$B_1C=2B_1C_1$，

所以有$S_{\triangle BB_1C}=2\times2\times S_{\triangle A_1B_1C_1}=4\times1=4$(平方厘米).

在$\triangle A_1C_1C$与$\triangle A_1B_1C_1$中，$\angle A_1C_1C+\angle A_1C_1B_1=180°$，因为$CC_1=C_1B_1$，$A_1C_1=A_1C_1$，

所以有$S_{\triangle A_1C_1C}=1\times1\times S_{\triangle A_1B_1C_1}=1\times1=1$(平方厘米).

在$\triangle ABD$与$\triangle ADC$中，$\angle ADB+\angle ADC=180°$. 因为$BD=DC, AD=AD$，所以有$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

在$\triangle ABA_1$与$\triangle ABD$中，$\angle BAA_1=\angle BAD$.

因为$AB=AB, AA_1=\frac{1}{3}AD$，所以有

$$S_{\triangle ABA_1}=1\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}.$$

同理$S_{\triangle AA_1C}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$.

所以
$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=S_{\triangle BB_1C}+S_{\triangle A_1C_1C}+S_{\triangle AA_1C}+S_{\triangle ABA_1}+S_{\triangle A_1B_1C_1}\\&=4+1+\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}+1\\&=6+\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\end{aligned}$$

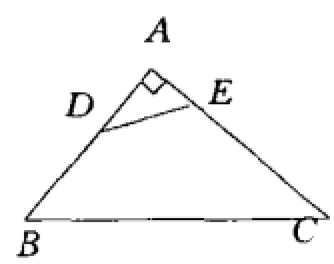
因此 $\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=6$

$S_{\triangle ABC}=9$.

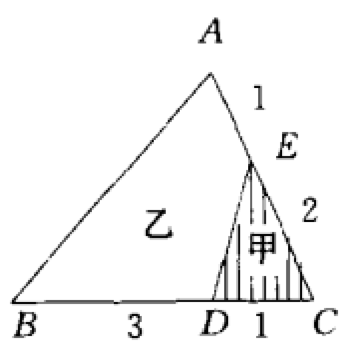
答：三角形 ABC 的面积为 9 平方厘米.

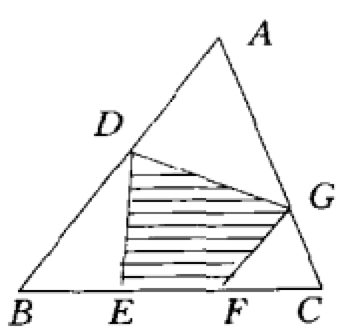
习　题　五

1．直角三角形 ABC 中，$AD=DB=4.5$ 厘米，$AE=\frac{1}{3}AC=3$厘米，求四边形 $DBCE$ 的面积．(右图)



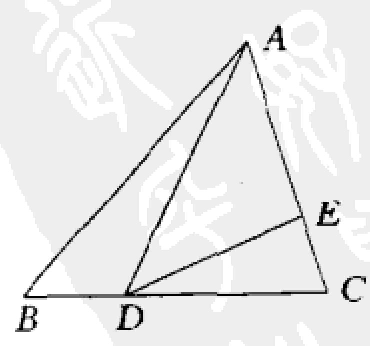
2．下左图中的三角形被分成了甲（阴影部分）、乙两部分，图中的数字是相应线段的长度，求两部分的面积之比．



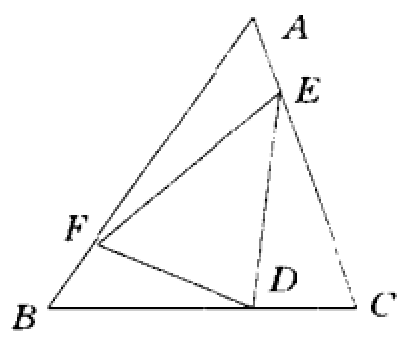


3．如上右图，在△ABC 中，$AD=\frac{1}{3}AB, BE=EF=FC$, $CG=\frac{1}{3}GA$, 求阴影部分面积占三角形 ABC 面积的几分之几？

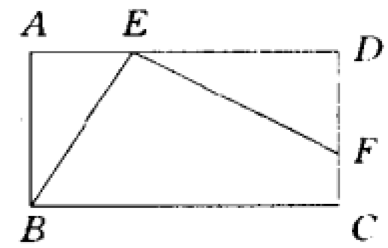
4．如右图，$BD=\frac{1}{3}BC$, 三角形 ABC 的面积是 48 平方厘米，$AC=16$ 厘米，$AE=11$ 厘米，三角形 DAE 的面积是多少？



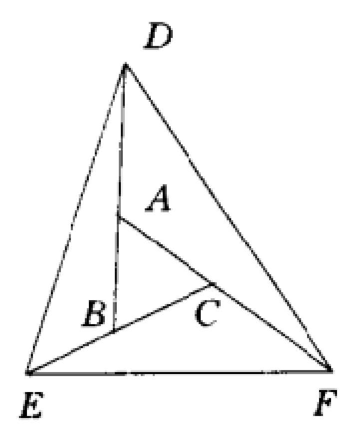
5．已知：$AE=\frac{1}{5}AC, CD=\frac{1}{4}BC$, $BF=\frac{1}{6}AB$, 求三角形 DEF 的面积与三角形 ABC 的面积之比．（右图）

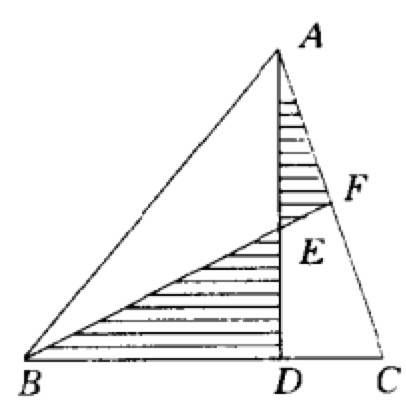


6．如右图所示，已知 $ABCD$ 是长方形，$\frac{AE}{ED}=\frac{CF}{FD}=\frac{1}{2}$，求三角形 ABE 与三角形 DEF 的面积之比．



7．如下左图所示，把△ABC 的 BA 边延长 1 倍到 D 点，AC 边延长 3 倍到 F 点，CB 边延长 2 倍到 E 点，连接 DE、EF、FD，得到△DEF．已知三角形 DEF 的面积为 54 平方厘米，求△ABC 的面积．

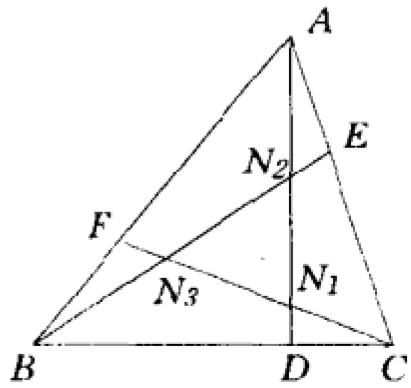


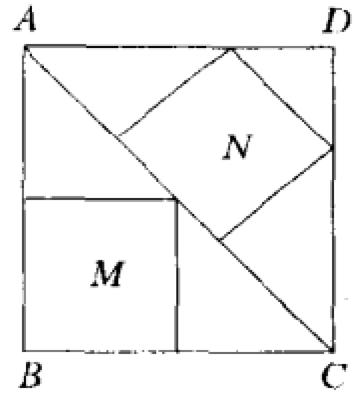


8．如上右图所示，已知 $S_{\triangle ABC}=1$, $AE=ED$, $BD=\frac{2}{3}BC$, 求阴影的面积．

9．在△ABC 中，CD、AE、BF 分别为 BC、AC、AB 长的$\frac{1}{3}$．求 $S_{\triangle N_1N_2N_3}$与 $S_{\triangle ABC}$之比．（左图）

10．把边长为 40 厘米的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 截成两个三角形，在两个三角形内按图示（右图）剪下两个内接正方形 M、N．这两个正方形中面积较大的是哪





一个？它比较小的正方形面积大多少平方厘米？

习题五解答

1．解：在△ADE 与△ABC 中，因为 $AD=BD$，所以 $AD=\frac{1}{2}AB$，又因为 $AE=\frac{1}{3}AC$，

所以 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$.

所以 $S_{\text{四边形}DBCE}=\frac{5}{6}S_{\triangle ABC}$.

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(4.5\times 2)\times(3\div\frac{1}{3})=\frac{81}{2}$(平方厘米)，所以 $S_{\text{四边形}DBCE}=\frac{5}{6}\times\frac{81}{2}=\frac{135}{4}=33\frac{3}{4}$(平方厘米).

答：四边形 $DBCE$ 的面积为 $33\frac{3}{4}$平方厘米.

2．解：因为 $AE=1, CE=2$，所以 $AC=1+2=3=\frac{3}{2}CE$.

因为 $CD=1, DB=3$，所以 $BC=1+3=4=4CD$.

所以有 $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}\times 4\times S_{\triangle CDE}=6S_{\triangle CDE}=6S_{\text{甲}}$.

所以 $S_{\text{乙}}=S_{\triangle ABC}-S_{\text{甲}}=6S_{\text{甲}}-S_{\text{甲}}=5S_{\text{甲}}$.

所以 $S_{\text{甲}}:S_{\text{乙}}=S_{\text{甲}}:5S_{\text{甲}}=1:5$.

答：甲乙两部分的面积之比为 1:5.

3．解：利用正文中的结论容易求得：

$S_{\triangle ADG}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，

$S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$，

$S_{\triangle CFG}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$.

所以 $S_{\triangle AGD}+S_{\triangle BDE}+S_{\triangle CFG}=(\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{1}{12})S_{\triangle ABC}$

$=\frac{5}{9}S_{\triangle ABC}$

所以 $S_{阴影}=(1-\frac{5}{9})S_{\triangle ABC}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$.

答：阴影部分的面积占三角形 ABC 面积的$\frac{4}{9}$.

4．解：$S_{\triangle ADE}=\frac{11}{16}S_{\triangle ADC}=\frac{11}{16}\times\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$

$=\frac{11}{16}\times\frac{2}{3}\times 48=22$(平方厘米).

答：$\triangle ADE$ 的面积为 22 平方厘米.

5．解：$S_{\triangle AEF}=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}\times S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$.

$S_{\triangle CDE}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times S_{\triangle ABC}=\frac{1}{5}S_{\triangle ABC}$.

$S_{\triangle BFD}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\times S_{\triangle ABC}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$.

所以 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AEF}-S_{\triangle BFD}-S_{\triangle CDE}$

$=(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}-\frac{1}{8})S_{\triangle ABC}$

$=\frac{61}{120}S_{\triangle ABC}$

所以 $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}=61:120$.

答：$\triangle DEF$ 与$\triangle ABC$ 的面积之比为 61∶120.

6. 解：因为 $\frac{AE}{ED}=\frac{CF}{FD}=\frac{1}{2}$，

所以 $CF=\frac{1}{3}CD=\frac{1}{3}AB, FD=\frac{2}{3}AB, AB=\frac{3}{2}FD$，又 $\angle BAE=\angle EDF=90°$，

所以有 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times S_{\triangle EDF}=\frac{3}{4}S_{\triangle EDF}$

$S_{\triangle ABE}:S_{\triangle EDF}=3:4$.

答：三角形 ABE 与三角形 EDF 的面积之比为 $3:4$.

7. 解：$S_{\triangle ADF}=4\times1\times S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle ABC}$，

$S_{\triangle BED}=2\times2\times S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle ABC}$，

$S_{\triangle ECF}=3\times3\times S_{\triangle ABC}=9S_{\triangle ABC}$.

所以 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ADF}+S_{\triangle EBD}+S_{\triangle ECF}+S_{\triangle ABC}$

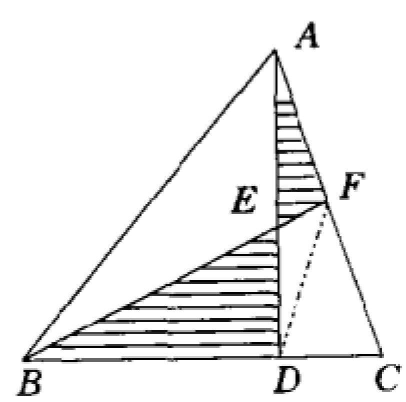
$=4S_{\triangle ABC}+4S_{\triangle ABC}+9S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABC}$

$=18S_{\triangle ABC}$

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{18}S_{\triangle DEF}=\frac{1}{18}\times54=3$（平方厘米）.

答：三角形 ABC 的面积为 3 平方厘米.

8. 解：如右图，连 DF.



因为 $AE=ED$，所以有

$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BED}$，

$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$.

所以 $S_{\triangle BEA}+S_{\triangle AEF}$

$=S_{\triangle BED}+S_{\triangle DEF}=S_{\triangle BDF}=S_{阴影}$

因为 $BD=\frac{2}{3}BC$，所以 $BD=2CD$，因而

$S_{\triangle DCF}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDF}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDF}$

$$=(1+1+\frac{1}{2})S_{\triangle BDF}$$

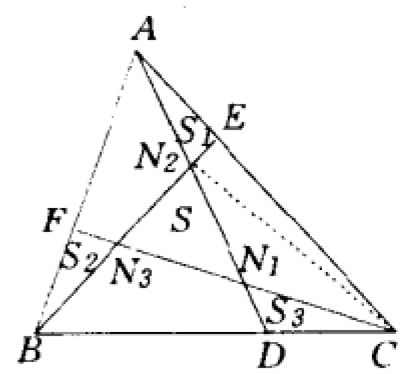
$$=\frac{5}{2}S_{\triangle BDF}$$

所以 $S_{阴影}=S_{\triangle BDF}=\frac{2}{5}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{5}$.

答：阴影部分的面积为$\frac{2}{5}$.

9. 解：记 $S_1=S_{\triangle AEN_2}$, $S_2=S_{\triangle BFN_3}$, $S_3=S_{\triangle CDN_1}$, $S=S_{\triangle N_1N_2N_3}$.

由右图知



$$S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BCF}+S_{\triangle CAD}+S$$
$$=S_{\triangle ABC}+S_1+S_2+S_3$$

但是 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BCF}$

$$=S_{\triangle CAD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC},$$

所以 $S=S_1+S_2+S_3$.

连结 CN_2，则

$$S_{\triangle CDN_2}=S_{\triangle CAD}-S_{\triangle CEN_2}-S_1=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}-2S_1-S_1$$

$$=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}-3S_1,$$

又 $S_{\triangle CDN_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCN_2}=\frac{1}{3}(S_{\triangle BCE}-S_{\triangle CEN_2})$

$$=\frac{1}{3}(\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}-2S_1),$$

所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}-3S_1=\frac{1}{3}(\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}-2S_1)$,

解得 $S_1=\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$.

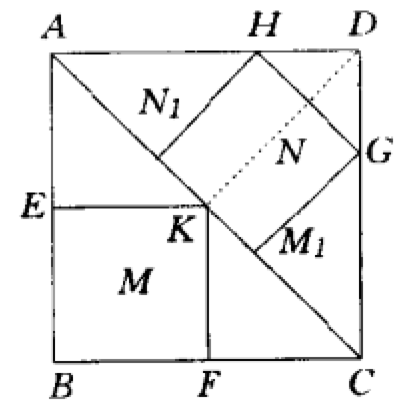
同理 $S_2=S_3=\frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$,

因此　$S=S_1+S_2+S_3=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$

即　$S_{\triangle N_1N_2N_3}:S_{\triangle ABC}=1:7$.

答：$S_{\triangle N_1N_2N_3}$与 $S_{\triangle ABC}$之比为 1:7.

10. 解：为了方便，在右图中标上字母 E、F、G、H、M_1、N_1、K，连结 DK.



容易知道 $BE=\frac{1}{2}AB$,

$M_1N_1=\frac{1}{3}AC, AC^2=2AB^2$,

所以　$S_M=BE^2=\frac{1}{4}AB^2$,

$S_N=M_1N_1^2=\frac{1}{9}AC^2=\frac{2}{9}AB^2$,

$$\therefore\quad S_M-S_N=\frac{1}{4}AB^2-\frac{2}{9}AB^2$$

$$=\frac{1}{36}AB^2=\frac{1}{36}\times 40^2=44\frac{4}{9}\text{(平方厘米)}.$$

答：M 的面积较大，大 $44\frac{4}{9}$平方厘米.

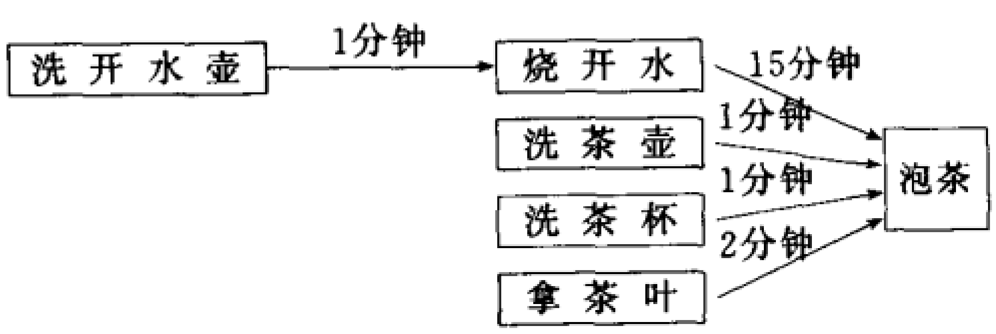
第6讲　最大与最小问题

先看一个简单的问题：

妈妈让小明给客人烧水沏茶．洗开水壶要用 1 分钟，烧开水要用 15 分钟，洗茶壶要用 1 分钟，洗茶杯要用 1 分钟，拿茶叶要用 2 分钟，小明估算了一下，完成这些工作要花 20 分钟．为了使客人早点喝上茶，按你认为最合理的安排，多少分钟就能沏茶了？

这个题目，取材于华罗庚教授 1965 年发表的《统筹方法平话》．

开水壶不洗，不能烧开水，因而洗开水壶是烧开水的先决条件；没开水、没茶叶、不洗壶杯则不能泡茶，这些又是泡茶的先决条件．因此我们可以列出它们的相互关系图



从上图中很容易看出，最省时间的办法是：先洗开水壶用 1 分钟，接着烧开水用 15 分钟，在等待水开的过程中，可以完成洗茶壶、洗茶杯、拿茶叶，水开了就沏茶，这样仅用 16 分钟就能沏茶了，这是没有“窝工”的最合理的安排，用最少的时间完成了工作．

像这样，研究某种量（或几种量）在一定条件下取

得最大值或最小值的问题，我们称为最大与最小问题.

在日常生活、科学研究和生产实践中，存在大量的最大与最小问题. 如，把一些物资从一个地方运到另一个地方，怎样运才能使路程尽可能短，运费最省；一项（或多项）工作，如何安排调配，才能使工期最短、效率最高等等，都是最大与最小问题. 这里贯穿了一种统筹的数学思想—最优化原则. 概括起来就是：要在尽可能节省人力、物力和时间的前提下，争取获得在可能范围内的最佳效果. 这一原则在生产、科学研究及日常生活中有广泛的应用.

一、数、式、方程（组）中的最大最小问题

【例 1】　把 14 拆成几个自然数的和，再求出这些数的乘积，如何拆可以使乘积最大?

分析与解答　这要考虑到一些隐含着的限制条件，可以这样思考：

①要使 14 拆成的自然数的乘积最大，所拆成的数的个数要尽可能多，多一个可以多乘一次，但 1 不应出现，因为 1 与任何数的积仍为原数.

②拆出的加数不要超过 4，例如 5，它还可以拆成 2 和 3，而 $2\times3>5$，所以加数大于 4 的数还要继续拆小.

③由于 $4=2+2$，又 $4=2\times2$，因此拆出的加数中可以不出现 4.

④拆出的加数中 2 的个数不能多于两个. 例如拆成三个 2，不如拆成两个 3. 因为三个 2 的积为 8，两个 3 的积为 9，这就是说，应尽可能多拆出 3.

因为 $14=3\times4+2$，所以把 14 拆成 3、3、3、3、2 时，积为 $3\times3\times3\times3\times2=162$ 最大.

对最大与最小问题一要注意变化规律，即弄清思路，又要注意限制条件，对于字母则要根据其特点进行讨论分析.

【例 2】 已知 $p\cdot q-1=x$，其中 p、q 为质数且均小于 1000，x 是奇数，那么 x 的最大值是____.

分析与解答 由 $p\cdot q-1=x$，x 为奇数可知，

$q\cdot p=x+1$ 是偶数

又因为 p、q 为质数，所以 p、q 中必有一个为偶质数 2. 不妨设 $p=2$.

为了使 x 尽可能大，只须取 q 为最大的三位质数 997. 这时 x 达到最大值：

$2\times997-1=1993$.

方程中有参数和其他条件，也可能出现最大或最小问题.

【例 3】 已知关于 x 的方程 $\frac{5x}{2}-a=\frac{5x}{8}+142$，当 a 为某些自然数时，方程的根为自然数，则最小自然数 $a=$____.

分析与解答 由原方程可得

$a=\frac{15x}{8}-142$.

因为 a 为自然数，所以 $\frac{15x}{8}$ 应为大于 142 的整数. 又 x 为自然数，要使 $\frac{15x}{8}$ 为整数，则 x 必须是 8 的倍数，又要使 $\frac{15x}{8}$ 大于 142，且使 a 最小，那么可解 $\frac{15x}{8}>142$. 解得 $x>75\frac{11}{15}$. 所以只要取 $x=80$ 便得到 a 的最小自然数

值为 8. 很明显，这个问题的实质是求不定方程 $a=\frac{15x}{8}-142$ 的最小自然数解.

【例 4】　求同时满足 $a+b+c=6$，$2a-b+c=3$，且 $b\geqslant c\geqslant 0$ 的 a 的最大值及最小值.

分析　既然是求 a 的最大值及最小值，就要想办法将 b 及 c 用 a 的代数式表示出来，再根据 $b\geqslant c\geqslant 0$ 来求. 求 b 及 c 可将 $a+b+c=6$，$2a-b+c=3$ 看作含 b、c 的二元一次方程组

解：由 $\begin{cases} b+c=6-a \\ -b+c=3-2a \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=\dfrac{3+a}{2}, \\ c=\dfrac{9-3a}{2}. \end{cases}$

$\because$ $b\geqslant c\geqslant 0$，$\therefore$ $\frac{3+a}{2}\geqslant\frac{9-3a}{2}\geqslant 0$.

解得 $\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3$.

所以 a 的最大值是 3，最小值是 $\frac{3}{2}$.

二、统筹方法中数学思想方法的初步应用

在开始引例中引用了华罗庚教授《统筹方法平话》中的例子，统筹方法是生产建设和企业管理中合理安排工作的一种科学方法，它对于进行合理调度、加快工作进展、提高工作效率、保证工作质量是十分有效的，所用数学思想是朴素而精彩的.

【例 5】　5 个人各拿一个水桶在自来水龙头前等候打水，他们打水所需的时间分别是 1 分钟、2 分钟、3 分钟、4 分钟和 5 分钟. 如果只有一个水龙头，试问怎样适

当安排他们的打水顺序，使所有人排队和打水时间的总和最小？并求出最小值.

分析 这是我们经常遇到而不去思考的问题，其中却有着丰富的数学思想. 5个人排队一共有$5\times4\times3\times2\times1=120$种顺序，要把所有情形的时间总和都计算出来加以比较，就太繁琐了. 凭直觉，应该把打水时间少的人排在前面所费的总时间会省些. 试用"逐步调整"法求解.

解：首先证明要使所用总时间最省，应该把打水时间需1分钟的人排在第一位置.

假如第一位置的人打水时间要a分钟（其中$2\leqslant a\leqslant5$），而打水需1分钟的人排在第b位（其中$2\leqslant b\leqslant5$），我们将这两个人位置交换，其他三人位置不动. 这样调整以后第b位后面的人排队和打水所费时间与调整前相同，并且前b个人打水所费时间也未受影响，但第二位至第b位的人排队等候的时间都减少了$(a-1)$分钟，这说明调整后五个人排队和打水时间的总和减少了. 换言之，要使所费时间最省，就要把打水需1分钟的人排在第一位置.

其次，根据同样的道理，再将打水需2分钟的人调整到第二位置；将打水需3、4、5分钟的人逐次调整到三、四、五位. 所以，将五人按照打水所需时间由少到多的顺序排队，所费的总时间最省，得出5人排队和打水时间总和的最小值是：

$1\times5+2\times4+3\times3+4\times2+5\times1=35$（分钟）.

本题所用的逐步调整法是一个很朴素的数学思想，它使我们思考问题过程简化，更有趣味.

【例6】 一个水池，底部安有一个常开的排水管，

上部安有若干个同样粗细的进水管，当打开 4 个进水管时需要 5 小时才能注满水池；当打开 2 个进水管时，需要 15 小时才能注满水池；现在需要在 2 小时内将水池注满，那么至少要打开多少个进水管？

分析　本题没给出排水管的排水速度，因此必须找出排水管与进水管之间的数量关系，才能确定至少要打开多少个进水管.

解：本题是具有实际意义的工程问题，因没给出注水速度和排水速度，故需引入参数. 设每个进水管 1 小时注水量为 a，排水管 1 小时排水量为 b. 根据水池的容量不变，我们得方程 $(4a-b)\times 5=(2a-b)\times 15$，化简，得：

$4a-b=6a-3b$，即 $a=b$.

这就是说，每个进水管 1 小时的注水量等于排水管 1 小时的排水量.

再设 2 小时注满水池需要打开 x 个进水管，根据水池的容量列方程，得

$(xa-a)\times 2=(2a-a)\times 15$，

化简，得　$2ax-2a=15a$，

即　$2xa=17a.(a\neq 0)$

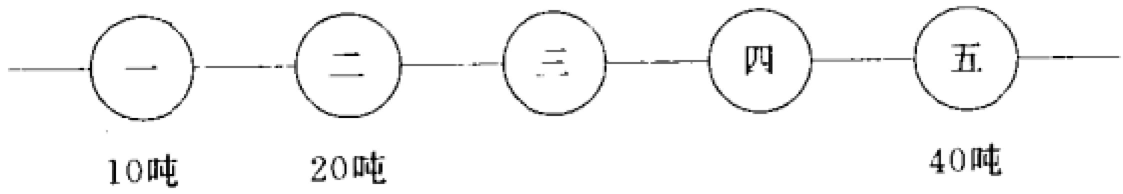
所以　$x=8.5$

因此至少要打开 9 个进水管，才能在 2 小时内将水池注满.

注意：$x=8.5$，这里若开 8 个水管达不到 2 小时内将水池注满的要求；开 8.5 个水管不切实际. 因此至少开 9 个进水管才行.

【例 7】　在一条公路上，每隔 100 千米有一个仓库，

共5个．一号仓库存货10吨，二号仓库存货20吨，五号仓库存货40吨，三、四号仓库空着．现在要把所有的货物集中存放在一个仓库里，如果每吨货物运输1千米需要0.8元运费，那么最少要花多少运费？



分析与解答　由于运费是以每吨货物运输1千米为单位（即吨·千米）计量的，因此要使运费最省，就要把所有货物运往离货物最多的仓库适当近的地方集中．

我们依次计算以一、二、…、五号仓库为集中点所需的运费：

$0.8\times(20\times100+40\times400)=14400$（元），

$0.8\times(10\times100+40\times300)=10400$（元），

$0.8\times(10\times200+20\times100+40\times200)=9600$（元），

$0.8\times(10\times300+20\times200+40\times100)=8800$（元），

$0.8\times(10\times400+20\times300)=8000$（元）．

因此，把所有货物集中到五号仓库所需的运费最少，运费为8000元．

说明：①由例7的枚举解法中我们可以看出，如果某处货物的重量大于或等于货物总重量的一半，那么，把货物往此处集中花的运费是最少（或最少之一）的．这可以叫做“小往大处靠”原则．

可以解释如下．把各个仓库用 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 表示，A_i 中的货物重量为 m_i，把所有货物集中到 A_i 的运输吨·千米数为 a_i（它与集中货物到 A_i 所需的运输费用成正

比)，货物总重量为 $M(=m_1+m_2+\cdots+m_n)$.

假设 A_1 中货物重量不小于总重量的一半，即 $m_1\geqslant\frac{M}{2}$，那么 $m_2+m_3+\cdots+m_n\leqslant\frac{M}{2}$.

与 a_1 相比较，把货物集中到 $A_i(2\leqslant i\leqslant n)$ 的运输吨·千米数 a_i 所增加的至少是 $m_1\cdot A_1A_i$，所减少的至多是 $(m_2+m_3+\cdots+m_n)\cdot A_1A_i$，这里 A_1A_i 表示 A_1 与 A_i 之间的距离.

$\because\quad m_1\cdot A_1A_i\geqslant\frac{M}{2}\cdot A_1A_i\geqslant(m_2+m_3+\cdots+m_n)\cdot A_1A_i$,

$\therefore\quad a_i\geqslant a_1$.

这说明了“小往大处靠”原则是正确的.

②当各个仓库中的货物重量都小于所有货物总重量的 $\frac{1}{2}$ 时，“小往大处靠”原则不成立. 例如. 在例 7 中一、二、五号仓库中的存货如果分别为 30 吨、10 吨、30 吨，那么容易知道把货物集中到二号仓库运费最少.

【例 8】 若干箱货物总重 19.5 吨，每箱重量不超过 353 千克，今有载重量为 1.5 吨的汽车，至少需要几辆，才能把这些箱货物一次全部运走？

分析与解答 如果认为 $19.5\div1.5=13$，因此只需 13 辆汽车就可以把这些箱货物一次全部运走，这就把题意理解错了. 因为货物是整箱装的，每辆汽车不一定都能满载. 请先看一个反例，它说明甚至 15 辆车都不一定能一次运完.

例如这批货物共装有 65 只箱子，其中 64 箱的重量都是 301 千克（不超过 353 千克），另一箱的重量是 236 千克，那么总重量为

$301\times64+236=19500$（千克）.

恰好符合总重为 19.5 吨的要求．由于

$301\times5=1505$（千克），

即 5 只重量为 301 千克的箱子的总和超过 1.5 吨，因此，每辆汽车最多只能装 4 只重量为 301 千克的箱子，15 辆汽车最多只能装 $4\times15=60$（只）重量为 301 千克的箱子，这样，必然有 4 只重量为 301 千克的箱子无法再装运了.

既然 15 辆汽车无论如何无法一次运完上例中的 65 只箱子，那么 16 辆汽车能不能一次运完这些货物呢？答案是肯定的．事实上，

$301\times4+236=1440$（千克），

不超过 1.5 吨，这就是说，第 16 辆汽车可以装余下的 4 只重量为 301 千克的箱子和 1 只重量为 236 千克的箱子．所以，16 辆汽车可以一次运完这些箱货物.

问题到这里仍然没有彻底解决．因为每箱货物的重量只要求不超过 353 千克，除此别无具体数量的限制，所以我们还应该对于一般情况（上例仅是一种特殊情况）来验证 16 辆汽车确实能一次运完全部箱子.

首先让 12 辆汽车装货刚刚超过 1.5 吨，即若取下最后装的一只箱子就不超过 1.5 吨，再从这 12 辆汽车上把每辆车最后装的那只箱子卸下来，并把这 12 只箱子分别装上另外 3 辆空车，每车 4 箱，由于每车 4 箱总重量不超过

$4\times353=1412$（千克）.

因此也不超过 1.5 吨．这时，$12+3=15$ 辆车就装完原来前 12 辆车上全部货物，总重量超过

$1.5\times12=18$（吨）.

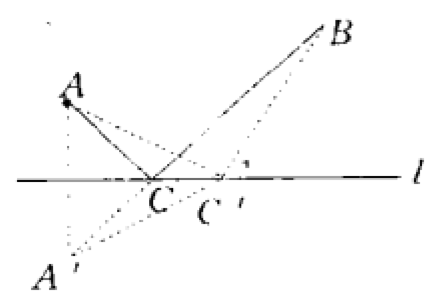
而且每辆车载重不超过 1.5 吨，于是，剩下来装车的箱子总重量不足

$19.5-18=1.5$（吨），

可以把它们全部装在第 16 辆车上运走.

三、最短的路线（几何中的最大最小问题）

【例 9】　右图，直线 l 表示一条公路，A、B 表示公路同一侧的两个村子，现在要在公路 l 上修建一个汽车站，问这个汽车站建在哪一点时，A 村与 B 村到汽车站的距离之和最短？



分析与解答　如果 A、B 两个村子在公路 l 的两侧，问题就简单了，只要把 A、B 两点连接起来，与公路 l 的交点就是建站的地方，因为两点之间，线段最短.

A、B 两村在公路 l 的同侧的情形，我们用"对称"的方法来解决，先求出 A 点关于 l 的对称点 A'，连结$A'B$ 与 l 交点于 C 点，则 C 点就是汽车站应建的那个点.

为什么 $AC+BC$ 是距离最短呢？我们假设不选 C 点，而选择 C 外的一点 C'，显然有

$AC+CB=A'C+CB=A'B$,

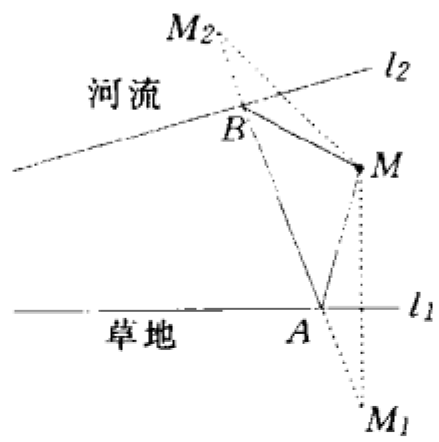
$AC'+C'B=A'C'+C'B$.

根据"连接两点的线中直线段最短"，有 $A'C'+C'B>A'B$，所以选择 C 点能使 $AC+CB$ 距离最短.

利用这种对称原理可以解决很多复杂的问题.

【例 10】　设牧马营地在 M，每天牧马人要赶着马群

先到河边饮水，再到草地吃草，然后回营地．问：怎样的放牧路程最短？



分析与解答　依题意，每一条放牧路线都是一个三角形的三条边，我们设法把这条路线变成两个固定点之间的连线．

根据“对称”原理，设草地的边线是 l_1，河流的岸线是 l_2（右图）．令 M 关于 l_1、l_2 的对称点分别是 M_1、M_2．连结 M_1M_2，分别交 l_1、l_2 于 A、B，则路线 $M\rightarrow B\rightarrow A\rightarrow M$ 就是最短路线，读者可自己证明其路线最短．

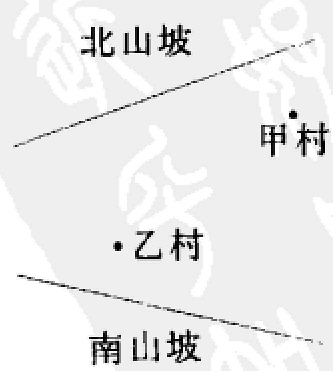
几何中的最大与最小问题很多，待学习一些知识后，将有很多有趣的最大与最小的问题等待你去解决．

习　题　六

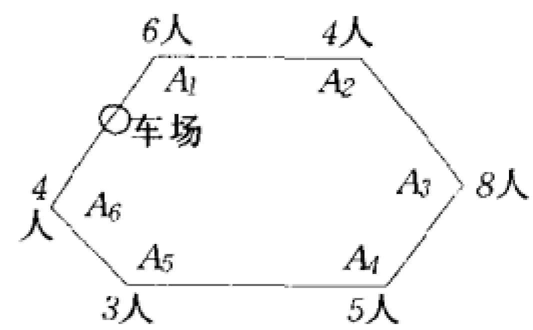
1．在前 n 个自然数中任取 9 个数，如果其中必有两个数之比不小于$\frac{1}{2}$，且不大于 2，则 n 的最大值是____．

2．赵师傅要加工某项工程五个相互无关的部件急需的 5 个零件，如果加工零件 A、B、C、D、E 所需时间分别是 5 分钟、3 分钟、7 分钟、4 分钟、6 分钟．问应该按照什么次序加工，使工程各部件组装所需要的总时间最少？这个时间是多少？

3．右图，小明住在甲村，奶奶住在乙村，星期天小明去看奶奶，先在北山坡打一捆草，又在南山坡砍一捆柴给奶奶送去．请问：小明应选择怎样的路线使路程最短？



4. 某车场每天有 4 辆汽车经过 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 六个点组织循环运输（如图）. 在 A_1 点装货，需 6 个工人；在 A_2 点卸货，需 4 个工人；在 A_3 点装货，需 8 个工人；在 A_4 点卸货，需 5 个工人；在 A_5 点装货需 3 个工人；在 A_6 点卸货，需 4 个工人. 若每个点固定工人太多，会造成人力浪费，我们可以让装卸工人跟车走. 这样有人跟车，有人固定，问最少要安排多少名装卸工人？

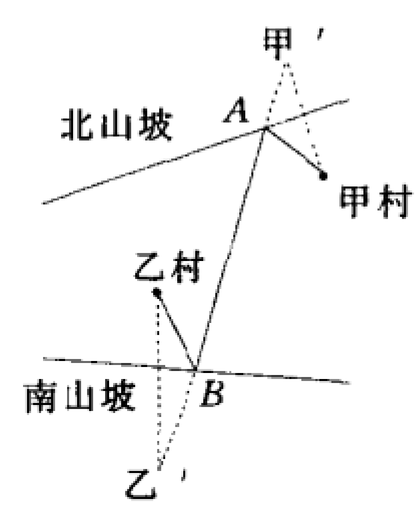


习题六解答

1. 510.

2. 65 分钟. 加工顺序为 B、D、A、E、C.

3. 如右图，用“对称”方法找出甲′和乙′，连接甲′乙′后交北山坡于 A，交南山坡于 B. 小明应在 A 处打草，在 B 处砍柴.



4. 23 名.

第7讲 整数的分拆

整数分拆是数论中一个既古老又活跃的问题．把自然数 n 分成为不计顺序的若干个自然数之和

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m (n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_m \geqslant 1)$$

的一种表示法，叫做 n 的一种分拆．对被加项及项数 m 加以一些限制条件，就得到某种特殊类型的分拆．早在中世纪，就有关于特殊的整数分拆问题的研究．1742 年德国的哥德巴赫提出"每个不小于 6 的偶数都可以写成两个奇质数的和"，这就是著名的哥德巴赫猜想，中国数学家陈景润在研究中取得了突出的成果．下面我们通过一些例题，简单介绍有关整数分拆的基本知识．

一、整数分拆中的计数问题

【例 1】 有多少种方法可以把 6 表示为若干个自然数之和？

解：根据分拆的项数分别讨论如下：

①把 6 分拆成一个自然数之和只有 1 种方式；

②把 6 分拆成两个自然数之和有 3 种方式

$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3$；

③把 6 分拆成 3 个自然数之和有 3 种方式

$6 = 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2$；

④把 6 分拆成 4 个自然数之和有 2 种方式

$6=3+1+1+1=2+2+1+1$;

⑤把 6 分拆成 5 个自然数之和只有 1 种方式

$6=2+1+1+1+1$;

⑥把 6 分拆成 6 个自然数之和只有 1 种方式

$6=1+1+1+1+1+1$.

因此，把 6 分拆成若干个自然数之和共有

$$1+3+3+2+1+1=11$$

种不同的方法.

说明：本例是不加限制条件的分拆，称为无限制分拆，它是一类重要的分拆.

【例 2】　有多少种方法可以把 1994 表示为两个自然数之和?

解法 1：采用有限穷举法并考虑到加法交换律：

$$\begin{aligned}1994&=1993+1=1+1993\\&=1992+2=2+1992\\&=\cdots\\&=998+996=996+998\\&=997+997\end{aligned}$$

因此，一共有 997 种方法可以把 1994 写成两个自然数之和.

解法 2：构造加法算式：

$$1994=\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{1994\text{个}1\text{相加}}$$

于是，只须考虑从上式右边的 1993 个加号“+”中每次确定一个，并把其前、后的 1 分别相加，就可以得到一种分拆方法；再考虑到加法交换律，因此共有 997 种不同的分拆方式.

说明：应用本例的解法，可以得到一般性结论：把

自然数 $n\geqslant 2$ 表示为两个自然数之和，一共有 k 种不同的方式，其中 $k=\begin{cases}\dfrac{n}{2}(n\text{ 是偶数})\\ \dfrac{n-1}{2}(n\text{ 是奇数}).\end{cases}$

【例 3】 有多少种方法可以把 100 表示为（有顺序的）3 个自然数之和？（例如，把 $3+5+92$ 与 $5+3+92$ 看作为 100 的不同的表示法）

分析 本题仍可运用例 1 的解法 2 中的处理办法.

解：构造加法算式

$$100=\overbrace{\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}}^{100\text{个1相加}}$$

于是，考虑从上式右边的 99 个加号“+”中每次选定两个，并把它们所隔开的前、中、后三段的 1 分别相加，就可以得到一种分拆方法. 因此，把 100 表示为 3 个自然数之和有

$$99\times 98\times\frac{1}{2}=4851$$

种不同的方式.

说明：本例可以推广为一般性结论：“把自然数 $n\geqslant 3$ 表示为（有顺序的）3 个自然数之和. 共有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 种不同的方式”（第一届莫斯科奥林匹克数学竞赛第 10 题）.

【例 4】 用 1 分、2 分和 5 分的硬币凑成一元钱，共有多少种不同的凑法？（第二届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛决赛第二试第 4 题）

分析 用 1 分、2 分和 5 分硬币凑成一元钱与用 2 分和 5 分硬币凑成不超过一元钱的凑法数是一样的. 于

是，本题转化为："有 2 分硬币 50 个，5 分硬币 20 个，凑成不超过一元钱的不同凑法有多少种？

解：按 5 分硬币的个数分 21 类计数：

假若 5 分硬币有 20 个，显然只有一种凑法；

假若 5 分硬币有 19 个，则 2 分硬币的币值不超过 $100-5\times19=5$（分），于是 2 分硬币可取 0 个、1 个、或 2 个，即有 3 种不同的凑法；

假若 5 分硬币有 18 个，则 2 分硬币的币值不超过 $100-5\times18=10$（分），于是 2 分硬币可取 0 个、1 个、2 个、3 个、4 个、或 5 个，即有 6 种不同的凑法；

…如此继续下去，可以得到不同的凑法共有：

$$1+3+6+8+11+13+16+18+21+\cdots+48+51$$
$$=5\times(1+3+6+8)+4\times(10+20+30+40)+51$$
$$=90+400+51$$
$$=541(\text{种}).$$

说明：本例实际上是求三元一次不定方程 $x+2y+5z=100$ 的非负整数解的组数.

上述例 2、例 3、例 4 都是有限制条件的特殊的整数分拆问题.

二、整数分拆中的最值问题

在国内外的数学竞赛试题中经常出现与整数分拆有关的最大值或最小值的问题.

【例 5】 试把 14 分拆为两个自然数之和，使它们的乘积最大.

解：由例 2 可知，把 14 分拆成两个自然数之和，共有

7 种不同的方式. 对每一种分拆计算相应的乘积：

$14=1+13$，　　$1\times13=13$；

$14=2+12$，　　$2\times12=24$；

$14=3+11$，　　$3\times11=33$；

$14=4+10$，　　$4\times10=40$；

$14=5+9$，　　$5\times9=45$；

$14=6+8$，　　$6\times8=48$；

$14=7+7$，　　$7\times7=49$.

因此，当把 14 分拆为两个 7 之和的时候，乘积($7\times7=49$)最大.

说明：本例可以推广为一般性结论："把自然数 $n\geqslant2$ 分拆为两个自然数 a 与 $b(a\geqslant b)$ 之和，使其积 $a\times b$ 取最大值的条件是 $a=b$ 或 $a-b=1\,(a>b)$". 事实上，假设 $a-b=1+m$（其中 m 是一个自然数），显然 $n=a+b=(a-1)+(b+1)$，而有 $(a-1)\times(b+1)=a\times b+a-b-1=a\times b+m>a\times b$.

换句话说，假设 $n=a+b$ 且 $a-b>1$，那么乘积 $a\times b$ 不是最大的. 这样，若 n 是偶数，则 $a=b=\frac{n}{2}$ 时，乘积有最大值 $a\times b=\frac{n^2}{4}$；若 n 是奇数，则 $a=\frac{n+1}{2}$，$b=\frac{n-1}{2}$ 时，乘积有最大值

$a\times b=\frac{n^2-1}{4}$.

【例 6】 试把 14 分拆为 3 个自然数之和，使它们的乘积最大.

分析 由例 5 的说明可知，假设 $n=a+b+c(a\geqslant b\geqslant c)$ 且 $a-c>1$ 时，乘积 $a\times b\times c$ 不是最大的. 换句话说，若

$n=a+b+c(a\geqslant b\geqslant c)$，当 a、b、c 中的任意两数相等或差为 1 时，乘积 $a\times b\times c$ 取最大值.

解：因为 $14=3\times4+2$，由分析可知：当 $a=b=5$ 且 $c=4$时，乘积 $a\times b\times c=5\times5\times4=100$ 为最大值.

说明：本题可以推广为一般结论：把自然数 $n\geqslant3$ 分拆为 3 个自然数 a、b、$c(a\geqslant b\geqslant c)$ 之和，若 $n=3q$(q 是自然数)，则 $a=b=c=\frac{n}{3}$ 时乘积 $a\times b\times c$ 有最大值$\frac{n^3}{27}$；若 $n=3q+1$(q 是自然数)，则 $a=\frac{n+2}{3}$，$b=c=\frac{n-1}{3}$时乘积 $a\times b\times c$ 有最大值$\frac{1}{27}(n+2)(n-1)(n-1)$；若 $n=3q+2$(q 是自然数)，则 $a=b=\frac{n+1}{3}$，$c=\frac{n-2}{3}$时乘积 $a\times b\times c$ 有最大值$\frac{1}{27}(n+1)(n+1)(n-2)$.

下面我们再研究一个难度更大的拆数问题.

问题：给定一个自然数 N，把它拆成若干个自然数的和，使它们的积最大.

这个问题与前面研究的两个拆数问题的不同点是：问题中没有规定把 N 拆成几个自然数的和. 这也正是这题的难点，使分拆的种类要增加许多. 我们仍旧走实验—观察—归纳结论这条路. 先选择较小的自然数 5 开始实验. 并把数据列表以便比较.

实验表 1：

自然数	5					
拆分的数	(1,1,1,1,1)	(1,1,1,2)	(1,1,3)	(1,2,2)	(1,4)	(2,3)
拆分数的积	1	2	3	4	4	6

结果：5 拆成 2＋3 时，其积 6 最大.

你注意到了吗？我们的实验结果是按把 5 拆分数的个数

多少，由多到少的次序进行的．再注意，当被拆数 $n>3$ 时（这里 $n=5$），为了使拆分数的乘积最大，拆分数中不能有 1．因为当 $n>3, n=1+(n-1)=2+(n-2)$，且 $2\times(n-2)>1\times(n-1)$．

实验表 2：

自然数	6		
拆分的数	(2,2,2)	(3,3)	(4,2)
拆分数的积	8	9	8

结果：6 拆分成 3＋3 时，其积 9 最大．

实验表 3：

自然数	7		
拆分的数	(2,2,3)	(3,4)	(5,2)
拆分数的积	12	12	10

结果：7 拆分成 2＋2＋3 时，其积 12 最大．

注意，分拆数中有 4 时，总可把 4 再分拆成 2 与 2 之和而不改变分拆的乘积．

实验结果 4：8 拆分成 2＋3＋3 时，其积最大．

实验结果 5：9 拆分成 3＋3＋3 时，其积最大．

实验结果 6：10 拆分成 3＋3＋2＋2 时，其积最大．

观察分析实验结果，要使拆分数的乘积最大，拆分数都由 2 与 3 组成，其形式有三种：

①自然数＝(若干个 3 的和)；

②自然数＝(若干个 3 的和)＋2；

③自然数＝(若干个 3 的和)＋2＋2．

因此，我们得到结论：把一个自然数 N 拆分成若干个自然数的和，只有当这些分拆数由 2 或 3 组成，其中 2 最多为 2 个时，这些分拆数的乘积最大．（因为 2＋2＋2

$=3+3$，$2\times2\times2<3\times3$，所以分拆数中 2 的个数不能多于 2 个.）

例　分别拆分 1993、1994、2001 三个数，使分拆后的积最大.

解：$\because$　$1993=664\times3+1$.

$\therefore$　1993 分拆成$\underbrace{3+3+\cdots+3}_{663\text{个}3}+2+2$ 时，其积最大.

$\because$　$1994=664\times3+2$

$\therefore$　1994 分拆成(664 个 3 的和)$+2$ 时，其积最大.

$\because$　$2001=667\times3$

$\therefore$　2001 分拆成(667 个 3 的和)时，其积最大.

我们以上采用的“实验—观察—归纳总结”方法，在数学上叫做不完全归纳法. 我国著名数学家华罗庚讲过：难处不在于有了公式去证明，而在于没有公式之前怎么去找出公式. 不完全归纳法正是人们寻找公式的重要方法之一. 但是这种方法得出的结论有时会不正确，所以所得结论还需要严格证明. 这一步工作要等到学习了中学的课程才能进行.

习　题　七

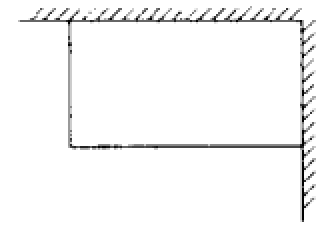
1. 两个十位数 1111111111 和 9999999999 的乘积中有几个数字是奇数？

2. 计算：$\dfrac{987\times655-321}{666+987\times654}$.

3. 计算：$9999\times2222+3333\times3334$.

4. 在周长为 18，边长为整数的长方形中，面积最大的长方形的长和宽各是多少？

5. 用 6 米长的篱笆材料在围墙角修建如右图所示的鸡圈．问鸡圈的长与宽分别是多少时，鸡圈的面积最大？



6. 把 17、18 两个自然数拆成若干个自然数的和，并分别求这些分拆的自然数的乘积的最大值．

习题七解答

1．解：$1111111111 \times 9999999999$

$$= \underbrace{11\cdots1}_{10个1} \times (1\underbrace{00\cdots0}_{10个0} - 1)$$

$$= \underbrace{11\cdots1}_{10个1}\underbrace{00\cdots0}_{10个0} - \underbrace{11\cdots1}_{10个1}$$

$$= \underbrace{11\cdots1}_{9个1}0\underbrace{88\cdots8}_{9个8}9$$

因此，这两个十位数的乘积中有 10 个数字是奇数．

2．1．

3．33330000．

4．长为 5，宽为 4．

5．当鸡圈的长 = 宽 = 3 米时，鸡圈的面积最大．

6．17 分拆成 $3+3+3+3+3+2$ 时，其乘积最大，最大值是 $3^5 \times 2 = 486$．

18 分拆成 6 个 3 的和时，其积最大，最大值是 $3^6 = 729$．

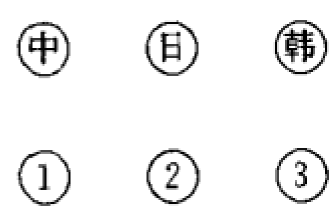
第8讲 图论中的匹配与逻辑推理问题

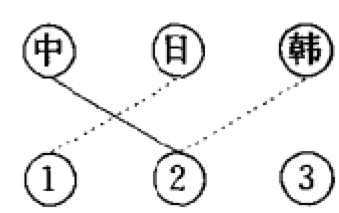
先看一个例题．中、日、韩三个足球队进行比赛，已知 A 不是第一名，B 不是韩国队，也不是第二名，第一名不是日本队，中国队第二．问 A、B、C 各代表哪国队？各是第几名？

一般解这类题都归于逻辑推理类问题．

我们先来降低难度．先只要求你判断出中、日、韩各是第几名（不必判断 A、B、C）．可以把中、日、韩各用一个点代表，列于上一行．第一、二、三名各用一个点代表，列于下一行，记为：

$V_1=\{$中，日，韩$\}$，$V_2=\{$第 1 名，第 2 名，第 3 名$\}$．



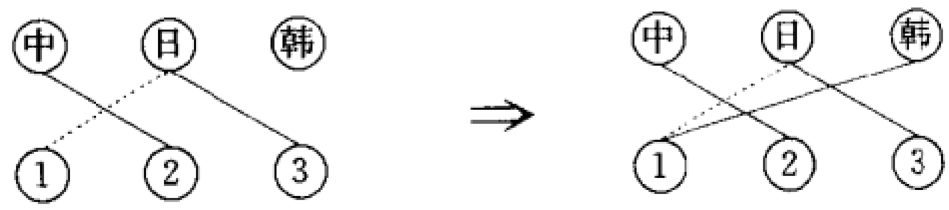


V_1 中的点与 V_2 中某一个点有肯定关系的，就画一条实线，如中和②．否定关系的两点之间画一条虚线，如韩不是②；日不是①．把已知条件不加任何推理地表现于图上（上右图）．虚线 2 条，实线 1 条，共 3 条线．

现在，有两个明显的事实；第一，V_1 中每点有且只有一条实线与 V_2 中相应点配对，V_2 中每点有且只有一条实线与 V_1 中相应点配对．V_1 内部点之间不会有线相联结，V_2 内部点之间也不会有线相联结．第二，从 V_1

(或 V_2)中某一个点，例如说 a 点如发出了一条实线向着 V_2(或 V_1)中某一个点，例如说 x 点，那么 a 点与 V_2(或 V_1)中其他点之间必然只能用虚线联结．（这是逻辑推理中的排它性）

由此，我们很容易将中、日、韩的名次判出．



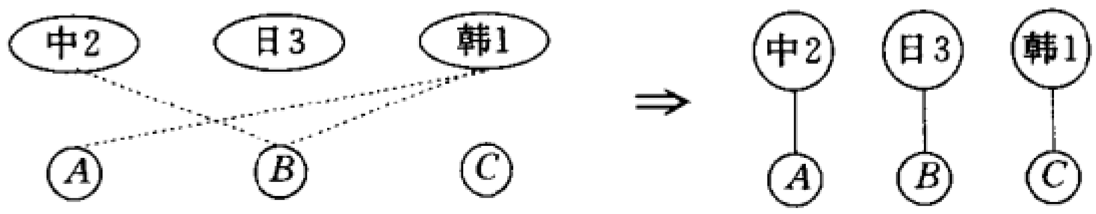
这样的问题，抽象起来可归属于图论中称之为“二分图的匹配”问题．

图论的名词术语太多，这里不作详细定义，只是描述性介绍一下，大家以前在“一笔画”等讲中已初步接触．所谓二分图，就是顶点集合可以划分成两个部分，$V = V_1 + V_2$，如 V_1 有 p 个点，记为 $V_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，$V_2$ 有 q 个点，记为 $V_2 = \{v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots, v_{p+q}\}$，而 V_1 中任意一点，不会与 V_1 中其他点联结，而只能与 V_2 中某些点联结；V_2 也如此．大家看几个例．

一般的图记为 $G = (V, E)$，V 是顶点集合，E 是边（也可称为线）的集合．大家在哥尼斯堡七桥问题中已领略过这种抽象．现在的二分图是一类特殊的图，只不过顶点集 V 划分为两部分，而边只能“跨越”于 V_1 中某个点和 V_2 中另一个点．二分图的匹配问题，就是找一个边的集合，这些边之间都没有公共的端点．

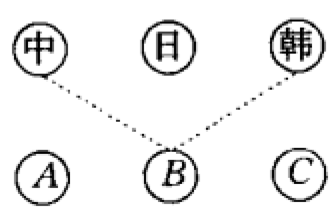
关于二分图的匹配，要研究的是“最大匹配”，即找一个边最多的匹配.

就本讲开始引入的问题看，我们还没有解完，因为还有 A、B、C 三个代号到底如何归于中、日、韩三队的问题. 一种解题办法，是把已判出的国籍和名次捆绑在一个顶点内，如（中 2）、（韩 1）、（日 3），再和 A、B、C 构造一个新的二分图：



显然，推知 B 是（日 3），因为 B 有 2 条虚线，而必然有 1 条实线，只能推出 B 与（日 3）之间为实线. 同理，（韩 1）只能为 C; 剩下的唯一的情况留给了 A 为（中 2）. 全部问题解决了.

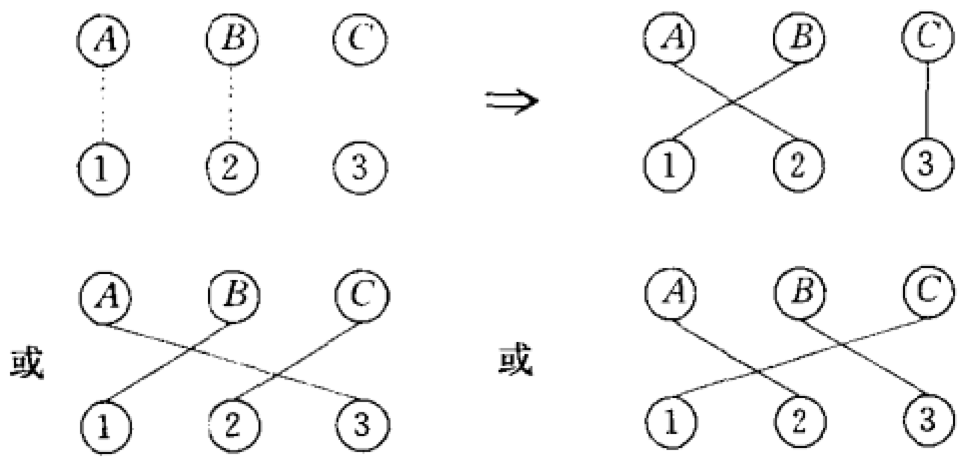
再看最初的题目，如果你选择先判断中、日、韩和 A、B、C 三个代号之间的匹配关系，将会怎样呢？画一个图看，利用已知条件画出实、虚线.



只能利用 B 不是韩国队及中国队第二，B 不是第二（因此 B 不是中国队）这样一些条件，题目中另二句话：A 不是第一名，第一名不是日本队，这种否定关系之间，没有传递性，你不能判定 A 是不是日本队. 因此根据已知条件所画的图中只有两条虚线，之后最多只能确定日、B 之间为实线. 所以对这样的二分图，无法找出合理的

最大匹配．这方法使问题求解走进了死胡同．

那么你选择先判 A、B、C 和第一、第二、第三名之间的匹配关系，又会怎样呢？画一个图看．



现在也只有二条虚线，仍然无法找出最大匹配，或说解不唯一，对求解问题无助．

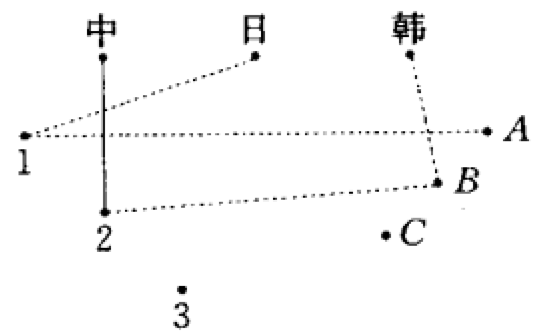
现在回过头来看，先找国别与名次之间的匹配，似乎有些“碰运气”，因为完全可以把题目改动，使先找国别与名次的匹配无法解决，例如叙述改为：

中、日、韩三足球队比赛，已知结果为：第 1 名不是 A，第 2 名不是韩国队也不是 B，A 不是日本队，中国队为 B，问 A、B、C，和 1、2、3 名与各国队如何匹配？

细心读者发现，这只是把原题中 A、B、C 的地位与 1、2、3 名的地位互换而已．所以现在改动后的题目，再先抓“国别”和“名次”的匹配，就无法求解．

但是数学要求找出一种解一般问题的方法而不是“碰运气”，而且完全可以找一个例子，使得无论取国别与名次；或国别与代号（A, B, C）；或代号与名次这三类二分图的匹配都无法求解，而必须找更广泛意义下的匹配才能解决，为此先介绍一般的三个因素一起考虑的“匹配”方法．

先结合前例，将国别用三个不同点表示于上方，三个名次点表示于左下方，三个代号点表示于右下方．用实线的肯定关系和虚线的否定关系把已知条件“翻译”于图上．



我们现在的目的是要寻找一个捆绑三条实线边的一条广义边，使每个国别与一个名次及一个代号捆绑在一起，使问题一次性解决，遵循的原则有以下 4 条：

①肯定关系具有排它性（如中＝第 2 名，则中≠第 1 名，中≠第 3 名，第 2 名≠日，第 2 名≠韩）．

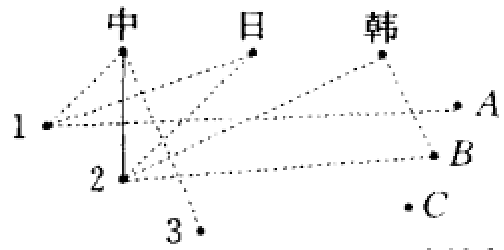
②肯定关系具有传递性（如已知中＝第 2 名，一旦推知肯定关系第 2 名＝A, 那么中＝A）．

③任意两个类别的点之间要建立一种合理的完全匹配．（如国别和名次之间；名次与代号之间；国别与代号之间）．

④如果某一点与另一类点中除一点以外都是否定关系，那么与这一点只能是肯定关系．

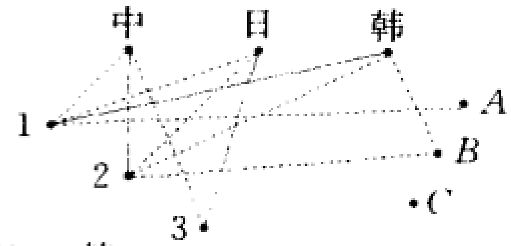
现在把这些原则具体操作于这个图上，就能把问题求解，请读者看图，不赘述．

$\Rightarrow$



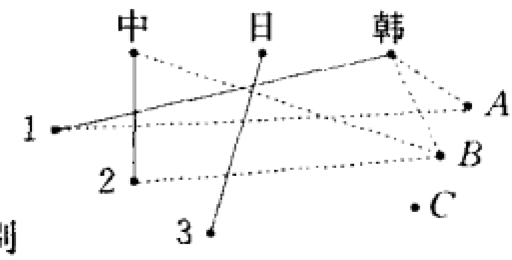
用原则(1)

$\Rightarrow$



用原则(4)知1＝韩，
3＝日

$\Rightarrow$

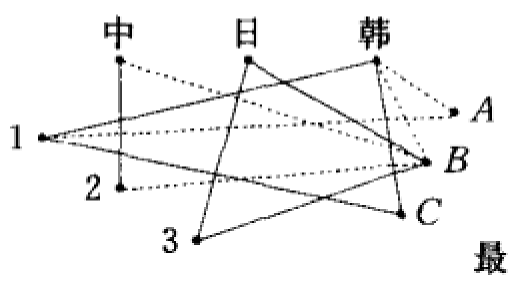


$\Rightarrow$

去掉已无用的国别
与名次间的虚线

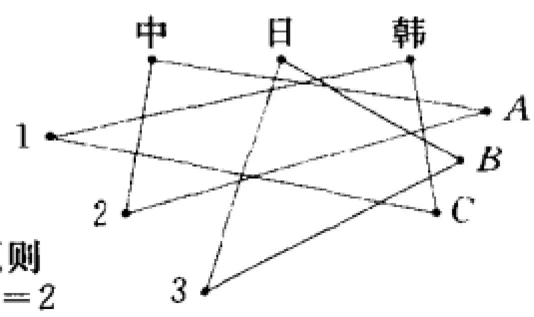
反用原则(2)，知$A\neq$韩，
知$B\neq$中

用原则(4)
知$B=$日，$C=$韩；
又用原则(2)B＝3，C＝1；
捆绑成：$B=$日$=3$，$C=$韩$=1$.



$\Rightarrow$

最后由原则
(3)A＝中＝2

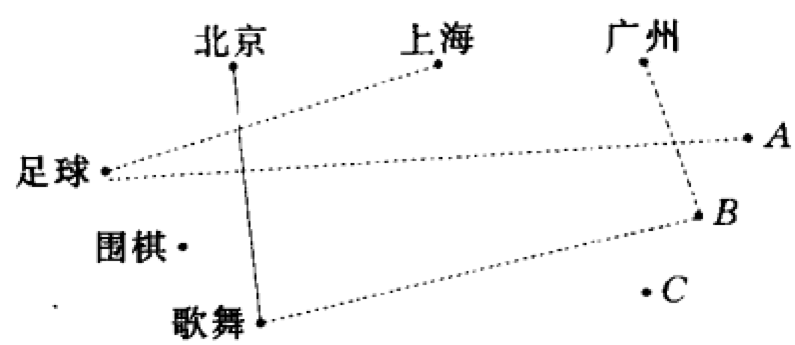


这类问题的思想方法上升到图论中，已经可以用一种更抽象的术语“超图”来描述，也就是顶点集合，仍用 V 来表示，而超图的边是一种抽象的“广义边”，把原来简单边捆绑在一起形成的一种“捆绑的边”. 在这个具体例题中，就是要找出一套捆绑边，每一捆绑边，捆着一个国别，一个名次，一个代号. 找出三套捆绑边，每套与别的套之间没有公共的点，也就是超图的匹配用了这种思想方法，去解决某些逻辑推理问题，变的非常快捷而准确了.

再看例子，

有 A、B、C 三位大学生，一位北京人，一位上海人，一位广州人，每人的业余爱好只是足球、围棋和歌舞三种中的一种．已知：A 不喜欢足球，B 不喜欢歌舞；喜欢足球的不是上海人；喜欢歌舞的是北京人；B 不是广州人．请判断三市人的代号（指 A、B、C）及爱好．

现在把此逻辑推理问题，转化为图论中的“捆绑边”匹配问题，大家不难把此题的图和我们最初的例比较，它们完全“同构”．



答为：B 上海人，喜欢围棋；A 喜欢歌舞，北京人；C 喜欢足球，广州人．

关于匹配问题本身，有很多问题和方法已经充分研究和圆满解决，并找到了可以利用电脑解决的很好的算法．例如从二分图的求最大匹配算法发展出称之为“交错路”的方法，直到网络上带权的最大（或最小）匹配．

习　题　八

1．小明、小强、小华三人参赛迎春杯，分别来自金城、沙市、水乡，并分获一、二、三等奖．现知：

①小明不是金城选手；

②小强不是沙市选手；

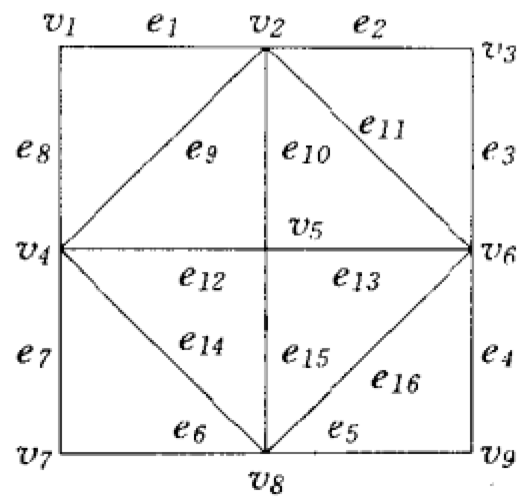
③金城选手不是一等奖；

④沙市选手得二等奖；

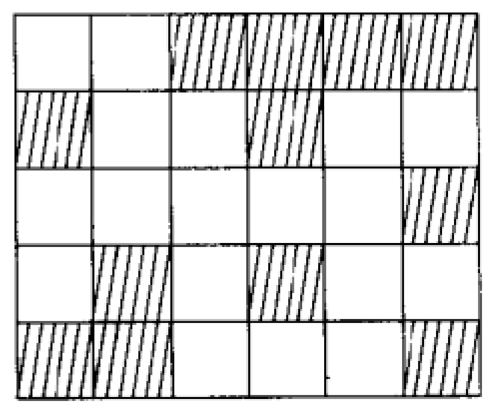
⑤小强不是三等奖；

问小华是何处选手，得几等奖？

2. 右面是一个一般的图，有 9 个点，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_9\}$，有 16 条边，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_{16}\}$. 请找一个边数最多的匹配（即找一个最大匹配）.



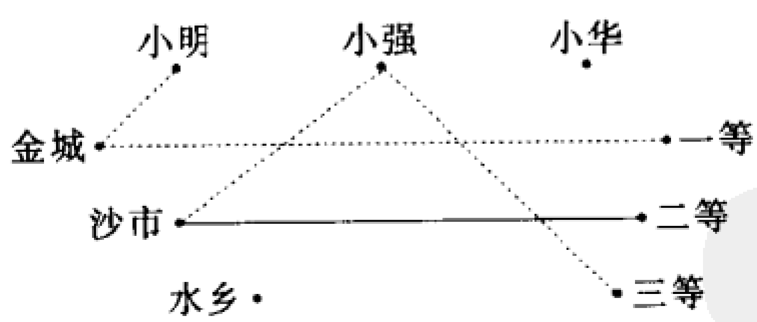
3. 有一个残缺棋盘（右图中的白格部分）. 问是否可用 1×2 的骨牌将它完全覆盖？



4. 一张 8×8 的黑白相间国际象棋盘，任意挖去一个黑格和另一处的一个白格，剩下的 62 格残盘，可否用 31 张 1×2 骨牌完全覆盖？

习题八解答

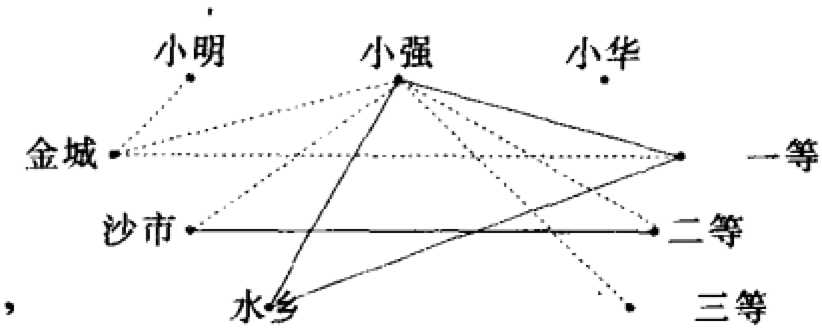
1. 作图，求捆绑的边匹配.



$\Rightarrow$ 小强$\neq$二等.

$\Rightarrow$ 小强$=$一等.

$\Rightarrow$ 金城$\neq$小强.

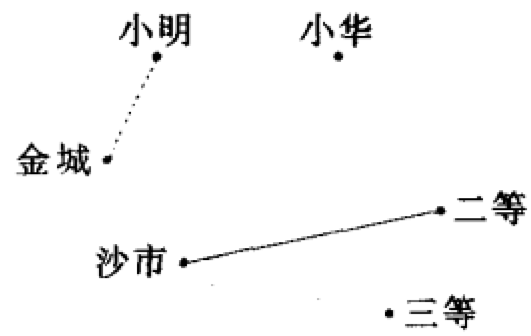


⇒ 小强 = 水乡.

⇒ 小强 = 水乡

= 一等.

再把剩下的六个点，找捆绑边.



由于小明≠金城，所以小明 = 沙市，因而小明 = 沙市 = 三等.

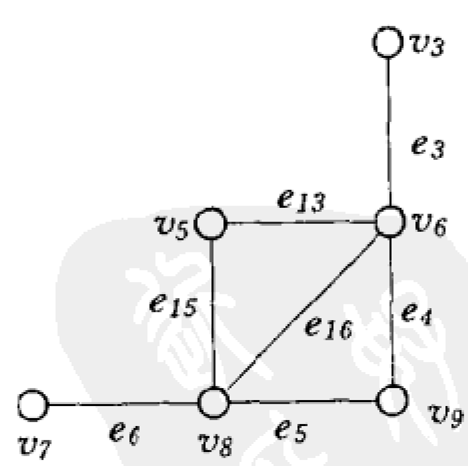
最后得：

小华 = 金城 = 二等.

这样的逻辑推理又直观又快捷，比文字叙述省力又准确.

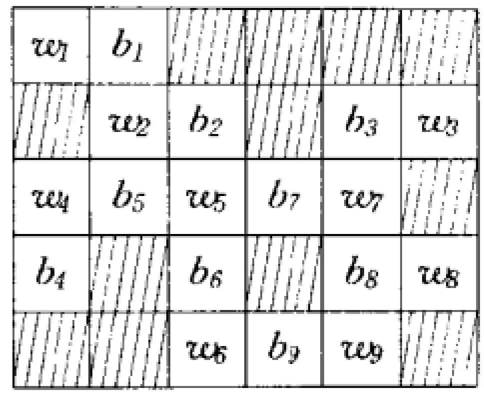
2. 解：要找匹配，就是要把顶点集 V 分成两部分，并从边的集合 E 中选取一些连结这两部分的边，使得这些边无公共端点. 要找最大匹配，即要使选取的边的数目最多. 由于 V 中有 9 个点，因此最大匹配最多只能由 4 条边构成（否则必存在有公共端点的边）. 而四条边 $\{e_1, e_3, e_5, e_7\}$ 确实构成匹配边的集合. 本题的最大匹配边的集合不是唯一的.

还要注意，最大匹配边的集合中不能包含题图中 e_9，e_{11}, e_{14}, e_{16} 之任一. 例如，设包含了 e_9. 为了要使选出的边成为匹配，必须把以 e_9 的顶点 v_2, v_4 为顶点之一的边都去掉，即要在右图中选取一个三条边的匹配.



这显然是不可能的.

3. 答：可以覆盖，如右图. 黑、白间隔染色，黑格用 b_i 表示，白格用 w_i 表示，每格对

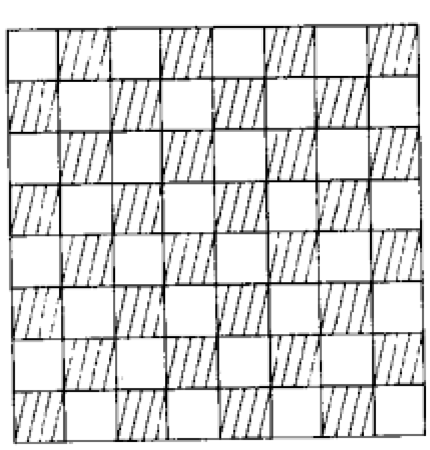


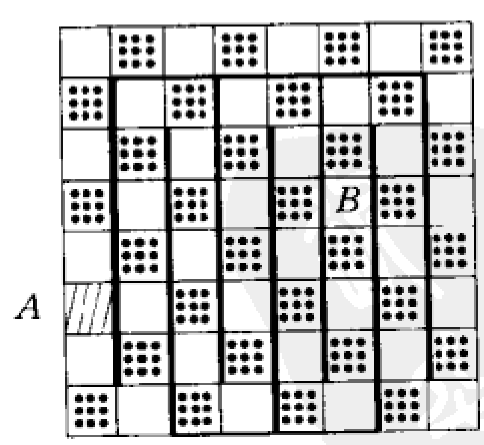
应成一个点，此问题转化成一个二分图寻找完全匹配问题，（具体分析略），覆盖方法为：把下标相同的 b_i 和 w_i 用一块骨牌覆盖（b_1 和 w_1;b_2 和 w_2 等），共有九块．当然，覆盖方法也不止一种．

4．答：可以．给出一个构造性解答．把一柄三齿叉和一柄四齿叉放于棋盘上，如下页右图所示．这迷宫式的效果就是把正方形小格排成一种循环次序，使得可循着迷宫次序走过所有小格各一次而回到开始的正方形小格．

今设某黑格为 A，白格为 B，A、B 挖去．小格的色仍黑白交替，沿着迷宫路，位于一个黑格和一个白格之间的格子个数总是偶数．设想在 A、B 处各粘有一个以小方格 A、B 为底面的正方体骰子．然后把 31 张 1×2 骨牌紧密无间地沿着叉子通道紧靠着骰子 A 开始一个一个地接着排列，贴着骰子 B 后再越过 B 紧靠着 B 接着排，直到再贴着骰子 A.

这样，31 张 1×2 骨牌即盖满了挖去黑（A）、白（B）两格的棋盘．





第9讲　从算术到代数（一）

算术与代数是数学中两门不同的分科，但它们之间关系密切．代数是在算术中“数”和“运算”的基础上发展起来的．

在小学算术课本里同学们由浅入深地学习了整数、小数和分数的加、减、乘、除四则运算，并学会了用这些四则运算去解一些不太复杂的四则应用题．归纳一下，在用算术方法解应用题时主要用到了以下三种关系：

①部分数与总数的关系；

②两数差的关系；

③一倍数（或一份数）、倍数和几倍数的关系．

第1、第2种关系用“加”、“减”法完成，第3种关系则用乘、除法完成．在解四则运算题时用到了对于数的“加法”、“乘法”都普遍成立的运算法则：交换律、结合律、分配律．设 a、b、c 表示任意三个数，下列等式恒成立：

交换律：$a+b=b+a, a\times b=b\times a$

结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.

另外，在用算术方法解应用题时常按应用题的性质分为许多类型．如：和倍问题、差倍问题、行程问题、百分数问题、比例问题、…．对每类问题先归纳出解决这类

问题的方法、公式，并找出理由加以解释，再做这类题时就“套”这种公式．所以用算术方法解应用题时，对不同类型的题用不同的思路列式求解，解法就不同，因而用算术方法解应用题是不带普遍性的．

代数方法的进步首先在于找出了一个统一的方法，即用列“方程”来解很多不同类型的应用题．“方程”是代数学中的重要内容之一．用方程来解应用题时，首先是用一些简单的符号，通常用 x, y, z, t, s, u, v 等字母来表示问题中待求的未知数，然后把这些未知数和已知数平等地看待，并把题目中的数量关系直接（平铺直叙）“翻译”为算式表示出来．这就是所谓依题意列方程．接着是通过代数方程去确定其中所含未知数应该等于什么样的值，即“解方程”．而解方程的原理就是对方程中的数，包括已知数和未知数，运用在“算术”中学过的“数的运算法则”把未知数求出来．因为这些法则是对任何数都成立的，当然对那些暂时还不知它的值的“未知数”也应当成立．只要适当地运用这些法则，一般就可求出方程中的未知数的值．归纳起来用代数方法解应用题的步骤如下：

1．设未知数．常用 $x, y, z, t, s, \cdots$ 等字母表示．

2．依题意列方程．即把所要解决的代数问题中的未知量换成代表未知数的字母，把问题中各种量间的关系“翻译”为带字母的算式表示出来，特别注意找出其中的相等关系．用两个代数式表示同一个数量，列出一个方程．因此方程是含有未知数的等式．一般说来，有 n 个相等关系就能列出 n 个方程，当然我们从中选取列方程与解方程时最方便的形式．

3．解方程．目的是把原方程变成同解的形如 $ax=b$ 的方程，进而解出 $x=\frac{b}{a}$．一般步骤是：

①用分配律去括号．而不一定能像算术中那样先把括号中数算出来．因为其中有的是未知数算不出来．如下例中的（1）变成（2）．

【例 1】

$$64+x=3(32-x) \tag{1}$$

$$64+x=96-3x \tag{2}$$

$$x+3x=96-64 \tag{3}$$

$$4x=32 \tag{4}$$

$$x=8. \tag{5}$$

②移项．把含未知数的项与常数项（即不含未知数的项）分离开来，分别移到等号两端，注意移项变号法则．如上例中的（2）变成（3）．

③合并同类项，如上例中的（3）变成（4）．

④用未知数的系数去除方程两端求出 x 的值．如上例中的（4）变成（5）．

4．验算．一是实际计算求出的根是否满足方程，不满足的都舍去，二是根据题目的实际意义，删除不合理的解．

先以几个简单的四则应用题为例来对“算术解法”与“代数解法”作一比较．

【例 2】　车站给某工厂运 2000 箱玻璃．合同规定完好地运到一箱给 5 元运费．如损坏一箱，不给运费，倒赔 40 元．这批玻璃运到后，车站共收到运货款 9190 元．问损坏了几箱玻璃．

解：①算术解法：假如设有损坏，2000 箱玻璃全运到，则应得运货款：$2000\times5=10000$（元）．

和实际所得运货款相差：

$$10000-9190=810\text{（元）}.$$

现在让我们用一箱好的换一箱损坏的玻璃，总箱数 2000 不变，但每换一箱所得运货款减少：

$$40+5=45\text{（元）}$$

那么换多少箱，货款正好减少多出来的 810 元呢？做除法：

$$810\div45=18\text{（箱）}.$$

答：共换坏了 18 箱.

②代数解法：

设损坏了 x 箱，则没损坏的共 $2000-x$ 箱.

依题意列方程

$$5(2000-x)-40x=9190$$

$$45x=10000-9190$$

$$45x=810$$

$$x=18.$$

答：损坏了 18 箱.

比较这两种解法，可见代数方法简洁并具有高度普遍性. 我们在后面的许多例题中都能充分地看出代数方法的优越性. 但这决不等于说可以取消算术. 这正如火车虽快决不能代替步行. 在攀登高峰的崎岖的小道上还常常靠坚实的足步. 下面举几个例子来看看算术方法的不可缺少. 因为有的问题不易找到等量关系列方程.

【例 3】 一年级 72 名学生共交了 $\boxed{}$ 52.7 $\boxed{}$ 元课本费，其中的百位数和百分位上的数被水弄模糊了. 你能算出每人交多少元？

解：设 $\boxed{}\,52.7\,\boxed{}=\boxed{x}\,527\,\boxed{y}$ 分.

$\because\quad 72=8\times9$,

又$\because\quad (8,9)=1$

$\therefore\quad 8\mid\boxed{x}527\boxed{y}\Rightarrow y=2$.

且　$9\mid\boxed{x}527\boxed{2}\Rightarrow x=2$.

$\therefore$　原数为 25272 分，

$\therefore$　每人应交：

$$25272\div72=351\text{（分）}.$$

答：每人交 3.51 元.

【例 4】　求被 6 除余 4，被 10 除余 8，被 9 除余 4 的最小自然数.

解：$\because$　该数被 6 除余 4 .　　　　(1)

又　该数被 10 除余 8　　　　(2)

$\therefore$　该数是偶数.

再从被 9 除余 4 的偶数中从小到大挑选符合条件(1)、(2) 的数：

$4,\ 4+9\times2=22,\ 22+9\times2=40,\ 40+9\times2=58$,

又　$58\div6=9\cdots4$

$58\div10=5\cdots8$

$58\div9=6\cdots4$

答：58 为所求最小自然数.

【例 5】　三个学生甲、乙、丙各有若干张画片互相赠送. 第一次由甲送给乙、丙画片，所送的张数等于乙、丙各人已有的画片数；第二次由乙送给甲、丙画片，所送的张数等于甲、丙各人已有的画片数；最后由丙送给甲、乙画片，所送的张数也正好等于甲、乙各人已有的画片数. 这时每人的画片数都是 32 张. 问原来甲、乙、丙三人各有多少张画片？

解：用倒推法．由最后每人都是 32 张画片开始，在下面表格里由上行到下一行逐行填写，可知在第三次丙送画片前，乙送完画片后三人手中的画片数应分别为甲 $=\frac{32}{2}=16$（张），乙 $=\frac{32}{2}=16$（张），丙 $=16+16+32=64$（张）；同理，在第二次乙送画片前，甲送完画片后三人手中的画片数应分别为：甲 $=\frac{16}{2}=8$（张），乙 $=8+16+32=56$（张），丙 $=\frac{64}{2}=32$（张），…可推知原来：丙有 16 张，乙有 28 张，甲有 $8+28+16=52$（张）.

	甲	乙	丙
送完后情况	32 张	32 张	32 张
丙送前情况	16 张	16 张	64 张
乙送前情况	8 张	56 张	32 张
甲送前情况	52 张	28 张	16 张

答：原来甲有 52 张，乙有 28 张，丙有 16 张画片.

【例 6】 有甲、乙、丙三辆汽车，各以一定的速度从 A 地开往 B 地．乙比丙晚出发 10 分钟，出发后 40 分钟追上丙；甲比乙又晚出 20 分钟，出发后 1 小时 40 分钟追上丙．那么甲出发后需用多少分钟才能追上乙？

解法 1：设三车速度依次为 $V_甲$，$V_乙$，$V_丙$．丙比乙早出发 10 分钟，乙追上丙耗 40 分钟，是典型的追及问题：

乙追丙耗时：$40=\frac{10V_丙}{V_乙-V_丙}$，推出：$V_乙=\frac{5}{4}V_丙$.

丙比甲早出发 30 分钟，甲追上丙耗 100 分钟，也是追及问题：

甲追丙耗时：$100=\dfrac{30V_{丙}}{V_{甲}-V_{丙}}$，推出：$V_{甲}=\dfrac{13}{10}V_{丙}$．

甲比乙晚 20 分钟出发，追及时间 $=\dfrac{20V_{乙}}{V_{甲}-V_{乙}}$．现在 $V_{甲}$，$V_{乙}$ 都用 $V_{丙}$ 的某个倍数代入：

$$追及时间=\frac{20\times\frac{5}{4}V_{丙}}{\frac{13}{10}V_{丙}-\frac{5}{4}V_{丙}}=\frac{25}{\frac{26}{20}-\frac{25}{20}}=500\ （分钟）.$$

解法 1 既用了算术的追及问题公式，又用了列方程的代数方法．下面再介绍一种列表法，对解这类题更方便．

解法 2：我们把题中的条件按下列方式填入下面表格中：让同一列格子中填行相同路程时甲、乙、丙三辆汽车各自所需的时间，如第一列中填入稍稍转化了的已知条件：乙走 40 分钟的路程丙需走 40＋10＝50（分钟）；第二列中填入甲走 100 分钟的路程丙需用 100＋20＋10＝130（分钟）．以前两列中条件的关系，再根据当速度一定时路程与时间成正比的性质，当丙走 650＝〔50，130〕分钟的路程时乙需用 40×13＝520（分钟），甲则需用 100×5＝500 分钟．由于乙比甲早出发 20 分钟，恰为 520 分钟与 500 分钟之差，因此甲出发后 500 分钟时追上乙．

甲		100	500
乙	40		520
丙	50	130	650

答：甲出发后需 500 分钟才能追上乙．

说明：一般地，当知道丙走 c 分钟的路程与甲走 a 分钟、乙走 b 分钟的路程相等时，可列一方程求出所需的答案．设甲出发后 ax 分钟追上乙，则 $bx=ax+20$．

（20 为乙比甲早出发的分钟数.）因此 $x=\frac{20}{b-a}$，$ax=\frac{20a}{b-a}$，即甲出发后$\frac{20a}{b-a}$分钟追上乙.

在本题的条件下，$c=650$，$a=500$，$b=520$.

因此$\frac{20a}{b-a}=\frac{20\times500}{520-500}=500$（分钟）.

【例 7】 星期日小明去找同学玩了两三个小时，离开家时他看了看钟，回家时又看了看钟，发现时针与分针恰好互换了一个位置. 问小明共离开家多少时间？

解：因为小明离家回来时时针走到分针位置，分针走到时针位置，说明两针合起来恰好走了若干个整圈. 设外出时间分为二个时段，第一段为 2 小时. 小明出去整 2 小时，分针就应转过 2 圈，转回原处，而时针两小时走了$\frac{2}{12}$圈. 紧接着在第二个时间段，形成两针互换位置，两针合起来在第二时段内必须再走（$1-\frac{2}{12}$）圈. 由于分针在钟盘上转圈的速度是时针的 12 倍，所以在第二时段内分针要走其中的$(1-\frac{2}{12})\times\frac{12}{13}$圈，故分针要走：

$$(1-\frac{2}{12})\times\frac{12}{13}\times60=46\frac{2}{13}\text{（分钟）}.$$

答：小明离家共 2 小时又 $46\frac{2}{13}$分钟.

习　题　九

1. 把一个两位数的个位数字与其十位数字交换后得到一个新数，它与原来的数加起来恰好是某个自然数的平方，求原来这个两位数与新得到的两位数的和.

2. 一辆汽车在公路上匀速行驶，司机看见里程碑上的数字是一个两位数（用$\overline{AB}$表示），马上看看手表记下时间，一个小时以后，再看里程碑，上面仍然是一个两位数，不过恰好是第一个两位数颠倒了顺序（用$\overline{BA}$表示）. 再过一小时，里程碑上是三位数，又恰好是第一个两位数中间加了个零（用$\overline{A0B}$表示）. 请问车速是多少？三个里程碑上的数字各是多少？

3. 在一个红钱包与一个黑钱包里分别装着 6 枚和 8 枚硬币，并且两个钱包中的总钱数相等. 如果从红钱包中任取两枚硬币与黑钱包中任取的两枚硬币交换时，红钱包中的总钱数要么比原来多 2 分，要么比原来的钱数少 2 分. 问两个钱包中共装了多少钱？（注：这里的硬币只有 1 分、2 分、5 分三种）

习题九解答

1. 解：设原来的两位数为$\overline{ab}$，则

$\overline{ab} = 10a + b.$

把十位数字与个位数字交换得新数$\overline{ba}$，则

$\overline{ba} = 10b + a.$

由题设条件应有

$$\overline{ab}+\overline{ba}=(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$$

是某自然数的平方，由表达式 $11(a+b)$ 可知这个完全平方数既有一个约数 11，就一定还有一个约数 11，因此 11 是 $a+b$ 的约数，而 a、b 又都只能取自 1、2、3、…、8、9. 故 $a+b=11$.

$\therefore\quad \overline{ab}+\overline{ba}=121$.

答：原数与新数的和为 121.

2. 解：$\because\quad \overline{AB}=10A+B$

$\overline{BA}=10B+A$

$\overline{A0B}=100A+B$.

又根据题意有 $\overline{BA}-\overline{AB}=\overline{A0B}-\overline{BA}$，所以 $(10B+A)-(10A+B)=(100A+B)-(10B+A)$

即 $18B=108A, B=6A$.

由于 A、B 都是一位非零数字，所以 $A=1, B=6$.

答：第一个里程碑上数字是 16，第二个里程碑上数字是 61，第三个里程碑上数字是 106.

3. 解：我们先证明红钱包里不可能同时装有 1 分、2 分、5 分三种币值的硬币. 因为否则，从红钱包里任取两枚硬币时，可能有 2+1，2+5，1+5 三种情形. 前两种是奇数，后一种是偶数. 而从黑钱包里任取的二个硬币都能使红钱包的钱的奇偶性不变，这是不可能的. 类似可知，红钱包里不能同时有 2 分币和 1 分币或 2 分币和 5 分币. 因此红钱包中的硬币只有两种可能：一是全为 2 分币；二是装有一分与五分币没有 2 分币. 同理，黑钱包中或全为 2 分币，或其中没有 2 分币. 并且，由于两钱包中钱数相等而硬币数不等，因此不可能红、黑钱包中都只有 2 分币.

情形 1：当红钱包中全为 2 分币时，总钱数为 $2\times6=12$ 分. 此时显然黑钱包中不可能有两个或两个以上的五分币，也不可能都是一分币（否则红、黑钱包中装钱数不等）. 因此黑钱包里有一个五分币和七个一分币. 这种情形显然也满足题目中的后一条件. 这种情况，两个钱包中总钱数为：

$6\times2+5+1\times7=24$（分），即 2 角 4 分钱.

情形 2：红钱包仅装有一分或五分币.

①黑钱包中有 8 枚 2 分币. 则红钱包中也应有 16（$=2\times8$）分. 但一分币和五分币共 6 枚，总钱数不可能为 16 分，因此这种情形不可能发生.

②黑钱包中无 2 分币，设红钱包中有 m 枚五分币，n 枚一分币；黑钱包中有 p 枚五分币，q 枚一分币. 则

$$m+n=6, p+q=8, 5m+n=5p+q.$$

显然 $m>p$. 因此 $5(m-p)=q-n$, 因为 $0<q-n\leqslant8$, $5\mid q-n$, 所以 $q-n=5$, $m-p=1$. 这两式相减，得到 $(p+q)-(m+n)=4$. 这与 $(p+q)-(m+n)=8-6=2$ 矛盾. 所以这种情形也不会发生.

综上所述，两个钱包中共有 2 角 4 分钱.

第10讲 从算术到代数（二）

在上一讲中我们着重讲了在许多问题中算术方法是不可缺少的；在这一讲中，我们将通过一些例子看到代数方法不可取代的巨大优越性和强大威力，同时说明一元一次方程，多元一次方程组，不定方程的一般解法．

【例 1】 一个学生做 25 道数学题，对一题得 4 分，不答不给分，答错一题倒扣 1 分．他有 3 道题未做，得了 73 分．问他共答对了几道题？

解：设对了 x 道题，则答错 $25-3-x$ 道题．

依题意列方程：

$$\begin{aligned}4x-(25-3-x)&=73\\4x-22+x&=73\\5x&=95\\x&=19.\end{aligned}$$

答：这个学生答对了 19 道题．

【例 2】 某水池装有甲、乙两个注水管，单放甲管需 12 小时注满，单放乙管需 24 小时注满．现在要求 10 小时注满水池，并且甲、乙两管合开的时间尽可能少，那么甲、乙两管最少需要合放多少小时？

解：分析一下，由于要求甲、乙两管合放的时间尽可能少，所以必须让注水快的甲管在 10 个小时中全开着．其余的由乙管补足．

设甲、乙两管最少需合放 x 小时，则：

$$\frac{1}{12}\times 10+x\times\frac{1}{24}=1$$

$$\frac{x}{24}=\frac{2}{12}$$

$$x=\frac{1}{6}\times 24$$

$$x=4.$$

答：甲、乙两管最少需要合放 4 小时.

【例 3】　甲、乙两队学生参加郊区夏令营，但只有一辆车接送，坐不下. 甲队学生坐车从学校出发的同时，乙队学生开始步行. 车到途中某处让甲队学生下车步行，车立即返回接乙班学生并直开到夏令营，两班学生正好同时到达. 已知学生步行速度为 4 千米/小时，汽车载学生时速度为 40 千米/小时，空车时速度为 50 千米/小时，问甲班学生应步行全程的几分之几？

解：如图：

设全程为 x 千米，甲、乙两队分别步行 a、b 千米.

要使两队学生同时到达夏令营，只有他们两队步行的路程相等才行，故 $a=b$.

等量关系是：乙队走 a 千米路程的时间正好等于汽车送完甲队又原路返回时遇到乙队的时间，即：

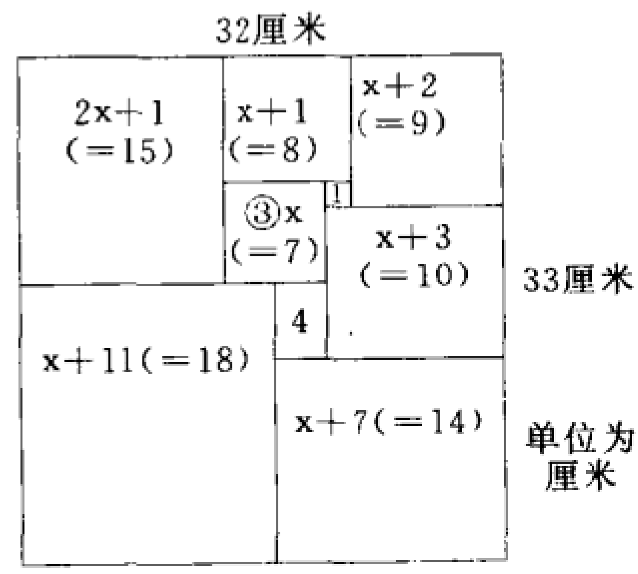
$$\frac{x-a}{40}+\frac{x-2a}{50}=\frac{a}{4}.$$

去分母，两端同乘 200，得

$$5x-5a+4x-8a=50a$$
$$9x=63a$$
$$\therefore\quad \frac{a}{x}=\frac{1}{7}.$$

答：甲队步行了全程的$\frac{1}{7}$.

【例 4】 一个矩形长 33 厘米，宽 32 厘米，用正方形如右图分割，已知最小正方形边长为 1 厘米，第二个小正方形边长为 4 厘米，请在图中填出其余正方形的边长.



解：设如图中第③个小正方形边长为 x，则其余每个正方形的边长都可以用 x 的代数式表达出来，如图所示.

再由大长方形的长为 33 厘米可得关系式：

$$2x+1+x+11=33$$
$$3x=21$$
$$x=7(\text{厘米}).$$

于是图中所有正方形的边长均可将 $x=7$ 代入，得如图所填的值.

还可以用大正方形的宽为 32 厘米来验证所求值的正确性：

$$2x+1+x+1+x+2=15+8+9=32(\text{厘米}).$$

【例 5】 小明每天定时从家到学校，若小明每分钟走 30 米，则迟到 3 分钟；若小明每分钟走 40 米，则早到 5 分钟. 求小明家到学校的距离.

解：设小明家到学校的距离为 S 米，则

$$\frac{S}{30}-3=\frac{S}{40}+5.$$

去分母，方程两端同乘以 120：

$$4S-360=3S+600$$

$$S=960.$$

答：小明家离学校 960 米.

有的问题必须用两个或更多的未知数才能列出方程，而且方程的个数也往往不只一个，我们称含有两个未知数并且未知数所在项的次数都是 1 次的这种方程为二元一次方程.

例如　$x+y=5$.

适合这个二元一次方程的每一对未知数的值叫做二元一次方程的一个解. 如：方程 $x+y=5$ 的正整数解有：

$x=1,y=4;x=2,y=3;x=3,y=2,x=4,y=1$ 这四个解.

如果一个问题的两个未知数必须满足两个二元一次方程，这两个方程联立在一起就叫做二元一次方程组. 同时适合这两个二元一次方程的每一对未知数的值叫做这个二元一次方程组的一个解.

多个未知数的方程组也可以类似地定义，解法也类似，在这里举两个最简单的例子来介绍二元一次方程组的解法. 常用的有代入消元法和加减消元法. 总之都是先设法消去一个未知数.

①代入消元法：

【例 6】　解二元一次方程组

$$\begin{cases} y=3x & (1) \\ x+y=8. & (2) \end{cases}$$

把(2)中的 y 用(1)中的 $3x$ 代替，就可以消去一个未知数 y，得：

$$x+3x=8$$
$$4x=8$$
$$x=2.$$

再把 $x=2$ 的值代入(1)或(2)，得：$y=6$.

∴ 这个方程组的解为 $\begin{cases}x=2\\y=6.\end{cases}$

②加减消元法：

【例 7】 解方程组

$$\begin{cases}2x-3y=7 & (1)\\8x-3y=61. & (2)\end{cases}$$

(2)－(1)得：$6x=54$

$$x=9.$$

将 $x=9$ 代入(1)或(2)得：$y=\frac{11}{3}$.

∴ 原方程组的解为 $\begin{cases}x=9\\y=\frac{11}{3}.\end{cases}$

再看几个二元一次方程组的例子.

【例 8】 一条路从甲地到乙地是下坡，从乙地到丙地是平路，一人骑车以每小时 12 千米的速度下坡，而以每小时 9 千米的速度通过平路到达丙地，共用了 55 分钟；回来时以每小时 8 千米的速度行至乙地，又以每小时 4 千米的速度行到甲地，共用了 1.5 小时．问从甲地到丙地共有多少千米？

解：设从甲地到乙地为 x 千米，从乙地到丙地为 y 千米，

依题意可得下列方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{9}=\dfrac{55}{60} & (1)\\[2ex] \dfrac{y}{8}+\dfrac{x}{4}=1.5. & (2)\end{cases}$$

去分母，

(1)两端同乘以 36 得：

$3x+4y=33.$

(2)两端同乘以 8 得：

$y+2x=12.$

∴　原方程组与下面方程组同解.

$$\begin{cases}3x+4y=33 & (3)\\ y+2x=12. & (4)\end{cases}$$

由(4)得 $y=12-2x$，代入(3)消去 y 得：

$$3x+4(12-2x)=33$$

$$3x+48-8x=33$$

$$5x=15$$

$$x=3.$$

将 $x=3$ 代入(4)得：

$y=12-2\times3$

$y=6.$

∴　原方程组的解为 $\begin{cases}x=3\\ y=6.\end{cases}$

$x+y=9.$

答：从甲地到丙地共 9 千米.

【例 9】　有甲、乙两个桶，甲桶里装了一些水，乙桶里装了一种纯农药，按下面方法来调配农药溶液：第一次甲桶倒进乙桶里的水的数量与原来乙桶中农药数量

相同，调匀；第二次把乙桶里的农药溶液倒进甲桶里，倒回的数量与甲桶里剩的水的数量相同，调匀；第三次再把甲桶中的农药溶液倒回乙桶，数量与此时乙桶中的溶液数量相同，这时两个桶中的农药溶液数量相同．请你算一算：

①开始时水与纯农药的比．

②最后在甲桶里的水与纯农药的比．

③最后在乙桶里的水与纯农药的比．

解：设甲桶里原有 x 千克水，乙桶里有 y 千克纯农药．

每次倒动后甲、乙两桶中溶液的总量变化如下：

第一次　甲桶剩 $x-y$(千克)

　　　　乙桶有：$2y$(千克)

第二次　甲桶有　$2(x-y)$(千克)

　　　　乙桶剩　$2y-(x-y)=3y-x$(千克)

第三次　甲桶剩　$2(x-y)-(3y-x)=3x-5y$(千克)

　　　　乙桶有　$2(3y-x)$(千克)．

①∵　第三次倒完后两桶中液体重量相同

∴　$3x-5y=2(3y-x)$

$3x-5y=6y-2x$

$5x=11y$

∴　$x:y=11:5$．

②∵　在第一次操作后甲桶中的 $x-y$ 千克都为水．由乙桶倒入的 $x-y$ 千克溶液中有一半是水，另一半是纯农药，故甲桶中最后水与纯农药的比为 3:1．

③又∵　在第二次操作后乙桶里有溶液 $3y-x$ 千克，其中的$\frac{1}{2}(3y-x)$千克是水，$\frac{1}{2}(3y-x)$千克是纯农

药．在后来从甲桶里倒入的液体中，有$\frac{3}{4}(3y-x)$千克是水，有$\frac{1}{4}(3y-x)$千克是农药，故乙桶最后含水量与纯农药的比为：

$$\frac{\frac{1}{2}(3y-x)+\frac{3}{4}(3y-x)}{\frac{1}{2}(3y-x)+\frac{1}{4}(3y-x)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}=5:3\ .$$

答：开始时水与纯农药的比为 11:5.

最后甲桶溶液中水与纯农药的比为 3:1.

而乙桶溶液中水与纯农药的比为 5:3.

习　题　十

1．解下列方程组：

① $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$　　② $\begin{cases} y=2x \\ x+y=3 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 9u+2v=15 \\ 3u+4v=10 \end{cases}$　　④ $\begin{cases} 2(x-150)=5(3y+50) \\ 10\%\cdot x+6\%\cdot y=8.5\%\times 800 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} 3x-4z=7 \\ 2x+3y-z=9 \\ 5x-9y-7z=8 \end{cases}$　　⑥ $\begin{cases} \dfrac{3}{x-4}+\dfrac{4}{y-1}=3 \\ \dfrac{9}{x-4}-\dfrac{2}{y-1}=2 \end{cases}$

2．有甲、乙两个瓶子，甲瓶里装了 200 毫升清水，乙瓶里装了 200 毫升纯酒精，第一次把 20 毫升的纯酒精由乙瓶倒入甲瓶；第二次把甲瓶中的溶液又倒 20 毫升回乙瓶．问此时甲瓶里含纯酒精多，还是乙瓶里含的水多？

3．钟面上从 5 点到 6 点分针与时针什么时间重合？什么时间成一直线但不重合？什么时间成一直角？

4．甲、乙、丙、丁四名学生共有45元钱．如果甲的钱增加2元，乙减少2元，丙增至2倍，丁减少为一半，则这四人的钱数相同．问四人各有多少钱？

5．小明、小勇与两位小同学小英、小娟去给军属运蜂窝煤，每人运的块数不同，但每人每次运的块数与他自己运的次数正好相等，小明比小勇多运15块，小英比小娟也多运15块，问共搬了多少块蜂窝煤？

6．某汽车制造厂工人共86人，已知每个工人平均可加工甲种零件15个，或乙种零件12个，或丙种零件9个．问应安排加工甲种零件、乙种零件、丙种零件各多少人才能使加工后的3个甲种零件、2个乙种零件和1个丙种零件恰好配套？

习题十解答

1．答案

① $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$　② $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

③ $\begin{cases} u=1\dfrac{1}{3} \\ v=1\dfrac{1}{2} \end{cases}$　④ $\begin{cases} x=650 \\ y=50 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x=5 \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=2 \end{cases}$　⑥ $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$

2．解法1：甲瓶的酒精与乙瓶的水含量一样多．因为开始各200毫升，互相折倒完后仍然每瓶各200毫升，因而乙瓶倒入甲瓶中的酒精量正是甲瓶倒入乙瓶中的水量．

解法 2：设倒完后甲瓶含有 x 毫升酒精，乙瓶含有 y 毫升水，则

$$200 - x + y = 200 - y + x$$

$$2y = 2x$$

$$y = x.$$

答：倒完后甲瓶中酒精含量与乙瓶中水含量相等.

3.①解：$\because$　分针每分钟走 1 格，时针每分钟走 $\frac{1}{12}$ 格，设 5 点过 x 分钟后分针与时针重合，依题意列方程：

$$x = 25 + \frac{x}{12}$$

$$x = 27\frac{3}{11}.$$

故 5 点 $27\frac{3}{11}$ 分钟时，两针重合.

②设从 5 点起分针走 y 分钟与时针成一直线，则

$$y - 30 = 25 + \frac{y}{12}$$

$$y = 60.$$

$\therefore$　6 点整时分针与时针成一直线但不重合.

③设从 5 点起分针走 z 分钟与时针成一直角，则

$$z = 25 + \frac{z}{12} + 15 \qquad 或 \qquad z = 25 + \frac{z}{12} - 15$$

$$z = 43\frac{7}{11} \qquad\qquad z = 10\frac{10}{11}.$$

$\therefore$　当 5 点 $43\frac{7}{11}$ 分钟时，或 5 点 $10\frac{10}{11}$ 分钟时，时针与分针成一直角.

4.解：设甲、乙、丙、丁原有钱数分别为 x 元、y 元、z 元、t 元，

则 $\begin{cases} x+y+z+t=45 \\ x+2=y-2 \\ y-2=2z \\ 2z=\dfrac{t}{2}. \end{cases}$

解之，甲原有 8 元，乙原有 12 元，丙原有 5 元，丁原有 20 元.

5. 解：设小明每次搬 x 块，则 x 次搬 x^2 块. 小勇每次搬 y 块，则 y 次搬 y^2 块. 小英每次搬 u 块，则 u 次搬 u^2 块，小娟每次搬 v 块，则 v 次搬 v^2 块.

∴ $x^2-y^2=15, u^2-v^2=15.$

∴ $(x+y)(x-y)=15, (u+v)(u-v)=15.$

但 15 只有两种表示成两个自然数乘积的形式：$15=1\times15=3\times5$，而四人搬的块数各不相同，所以

$$\begin{cases} x+y=15, \\ x-y=1, \\ u+v=5, \\ u-v=3, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+y=5, \\ x-y=3, \\ u+v=15, \\ u-v=1. \end{cases}$$

在这两种情形解出后都有：

$x^2+y^2+u^2+v^2=8^2+7^2+4^2+1^2=130.$

答：共搬煤 130 块.

6. 解：设安排加工甲、乙、丙三种零件的人数分别为 x 人，y 人，z 人，依题意列方程：

$$\begin{cases} x+y+z=86 \\ 15x=3\times9z \\ 12y=2\times9z \end{cases} \quad \text{解出} \quad \begin{cases} x=36 \\ y=30 \\ z=20. \end{cases}$$

答：安排 36 人生产甲种零件，30 人生产乙种零件，20 人生产丙种零件.

第11讲　综合题选讲（一）

前几讲对应用题按某些类型进行了研究，但在实际问题中，有些应用题不一定属于哪一种单一类型，有时是几种基本类型的综合．因此，在掌握一些基本类型解法的基础上，还应注意掌握分析问题的方法和综合解题能力的训练．

【例 1】　王师傅一月份生产 450 个零件．合格率为 80%．二月份产品合格率 90%，又知二月份比一月份少出废品 18 个，王师傅一、二月份共生产合格零件多少个？

解：①一月份生产的废品数：

$450\times(1-80\%)=90$（个）

②二月份生产的废品数：$90-18=72$（个）

③二月份生产零件数：$72\div(1-90\%)=720$（个）

④二月份生产合格产品数：$720-72=648$（个）

⑤一、二月份生产合格零件数：

$648+450-90$

$=648+360$

$=1008$（个）．

答：王师傅一、二月份共生产合格零件 1008 个．

【例 2】　一桶油连桶重 56 千克，三天用完．第一天用去$\frac{1}{3}$，第二天用去余下的油的$\frac{2}{3}$，第三天用去的比前两

天总和的$\frac{3}{7}$少 6 千克．三天各用油多少千克？油桶重多少？

分析　现将第二天用去余下的$\frac{2}{3}$转化为这桶油的几分之几，然后再找准对应分率．

解：①第二天用去全桶油的几分之几：

$$(1-\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

②第三天用的油再加 6 千克，占全桶油的几分之几：

$$(\frac{1}{3}+\frac{4}{9})\times\frac{3}{7}=\frac{1}{3}$$

三天用去的油再加上 6 千克，占全桶油的$\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{9}$．也即“超出”的 6 千克，占全桶油的$\frac{1}{9}$．

③一共的油多少千克？

$$6\div(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}-1)=54\text{（千克）}$$

④三天各用油多少千克：

$54\times\frac{1}{3}=18$（千克）　　第一天

$54\times\frac{4}{9}=24$（千克）　　第二天

$54-18-24=12$（千克）　　第三天

⑤桶重多少千克？

$$56-54=2\text{（千克）}$$

或用

$$6\div\left\{\left[\frac{1}{3}+(1-\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}\right]\times\frac{3}{7}-\left[1-\frac{1}{3}-(1-\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}\right]\right\}$$

来计算油的总重量．

你能说出算式每一步表示什么吗？

答：三天依次用油 18 千克、24 千克、12 千克，油桶重 2 千克.

【例 3】　甲、乙、丙三个工人合做一件工作，16 天完成，共得工资 120 元．这件工作如由甲单独做 40 天可完成；由乙单独做 48 天可完成．现在工资是按所完成的工作量分配，三人各应得多少元？

分析　甲 16 天完成该工作的 $\frac{1}{40}\times 16=\frac{2}{5}$；乙 16 天完成该工作的 $\frac{1}{48}\times 16=\frac{1}{3}$；丙 16 天完成该工作的 $1-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$，这样甲、乙、丙所得工资就能求出.

解：①甲得工资：$120\times(\frac{1}{40}\times 16)=48$（元）

②乙得工资：$120\times(\frac{1}{48}\times 16)=40$（元）

③丙得工资：$120\times(1-\frac{1}{40}\times 16-\frac{1}{48}\times 16)=32$（元）

或：$120-48-40=32$（元）.

答：甲、乙、丙各得工资 48 元、40 元、32 元.

【例 4】　甲、乙、丙、丁四人共同生产一批零件，甲生产的占其他三人生产总数的 $\frac{2}{13}$，乙生产的占其他三人生产总数的 $\frac{1}{4}$，丙生产的占其他三人生产总数的 $\frac{4}{11}$．已知丁生产了 60 个，甲、乙、丙各生产零件多少个？

分析　要想求甲、乙、丙各生产零件多少个，需要知道这批零件的总数．题上只告诉了丁生产了 60 个，关键问题是要求出这 60 个零件对应总量的几分之几？

我们从条件看：甲生产的占其他三人生产量的 $\frac{2}{13}$，

甲的生产量占这批零件总量的几分之几？甲的生产量占其他三人的$\frac{2}{13}$，其他三人生产量为“1”，所以，甲的生产量占总数的：$\frac{2}{13}\div(1+\frac{2}{13})=\frac{2}{13}\times\frac{13}{15}=\frac{2}{15}$.

同理，乙的产量占总量的：

$\frac{1}{4}\div(1+\frac{1}{4})=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

丙的生产量占总量的：

$\frac{4}{11}\div(1+\frac{4}{11})=\frac{4}{15}$.

这样，丁的生产量60件，就占四人生产总量的：

$1-\frac{2}{15}-\frac{1}{5}-\frac{4}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. 由这个条件可以求出零件的总数：

$60\div\frac{2}{5}=60\times\frac{5}{2}=150$. 求出零件的总量，再求甲、乙、丙三人的产量就容易了.

解：①甲的产量占总量的：$\frac{2}{13}\div(1+\frac{2}{13})=\frac{2}{15}$

②乙的产量占总量的：$\frac{1}{4}\div(1+\frac{1}{4})=\frac{1}{5}$

③丙的产量占总量的：$\frac{4}{11}\div(1+\frac{4}{11})=\frac{4}{15}$

这批零件总数是：$60\div(1-\frac{2}{15}-\frac{1}{5}-\frac{4}{15})=150$（个）

甲生产的零件个数：$150\times\frac{2}{15}=20$（个）

乙生产的零件个数：$150\times\frac{1}{5}=30$（个）

丙生产的零件个数：$150\times\frac{4}{15}=40$（个）.

答：甲、乙、丙生产零件数分别是20个、30个、40

个.

【例 5】　今年爷爷的年龄是小明年龄的 6 倍，几年后爷爷的年龄是小明年龄的 5 倍. 又过几年以后，爷爷年龄将是小明年龄的 4 倍，爷爷今年是多少岁？

解：设爷爷今年为 x 岁，则小明今年$\frac{x}{6}$岁，m 年后爷爷年龄是小明的 5 倍，即

$$x+m=5\left(\frac{x}{6}+m\right)$$
$$6x+6m=5x+30m$$
$$x=24m.$$

n 年后爷爷年龄是小明的 4 倍，即

$$x+n=4\left(\frac{x}{6}+n\right)$$
$$6x+6n=4x+24n$$
$$x=9n.$$

$\because$　$[24,9]=72$

$\therefore$　$x=72$.

答：爷爷今年 72 岁.（一般而言，"今年爷爷 144 岁，小明 24 岁"不合常情.）

【例 6】　一辆车从甲地开往乙地，如果把车速提高 20%，可以比原定时间提前 1 小时到达；如果以原速行驶 120 千米后，再将速度提高 25%，可以提前 40 分钟到达乙地. 那么，甲乙两地相距多少千米？

分析　距离固定的行程问题时间与速度成反比. 车速提高 20%，所用时间为原来的$\frac{5}{6}$. 所以，以原速行驶全程需用 $1\div\left(1-\frac{5}{6}\right)=6$（小时）.

同样，车速提高 25%，所用时间缩短为原来的$\frac{4}{5}$. 如果从开始就提高车速，全程可提前 $6\times(1-\frac{4}{5})=1\frac{1}{5}$（小时）. 现只提前了 40 分钟，少提前 $1\frac{1}{5}-\frac{40}{60}=\frac{8}{15}$（小时）. 这是因为前 120 千米是按原速行驶的. 如果提高车速 25%，行驶 120 千米可提前$\frac{8}{15}$小时.

解：设全程为 x 千米

$$x:120=1\frac{1}{5}:\frac{8}{15}$$
$$x=270.$$

答：甲、乙两地相距 270 千米.

【例 7】 小玲沿某公路以每小时 4 千米速度步行上学，沿途发现每隔 9 分钟有一辆公共汽车从后面超过她，每隔 7 分钟遇到一辆迎面而来的公共汽车. 若汽车发车的间隔时间相同，而且汽车的速度相同，求公共汽车发车的间隔是多少分钟？

分析 这题用设未知数比较方便，设公共汽车的速度为 x 千米/小时，由于公共汽车车速相同，间隔也相同，所以每两辆汽车间的距离都是相等的，根据车、人迎面相遇，相当于距离为两车间隔的相遇问题：速度和×相遇时间＝间隔. 车同向追人，相当于差距为两车间隔的追及问题. 速度差×追及时间＝间隔. 列出方程.

解：设公共汽车的速度每小时 x 千米，则

$$(x+4)\times\frac{7}{60}=(x-4)\times\frac{9}{60}$$
$$7x+28=9x-36$$

$$2x=64$$
$$x=32.$$

两车之间间隔距离为：$(32+4)\times\frac{7}{60}=4.2$（千米）

两车间隔时间为：$4.2\div32\times60=7\frac{7}{8}$（分钟）.

答：汽车发车时间间隔是 $7\frac{7}{8}$分钟.（注：这里使用设间接未知数、选速度为未知数 x，解法更简便．如果设两车之间的相等的间隔距离为未知数，不妨设为 l，则由题意列方程有

$$\frac{l}{V_{车}+v_{人}}=7$$

$$\frac{l}{V_{车}-v_{人}}=9$$

此处 $V_{车}$ 表示车的速度，单位米/分，$v_{人}$ 表示人的速度，单位同前．上式变形为

$$\begin{cases}\dfrac{V_{车}}{l}+\dfrac{v_{人}}{l}=\dfrac{1}{7}\\[2ex]\dfrac{V_{车}}{l}-\dfrac{v_{人}}{l}=\dfrac{1}{9}\end{cases}\qquad 所以\frac{V_{车}}{l}=\frac{8}{63}.$$

得出$\frac{l}{V_{车}}=\frac{63}{8}=7\frac{7}{8}$（分钟），也即是两车间隔时间．结果与前一方法一致．从这一典型例子读者也许可以体会不同的列方程解题方法）.

【例 8】　某水池有甲、乙、丙三个放水管．每小时甲能放水 100 升，乙能放水 125 升．现在先使用甲管放水，2 小时后，又开始使用乙管，让甲、乙两管同时放水，再过一段时间后，又加入丙管放水．直到把池中水全部放完．计算甲、乙、丙三管的放水量，发现它们恰

好相同. 问池中原有水多少升?

分析与解答 欲求池中原有水量，由题意知它应该是甲、乙、丙三管放水总和，而题中又告诉三管放水量相同，因此只需求一管放水量即可. 仔细分析题意知：甲、乙两管放水类似追及问题，甲速度慢，先行2小时，乙速度快花一段时间追上甲，“所走路程”即是放水量，至此问题也就迎刃而解. 下面分步说明

①乙管放水时间：

$2\times100\div(125-100)=200\div25=8$（小时）

②乙管放水量：

$8\times125=1000$（升）

③池中原有水量：

$3\times1000=3000$（升）.

答：池中原有水3000升.

【例9】 两个小孩在圆形跑道上从同一点 A 出发按相反方向运动，他们的速度分别是5米/秒，9米/秒. 如果他们同时出发并当他们在 A 点第一次相遇时候结束，那么他们从出发到结束之间相遇的次数是多少?（不包括出发和结束的两次）

分析与解答 因为是在圆形跑道上跑，因此两个小孩所走路程之和为1个圆形跑道长度 S 时第一次相遇，为2个 S 时第二次相遇，…为 K 个 S 时第 K 次相遇，这样我们把出发时刻记为0时刻，则第一次相遇时刻为 $\frac{S}{14}$，第二次相遇时刻为 $\frac{2S}{14}$，…第 K 次相遇时刻为 $\frac{KS}{14}$，这样 K 次相遇时两人共走路程分别为 $\frac{5K}{14}S$ 和 $\frac{9K}{14}S$. 设第 K 次时

两人自出发后第一次在 A 相遇，则 K 即为使得$\frac{5K}{14}$和$\frac{9K}{14}$都是整数的最小的自然数 K. 又因为（5，14）=1，（9，14）=1，所以 K 最小为 14，这样中间共相遇了14－1=13（次）.

答：他们从出发到结束之间相遇的次数是 13 次.

分析 2　由于他们俩人在 A 点第一次相遇，因此两个人都应走了整数个 S, 设前一个小孩为 mS, 后一小孩为 nS, 显然所用时间相同，所以 $\frac{mS}{5}=\frac{nS}{9}$, 即 $9m=5n$, 又（9，5）=1，而题目所求应是满足条件的最小的 m 和 n. 所以 m 应为 5，n 应为 9，这样两人共走了 14 个 S, 因为他们每共走一个 S 就相遇一次，这样共相遇了 14 次，那么中间应相遇 13 次.

习题十一

1. 有一堆苹果平均分给幼儿园大、小班小朋友，每人可得6个，如果只分给大班每人可得10个，问只分给小班时，每人可得几个?

2. 甲仓有粮80吨，乙仓有粮120吨，如果把乙仓的一部分粮调入甲仓，使乙仓存粮是甲仓的60%，需要从乙仓调入甲仓多少吨粮食?

3. 光明小学六年级选出男生的$\frac{1}{11}$和12名女生参加数学竞赛，剩下的男生人数是剩下的女生人数的2倍. 已知六年级共有156人，问男、女生各有多少人?

4. 六年级举行一次数学竞赛，共有若干名同学得奖，其中得一等奖的同学比余下的得奖人数的$\frac{1}{5}$少3名，得二等奖的恰占得奖人数的$\frac{1}{3}$，得三等奖的同学比得二等奖的同学多21名. 问得奖人数是多少?

5. 甲、乙、丙三人各有巧克力豆若干粒，要求互相赠送. 先由甲给乙、丙，甲给乙、丙的豆数依次等于乙、丙原来各人所有豆数. 依同办法，再由乙给甲、丙，所给豆数依次等于甲、丙各人现有的豆数. 最后由丙给甲、乙，所给的豆数依次等于甲、乙各人现有的豆数. 互赠后每人恰好各有豆32粒，问原来三人各有豆多少粒?

6. 王强骑自行车上班，以均匀速度行驶. 他观察来往的公共汽车，发现每隔12分钟有一辆汽车从后面超过他，每隔4分钟迎面开来一辆，如果所有汽车都以相同的匀速行驶，发车间隔时间也相同，那么调度员每隔几分钟发一辆车?

习题十一解答

1．$1\div(\frac{1}{6}-\frac{1}{10})=15$（个）．

2.①甲仓有粮：$(80+120)\div(1+60\%)=125$（吨）．

②从乙仓调入甲仓粮食：$125-80=45$（吨）．

3.①男生人数：$(156-12)\div[1+(1-\frac{1}{11})\div 2]=99$ 人．

②女生人数：$156-99=57$（人）．

4．设获奖人数为 x, 则

$$x=(\frac{2}{3}x+21)+[\frac{1}{5}(\frac{2}{3}x+21)-3]$$

所以 $x=111$(人)．

5．用倒推法．列表：

	甲	乙	丙
最后：	32	32	32
丙未给甲和乙时：	16	16	64
乙未给甲和丙时：	8	56	32
甲未给乙和丙时：	52	28	16

答：甲、乙、丙原有巧克力豆各为 52 粒、28 粒、16 粒．

6．汽车间隔距离是相等的，列出等式为：

(汽车速度 − 自行车速度)×12

＝（汽车速度＋自行车速度）×4

得出：汽车速度＝自行车速度的 2 倍．

汽车间隔发车的时间＝汽车间隔距离÷汽车速度

＝（2 倍自行车速度 − 自行车速度）×12÷2 倍自行车速度＝6（分钟）．

第12讲　综合题选讲（二）

解综合题，除了要有牢固的解基本题的基础之外，还要求解题者有创造性意识，有构造（构思）能力，有探索能力，要善于把复杂的问题化归为较简单的问题.

【例1】　任意100个自然数，从中是否可找出若干个数（也可以是一个，也可以是多个），使得找出的这些数之和可以被100整除？说明理由.

分析　100太大，先从小一些的数分析.

如果是两个自然数，当其中有偶数时，这个偶数可被2整除，这时结论成立；当其中没有偶数时，这两个奇数之和是偶数，这两个数之和能被2整除，可见对于两个自然数，结论成立.

如果有3个自然数，当其中有3的倍数时，这个数就可被3整除，选这个数即可；当其中没有3的倍数时，如果这3个数被3除的余数相等，那么这3个数之和可被3整除，这时可选出这3个数；如果这3个数被3除后有的余1，有的余2，就取余1和余2的各一个数，这两个数之和可被3整除．因此，对于3个整数的情形，结论成立.

类似的分析可知，对于4个整数的情形，结论成立．不过分析的过程要更长些.

按这种思路分析下去，虽然能够依次断定对于5个，6个，7个，8个，…整数时结论成立，但是还不能说

"对于 100 个整数结论也成立". 因为我们不可能在短时间内一直验证到 100. 看来要另外设计证题的方法. 虽然没有证出原来的题目，但是从简单情况可猜想原题的结论应当是肯定的.

因为本题结论是与若干个数之和有关的，由此可联想构造"若干个数之和"形式的数. 再进一步考虑被 100 除后的余数.

设原来的 100 个数是 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$. 考虑 $b_1,b_2,\cdots,b_{100}$, 其中

$$b_1=a_1,$$

$$b_2=a_1+a_2,$$

$$b_3=a_1+a_2+a_3,$$

$$\cdots$$

$$b_{100}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}.$$

很显然每个 $b_i(i=1,2,\cdots,100)$, 以及它们中的任意两个之差（例如 $b_5-b_2=a_3+a_4+a_5$）, 都是若干个原来的数之和.

考虑 $b_1,b_2,\cdots,b_{100}$被 100 除后各自的余数.

如果有一个数，例如 b_1, 它能被 100 整除，那么问题就解决了.

如果任一个数被 100 除之后的余数都不是 0，那么 100 个数最多可能余 1，余 2，…，余 99，所以至少有两个数，它们被 100 除后的余数相同. 这时，它们的差可被 100 整除，也就是说在 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$中存在若干个数，它们的和可被 100 整除.

说明：上面的论证方法利用了余数类，同余，抽屉原理，这些解数学竞赛题中常用的方法. 在考虑 $b_1,b_2,\cdots,$

b_{100}时，采用了构造法.

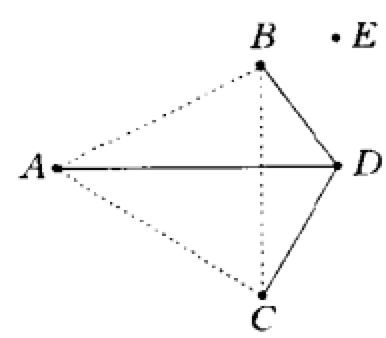
应当指出，题目中的“100”不是本质的，改成200，300…，甚至改成任一自然数n，结论也成立，证法相同.

【例2】 某班学生有下列特点：任何四个人中，都有一个人与另外三个人通过电话. 证明：全班之中的任意四个人中，可找到一个人，这个人与全班所有人都通过电话.

分析 这个题目中“数”很少，要论证的结论“任意四个人中可找到一个人，这个人与全班所有的人都通过电话”又比较强，为此，要充分利用“任何四个人中都有一个人与另外三个人通过电话”的已知条件.

画个示意图，人用点表示，两个人之间通过电话就用这两点的实连线表示，否则就用虚线表示.

如果这些学生之间的任何两个人都有线相连，那么问题已解决；



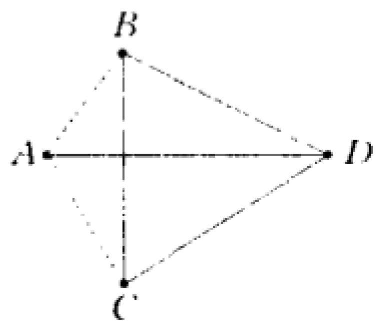
如果有四个人A、B、C、D有如右图所示的关系：

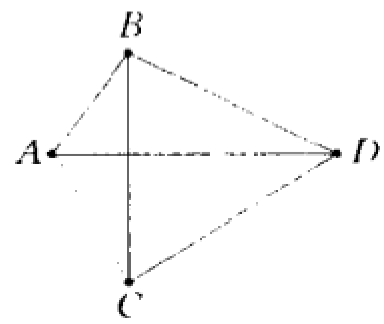
那么D与A、B、C都通过电话，考虑除A、B、C、D外的任何一个人E. D、E之间一定通过电话. 否则A、C、D、E四人与已知条件不符. 由于E的任意性表明D与所有人通过电话.

如果有四个人A、B、C、D，它们间的关系如下图所示，与上图的证法类似，可知D与所有人通过电话.

我们已讨论了所有可能的情形，因此综上所证知：任意四人中，总有一个人，这个人与所有人通过电话.

说明：我们采用的证明方法是用图这种直观方式表达关系和逻辑，把人和通电话分别用点、边表示，未通





电话用虚线表示．这样便于对照图形分析问题．这种方法是图论的基本方法．

在上述证明中，使用了分情况论证（分情况讨论）的方法．这是推理论证的基本方法之一．

【例 3】　甲、乙两所学校的学生中，有些学生互相认识．已知甲校的学生中任何一个人也认不全乙校的学生，乙校的任意两名学生都有甲校中的一个公共朋友．问：能否在甲校中找出两个学生 A、B，从乙校中找出三个学生 C、D、E，使得 A 认识 C、D，不认识 E，B 认识 D、E，不认识 C？说明理由．（认识是相互的，即甲认识乙时，乙也认识甲）．

分析　如果选乙校学生中任意两个人为 C、D，那么甲校中有认识 C、D 的人，设它为 A．因为 A 认不全乙校学生，所以在乙校中有学生 E，A 不认识 E．这时 A 认识 C、D，不认识 E．按这个思路，再考虑选 B 时有些麻烦．虽然对于乙校的 D、E，可知甲校中有学生认识 D、E，如果把甲校的这个认识 D、E 的人选为 B．这个 B 可能认识 C，这样就达不到题目要求了．

之所以陷入上述困境，原因在于 C、D 在乙校中太“任意”了，在乙校中任选 C、D，就可能使得最后甲校中的 B 选不出来，看来要选特殊一点的人．

因为甲校学生都认不全乙校的学生，所以存在甲校

的认识乙校学生数目最多的人（或认识乙校学生数日最多的人之一）. 选他为 A. 因为 A 认不全乙校学生，取 A 不认识的乙校的一名学生为 E, 设 A 认识的乙校的一名学生为 D.

对于 D、E, 在甲校中有一个人，设它为 B, B 认识 D、E. 因为 B 认识 E, A 不认识 E, 所以 A、B 不是同一个人.

在 A 认识的乙校学生中，一定有 B 不认识的人，若不然，当 A 认识的乙校的任何一名学生都认识 B 时，B 至少要比 A 多认识一个人 E, 这与“甲校学生中认识乙校人数最多的人之一是 A”的假定矛盾. 设在乙校中，学生 C 认识 A 而不认识 B, 这样就有：

A 认识 C、D, 不认识 E, B 认识 D、E, 不认识 C.

说明：为论证的需要，选择特殊元素（如最多、最少、最早、最晚、…等），是行之有效的办法，这个特殊元素的性质作为论证的一个重要已知条件.

【例 4】 若干个自然数之和是 1993，这些自然数之积的最大值是多少？

分析 这个问题中有下列难点：“若干个”是几个？这些自然数都是什么？如何找出这些自然数之积的最大值？虽然把有限数 1993 拆成各种不同的自然数之和的方法也是有限的，但是一一分拆再求出它们的乘积，最后再从乘积中选出最大的是不现实的，那样计算量过大.

首先可以看出，1993 拆开的各加数中不应当有 1. 因为 1 作为因数对乘积无作用，当把 1 合并到另一个加数中去后，会使乘积增大，因此不拆出 1 为加数.

另一方面，拆成的加数也不应当太大，例如当拆成的加数中有 5 时，只要把 5 再拆为 $2+3$, 由于 $2\times3>5$,

可见把 5 去掉，换成 $2+3$ 会使乘积增大．同样，如果加数中有 6，换成 $3+3$，由于 $3\times3>6$，可见换成 $3+3$ 会使乘积增大．一般地，因为当 $a>4$ 时，$2\times(a-2)>a$，所以我们总可以把 5 或 5 以上的加数 a 换成 $2+(a-2)$，这样使乘积增大，也就是说，所拆成的加数中至多是 4．

进一步考虑，如果有加数 4，把 4 用 $2+2$ 换一下，乘积不变．因此，为使考虑问题简单起见，可以认为所拆成的加数中不含 4，即加数中只有 2 和 3 两种数．

如果加数中有 3 个或 3 个以上的“2”，当把 3 个“2”用 2 个“3”代替时，和不变，但因为 $2\times2\times2<3\times3$，可见乘积增大．由此可以设想 1993 拆成的各加数中仅有 2、3，而且 2 的数目不多于两个．

因为 1993 不是 3 的倍数，所以至少要拆出一个“2”，但 $1993-2=1991$ 也不是 3 的倍数，可见 1993 要拆出两个“2”．容易看出：

$$1993=2+2+\overbrace{3+3+\cdots+3}^{\text{共663个}},$$

这时取得最大乘积　$2^2\times3^{663}$．

说明：上面采取了层层化简的分析方法，把 1993 的分拆问题归结为“只含有 2、3，且 2 的数目不多于两个”，以达到乘积最大．这是在不断比较、调整的过程中对各加数的性质逐渐认识得到的．在朝着使乘积逐渐增加的方向，我们排除了加数中的 1，排除了加数中大于 4 的数，进而去掉 4，限制了加数中“2”的数目，经过这样一系列的比较、简化才比较方便地找出了乘积的最大值，我们应当学习这种层层化简的转化策略．

习题十二

1. 某个四位数有如下特点：①这个数加 1 之后是 15 的倍数；②这个数减去 3 是 38 的倍数；③把这个数各数位上的数左右倒过来所得的数与原数之和能被 10 整除，求这个四位数.

2. 某学校的若干学生在一次数学考试中所得分数之和是 8250 分. 第一、二、三名的成绩是 88、85、80 分，得分最低的是 30 分，得同样分的学生不超过 3 人，每个学生的分数都是自然数. 问：至少有几个学生的得分不低于 60 分？

3. 一个自然数，如果它的奇数位上各数字之和与偶数位上各数字之和的差是 11 的倍数，那么这个自然数是 11 的倍数，例如 1001，因为 $1+0=0+1$，所以它是 11 的倍数；又如 1234，因为 $4+2-(3+1)=2$ 不是 11 的倍数，所以 1234 不是 11 的倍数. 问：用 0、1、2、3、4、5 这 6 个数字排成不含重复数字的六位数，其中有几个是 11 的倍数？

4. 做少年广播体操时，某年级的学生站成一个实心方阵时（正方形队列）时，还多 10 人，如果站成一个每边多 1 人的实心方阵，则还缺少 15 人. 问：原有多少人？

习题十二解答

1．设所求的四位数为$\overline{abcd}$.

因为该数加 1 之后是 15 的倍数，也是 5 的倍数，所以 $d=4$ 或 $d=9$.

因为该数减去 3 是 38 的倍数，可见原数是奇数，因此 $d\neq4$，只能是 $d=9$.

因为$\overline{abcd}+\overline{dcba}$是 10 的倍数，所以 $a+d=10$，进而知 $a=1$，这时所求的四位数是$\overline{1bc9}$.

因为 $\overline{1bc9}=38m+3$，

所以 $\overline{1bc6}=38m$.

因为 $1006\leqslant\overline{1bc6}\leqslant1996$，

所以 $26<\frac{1006}{38}\leqslant\frac{\overline{1bc6}}{38}\leqslant\frac{1996}{38}<53$.

这表明 $m=27$、37、47；32、42、52.（因为 $38m$ 的尾数为 6）

又因为 $38m+3=15k-1$ （m、k 是正整数）

所以 $38m+4=15k$.

由于 $38m$ 的个位数是 6，所以 $5\mid(38m+4)$，

因此 $38m+4=15k$ 等价于 $3\mid(38m+4)$，

即 3 除 m 余 1，因此可知 $m=37$，$m=52$.

所求的四位数是 1409，1979.

2．除得分 88、85、80 的人之外，其他人的得分都在 30 至 79 分之间，其他人共得分：

$8250-(88+85+80)=7997$（分）.

为使不低于 60 分的人数尽量少，就要使低于 60 分的人

数尽量多，即得分在 30～59 分中的人数尽量多，在这些分数上最多有 $3\times(30+31+\cdots+59)=4005$ 分（总分），因此，得 60～79 分的人至多总共得 $7997-4005=3992$ 分.

如果得 60 分至 79 分的有 60 人，共占分数 $3\times(60+61+\cdots+79)=4170$，比这些人至多得分 $7997-4005=3992$ 分还多 178 分，所以要从不低于 60 分的人中去掉尽量多的人. 但显然最多只能去掉两个不低于 60 分的（另加一个低于 60 分的，例如，$178=60+60+58$）. 因此，加上前三名，不低于 60 分的人数至少为 61 人.

3. 设用 0、1、2、3、4、5 组成的不含重复数字的六位数是 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$，它能被 11 整除，并设 $a_1+a_3+a_5\geqslant a_2+a_4+a_6$，则对某一整数 $k\geqslant0$，有：

$$a_1+a_3+a_5-a_2-a_4-a_6=11k \qquad (*)$$

也就是：

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=11k+2(a_2+a_4+a_6)$$

$$15=0+1+2+3+4+5=11k+2(a_2+a_4+a_6) \qquad (**)$$

由此看出 k 只能是奇数

由（*）式看出，$0\leqslant k<2$，又因为 k 为奇数，所以只可能 $k=1$，但是当 $k=1$ 时，由（**）式看出

$$a_2+a_4+a_6=2.$$

但是在 0、1、2、3、4、5 中任何三个数之和也不等于 2，可见 $k\neq1$. 因此（*）不成立.

对于 $a_2+a_4+a_6>a_1+a_3+a_5$ 的情形，也可类似地证明 $(a_2+a_4+a_6)-(a_1+a_3+a_5)$ 不是 11 的倍数.

根据上述分析知：用 0、1、2、3、4、5 不能组成不

包含重复数字的能被 11 整除的六位数.

4. 当扩大方阵时，需补充 $10+15$ 人，这 25 人应站在扩充的方阵的两条邻边处，形成一层人构成的直角拐角. 补充人后，扩大的方阵每边上有 $(10+15+1)\div 2=13$ 人. 因此扩大方阵共有 $13\times 13=169$ 人，去掉 15 人，就是原来的人数

$169-15=154$ 人.

第13讲 速算与巧算综合练习

1. 计算：$1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}+13\frac{1}{56}+15\frac{1}{72}+17\frac{1}{90}$

2. 计算：$(123456+234561+345612+456123+561234+612345)\div 6$

3. 计算：$1994\times 19931993-1992\times 19941994$

4. 计算：$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$

5. 计算：$1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-\cdots+1994$

6. 计算：$472634^2+472635^2-472633\times 472635-472634\times 472636$

7. 计算：$(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{99})\times(1-\frac{1}{99})$

8. 计算：

$$1-\frac{2}{1\times(1+2)}-\frac{3}{(1+2)\times(1+2+3)}-\frac{4}{(1+2+3)(1+2+3+4)}-\cdots-\frac{10}{(1+2+\cdots+9)\times(1+2+\cdots+10)}$$

9. 计算$\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{2\times 3\times 4\times 5}+\frac{1}{3\times 4\times 5\times 6}+\cdots$

$+\dfrac{1}{97\times98\times99\times100}$

10. 计算：

$$\frac{(1+\frac{7}{1})(1+\frac{7}{2})(1+\frac{7}{3})(1+\frac{7}{4})(1+\frac{7}{5})(1+\frac{7}{6})(1+\frac{7}{7})(1+\frac{7}{8})(1+\frac{7}{9})}{(1+\frac{9}{1})(1+\frac{9}{2})(1+\frac{9}{3})(1+\frac{9}{4})(1+\frac{9}{5})(1+\frac{9}{6})(1+\frac{9}{7})}$$

11. 计算：$\underbrace{11\cdots1}_{1995个1}\underbrace{55\cdots5}_{1995个5}\div\underbrace{33\cdots35}_{1994个3}$

12. 计算：$(1+\frac{19}{92})+(1+\frac{19}{92}\times2)+(1+\frac{19}{92}\times3)+\cdots+(1+\frac{19}{92}\times10)+(1+\frac{19}{92}\times11)$

13. 已知等式

$0.126\times79+12\frac{3}{5}\times\square-6\frac{3}{10}\div25=10.08$

其中$\square$内是一个最简分数，试求$\square$内的分数.

14. 计算：

$12345678910111213\div31211101987654321$，

商的小数点后前三位数字各是什么？

15. 计算：$(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13})\times385$，它的整数部分是多少？

16. D 是 1 至 1999 的所有奇数之和，N 是 2 至 1998 所有偶数之和. 求 $D-N$ 的值.

17. 若 $S=1+11+111+1111+11111+\cdots+\underbrace{11\cdots11}_{30个1}$

问 S 的十位数字是多少？

18. 若已知 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+25^2=5525$，试求 $2^2+4^2+6^2+8^2+\cdots+50^2$ 之值.

19. 现规定符号"○"表示选择两数中较大数的运算，

“★”表示选择两数中较小数的运算．例如 5○3＝3○5＝5，5★3＝3★5＝3．试计算：

$$\frac{(0.\dot{6}\bigcirc\frac{17}{26})+(0.625\bigstar\frac{23}{33})}{(0.\dot{3}\bigstar\frac{34}{99})+(\frac{237}{106}\bigcirc 2.25)}.$$

20．试求 $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}$ 误差小于 0.006 的近似值．

21．（外国趣题）巴黎有居民 2754842 人，若依次给每个人编一个号码（从 1 至 2754842 号），请你算一算，为了编这些号码，需要使用多少个阿拉伯数字？所有号码相加的和是多少？（精确到百万）

速算与巧算综合练习参考解答

1．81.4．

原式＝ $(1+3+5+7+9+11+13+15+17)+(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90})$

$=81+(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10})$

$=81+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})$

$=81+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$

$=81.4.$

2．388888.5．如果列出加法竖式

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1 \\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2 \\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2\ 3 \\ 5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4 \\ +\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \hline \end{array}$$

可知每一位相加恰好都是

$1+2+3+4+5+6=21$

因此，这一加法结果是 21×111111.

∴　原式 $=21\times111111\div6$

$=111111\times21\div3\div2$

$=777777\div2$

$=388888.5.$

3．19941994.

原式 $=1994\times1993\times10001-1992\times1994\times10001$

$=1994\times10001\times(1993-1992)$

$=1994\times10001=19941994.$

4．$\frac{1}{5}$.

把 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ 看成一个整体，令 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$，

原式 $=(1+a)\times(a+\frac{1}{5})-(1+\frac{1}{5}+a)\times a$

$=(a+\frac{1}{5})+a(a+\frac{1}{5})-a-a(a+\frac{1}{5})$

$=a+\frac{1}{5}-a$

$=\frac{1}{5}$.

5. 1995.

由 $2-3-4+5=0$，$6-7-8+9=0$，$10-11-12+13=0$，$\cdots$，$1986-1987-1988+1989=0$，

$1990-1991-1992+1993=0$，

$\therefore$ 原式 $=1+1994=1995$.

6. 2.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (472634^2-472633\times472635)+(472635^2\\
&\quad -472634\times472636)\\
&=472634^2-472633\times(472634+1)+472635^2\\
&\quad -472634\times(472635+1)\\
&=472634^2-472633\times472634-472633+472635^2\\
&\quad -472634\times472635-472634\\
&=472634-472633+472635-472634\\
&=472635-472633\\
&=2.
\end{aligned}
$$

7. $\frac{50}{99}$.

根据乘法交换律，将原式的因式按和式、差式分为两组：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{99}\right)\right]\times\\
&\quad \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99}\right)\right]\\
&=\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{98}{99}\right)\\
&=50\times\frac{1}{99}\\
&=\frac{50}{99}.
\end{aligned}
$$

8. $\frac{1}{55}$.

注意到$\frac{2}{1\times(1+2)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2}$

$$\frac{3}{(1+2)\times(1+2+3)}=\frac{1}{1+2}-\frac{1}{1+2+3}$$

…

$$\frac{10}{(1+2+\cdots+9)\times(1+2+\cdots+10)}$$
$$=\frac{1}{1+2+\cdots+9}-\frac{1}{1+2+\cdots+10}$$

∴　原式$=1-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2}\right)-\left(\frac{1}{1+2}-\frac{1}{1+2+3}\right)-\cdots$

$$-\left(\frac{1}{1+2+\cdots+9}-\frac{1}{1+2+\cdots+10}\right)$$
$$=\frac{1}{1+2+\cdots+10}$$
$$=\frac{1}{55}.$$

9. $\frac{161699}{2910600}$.

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{2\times3\times4}\right]$$

$$\frac{1}{2\times3\times4\times5}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2\times3\times4}-\frac{1}{3\times4\times5}\right]$$

$$\frac{1}{3\times4\times5\times6}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3\times4\times5}-\frac{1}{4\times5\times6}\right]$$

…

$$\frac{1}{97\times98\times99\times100}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{97\times98\times99}-\frac{1}{98\times99\times100}\right]$$

诸式相加　原式$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{98\times99\times100}\right]$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{161699}{970200}$$

$$=\frac{161699}{2910600}.$$

10. 1.

分子 $=\frac{8}{1}\times\frac{9}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{11}{4}\times\frac{12}{5}\times\frac{13}{6}\times\frac{14}{7}\times\frac{15}{8}\times\frac{16}{9}$，

分母 $=\frac{10}{1}\times\frac{11}{2}\times\frac{12}{3}\times\frac{13}{4}\times\frac{14}{5}\times\frac{15}{6}\times\frac{16}{7}$.

$$原式=\frac{\frac{8}{1}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{13}{6}\cdot\frac{14}{7}\cdot\frac{15}{8}\cdot\frac{16}{9}}{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{12}{3}\cdot\frac{13}{4}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{15}{6}\cdot\frac{16}{7}}$$

$$=\frac{8\times9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}$$

$$\times\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}{10\times11\times12\times13\times14\times15\times16}$$

$$=\frac{8\times9}{8\times9}=1.$$

11. $\underbrace{33\cdots3}_{1995个3}$.

令 $\underbrace{11\cdots1}_{1995个1}=x$

$$原式=\underbrace{11\cdots1}_{1995个1}\ \underbrace{55\cdots5}_{1995个5}\div\underbrace{33\cdots3}_{1994个3}5$$

$$=(\underbrace{11\cdots1}_{1995个1}\ \underbrace{00\cdots0}_{1995个0}+\underbrace{55\cdots5}_{1995个5})\div\underbrace{33\cdots3}_{1994个3}5$$

$$=x(10^{1995}+5)\div(3x+2)$$

$$=x(\underbrace{99\cdots9}_{1995个9}+6)\div(3x+2)$$

$$=3x(3x+2)\div(3x+2)$$

$$=3x$$

$$=\underbrace{33\cdots3}_{1995个3}.$$

12. $24\frac{29}{46}$.

$$\text{原式}=1\times11+(\frac{19}{92}+\frac{19}{92}\times2+\frac{19}{92}\times3+\cdots+\frac{19}{92}\times11)$$
$$=11+\frac{19}{92}\times(1+2+3+\cdots+11)$$
$$=11+\frac{19}{92}\times66$$
$$=11+13\frac{29}{46}$$
$$=24\frac{29}{46}.$$

13. $\frac{3}{100}$.

$\square$中的数应等于

$$(10.08+6\frac{3}{10}\div25-0.126\times79)\div12\frac{3}{5}$$
$$=(10.08+0.252-9.954)\div12.6$$
$$=0.378\div12.6$$
$$=0.03$$
$$=\frac{3}{100}.$$

14. 395.

将上面的除式写成分数

$$\frac{12345678910111213}{31211101987654321}$$

因为将分母扩大，分数值变小；将分母减小，分数值变大. 所以

$$\frac{12345678910111213}{31220000000000000}<\frac{12345678910111213}{31211101987654321}$$
$$<\frac{12345678910111213}{31210000000000000}$$

题目要求小数点后的前三位数字，我们只需计算到小数点后第四位就可以了.

左面分数值$>1234.5678\div3122>0.3954$

右面分数值$<1234.5679\div3121<0.3956$

所求分数值在 0.3954 与 0.3956 之间. $\therefore$ 小数点后前三位数字是 395.

15. 517.

$385=5\times7\times11$

用乘法对加法的分配律可得

$$
\begin{aligned}
原式&=77+55+35+192\frac{1}{2}+128\frac{1}{3}+29\frac{8}{13}\\
&=516+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{8}{13}\\
&=517\frac{35}{78}
\end{aligned}
$$

$\because\ \frac{35}{78}<1$ $\therefore$ 所求结果的整数部分是 517.

16. 1000.

$D=1+3+5+7+\cdots+1999$

$N=2+4+6+8+\cdots+1998$

$$
\begin{aligned}
D-N&=1+(3-2)+(5-4)+(7-6)+(9-8)+\\
&\quad\cdots+(1999-1998)\\
&=1+999\\
&=1000.
\end{aligned}
$$

17. 2.

这 30 个数的个位共有 30 个 1，其和为 30. 因此，这 30 个数之和个位数字是 0，并向十位进 3，而十位共有 29 个 1，和为 29. 再加上由个位进上来的 3 总计为 32，所以和的十位数字是 2.

18. 22100.

$2^2+4^2+6^2+8^2+\cdots+50^2$

$=2^2\times1^2+2^2\times2^2+2^2\times3^2+\cdots+2^2\times25^2$

$=4\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+25^2)$

$=4\times5525=22100.$

19. $\frac{1}{2}$.

$0.\dot{6}\bigcirc\frac{17}{26}=\frac{2}{3}\bigcirc\frac{17}{26}=\frac{2}{3}$

$0.625\bigstar\frac{23}{33}=\frac{5}{8}\bigstar\frac{23}{33}=\frac{5}{8}$

$0.\dot{3}\bigstar\frac{34}{99}=\frac{1}{3}\bigstar\frac{34}{99}=\frac{1}{3}$

$\frac{237}{106}\bigcirc2.25=\frac{237}{106}\bigcirc\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$

原式$=\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\right)\div\left(\frac{1}{3}+\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

20.　0.105.

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}>\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\cdots+\frac{1}{1000\times1001}$$

$$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}\right)$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}>\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}$$

$$=0.1-0.001=0.099$$

又　$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}<\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}+\cdots+\frac{1}{999\times1000}$$

$$=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}<0.112-0.001=0.111$$

$\because\quad \frac{1}{2}\times(0.099+0.111)=0.105$

$\therefore\quad \frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}\approx 0.105$

（误差小于$\frac{1}{2}\times(0.111-0.099)=0.006$）

21．所需数字为 18172790 个．所求数码和：

$1377421\times 2754843\approx 3794579$ 百万．

9 个 1 位数的号码需 9 个数字，90 个 2 位数号码需 180 个数字；900 个 3 位数的号码需 2700 个数字；9000 个 4 位数号码需 36000 个数字，90000 个 5 位数号码需 450000 个数字，900000 个 6 位数号码需 5400000 个数字；1754843 个 7 位数号码需 12283901 个数字．

总计需：18172790 个数字．

所求号码和：

$$\left.\begin{array}{l}1+2754842=2754843\\2+2754841=2754843\\3+2754840=2754843\\4+2754839=2754843\\\cdots\\1377421+1377422=2754843\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{共}\dfrac{2754842}{2}=1377421\text{ 个}\\2754843\end{array}$$

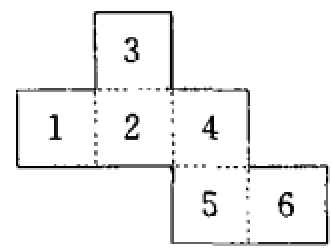
所以总和为：

2754843×1377421

≈ 3794579 百万．

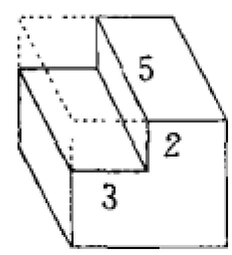
第14讲　关于空间想象力的综合训练题

1. 将右图中的硬纸片沿虚线折起来，便可以作成一个正方体.问这个正方体的2号面的对面是几号面？

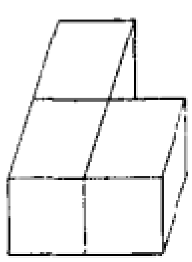


2. 有一个长方体，它的正面和上面的面积之和是209，如果它的长、宽、高都是质数，求这个长方体的体积.

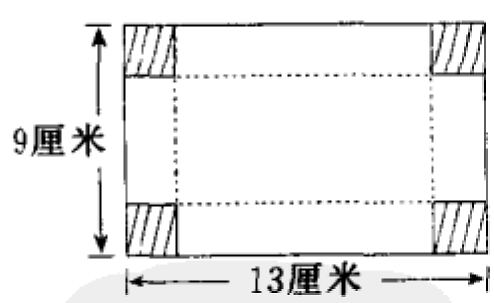
3. 有一个正方体，边长是5.如果它的左上方截去一个边长分别是5、3、2的长方体（如右图），求它的表面积减少的百分比是多少？



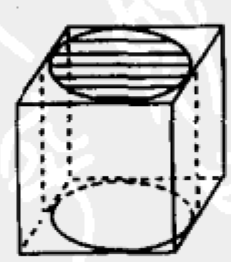
4. 有三个大小一样的正方体，将接触的面用胶粘接在一起成左图的形状，表面积比原来减少了16平方厘米.求所成形体的体积.



5. 如右图，从长为13厘米，宽为9厘米的长方形硬纸板的四角去掉边长为2厘米的正方形，然后沿虚线折叠成长方体容器.这个容器的体积是多少立方厘米？

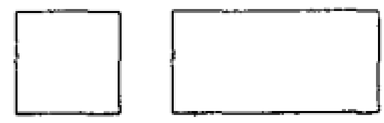


6. 一个正方体形的纸盒中恰好能放入一个体积为628立方厘米的圆柱体（右图）.问纸盒的容积有多大？（圆周率取为3.14）.

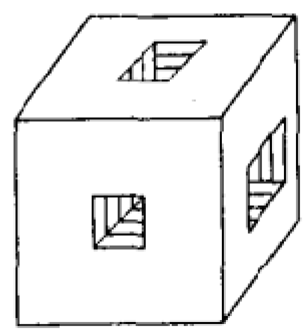


7. 一个高为 30 厘米，底面为边长是 10 厘米的正方形的长方体水桶，其中装有 $\frac{1}{2}$ 容积的水. 现在向桶中投入边长为2 厘米×2 厘米×3 厘米的长方体石块，问需要投入多少块这种石块才能使水面恰与桶高相齐？

8. 有两种不同形状的纸板，一种是正方形的，另一种是长方形的，正方形纸板的总数与长方形纸板的总数之比是 1∶2. 用这些纸板做成一些竖式和横式的无盖纸盒. 正好将纸板用完. 问在所做的纸盒中，竖式纸盒的总数与横式纸盒的总数之比是多少？



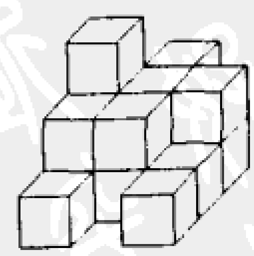
9. 如右图，在棱长为 3 的正方体中由上到下，由左到右，由前到后，有三个底面积是 1 的正方形高为 3 的长方体的洞，求所得形体的表面积是多少？



10. 将边长为 10 的正方体木块六个面都染上红色后，锯成边长为 1 的小正方形木块 1000 块. 问：这一千块小正方体木块中，没有涂红色的共有多少块？只有一个面是红色的共有多少块？恰有两个面为红色的共有多少块？恰有三个面为红色的共有多少块？

11. 用三个大小一样的正方体积木和一把有刻度的直尺. 请你设计一种方法，不通过任何计算，直接量出每个正方体的体对角线的长.

12. 如右图，把 16 个边长为 2 厘米的正方体重叠起来拼成一个立体图形，求这个立体图形的表面积.

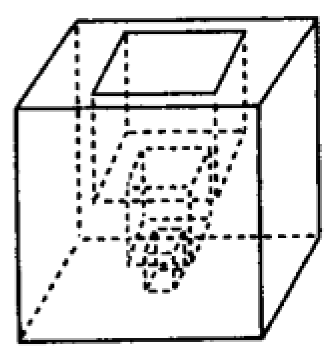


13. 2100 个边长为 1 米的正方体堆成一个实心的长方体. 它的高是 10 米，长、宽都是大于 10(米)

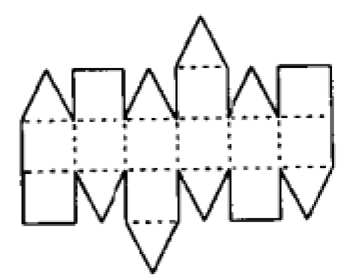
的整数，问长方体长宽之和是几米？

14. 一个正方体形状的木块，棱长为 1 米，沿水平方向将它锯成 3 片，每片又锯成 4 长条，每条又锯成 5 小块，共得大大小小的长方体 60 块. 求这 60 块长方体表面积的和是多少平方米？

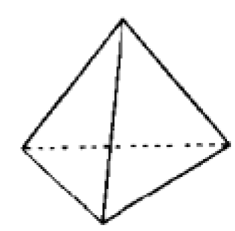
15. 如右图，是一个边长为 2 厘米的正方体. 在正方体的上面的正中间向下挖一个边长为 1 厘米的正方体小洞. 接着在小洞的底面正中再向下挖一个边长为 $\frac{1}{2}$ 厘米的小洞；第三个小洞的挖法与前两个相同，边长为 $\frac{1}{4}$ 厘米. 求最后得到的立体图形表面积是多少平方厘米？



16. 如右图，一块硬纸片可以做成一个多面体的纸模型(沿虚线折，沿实线粘). 这个多面体的面数，顶点数与棱数之和是多少？

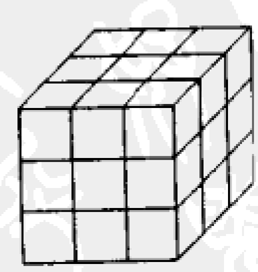


17. 如右图是一个四面体，有六条棱，四个表面三角形，已知六条棱长恰是六个连续的自然数.



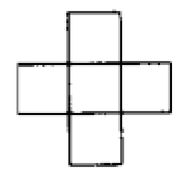
如果某个表面三角形的周长是 3 的倍数，就将这个三角形染红色；反之，周长不是 3 的倍数的三角形就染黄色. 问：四个表面三角形是否能全染成黄色？简述理由.

18. 把正方体的六个表面都分成 9 个相等的正方形. 现用红、黄、蓝三种颜色去染这些小正方形，要求有公共边的正方形染的颜色不同，问：用红色染成的正方形个数最多有几个？



19. 有 6 个棱长分别是 3 厘米，4 厘米，5 厘米的相同的长方体，把它们的某些面染上红色，使得一个长方体只有一个面是红色的，一个长方体恰有两个面是红色的，一个长方体恰有三个面是红色的，一个长方体恰有四个面是红色的，一个长方体恰有 5 个面是红色的，还有一个长方体六个面都是红色. 染色后把所有长方体分割成棱长为 1 厘米的小立方体，分割完毕后，恰有一面是红色的小立方体最多有几个？

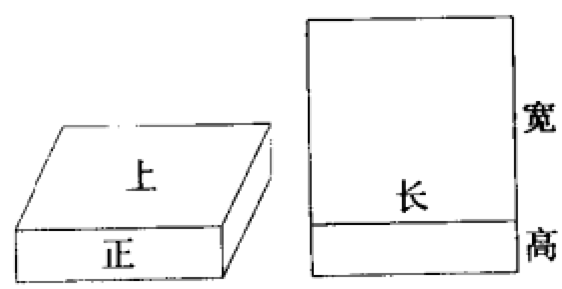
20. 给出一个立方体和六张同样大小的用五个相等小正方形组成的“十字形”彩纸，每个十字形彩纸的面积恰等于立方体一个侧面的面积. 试设计一种方法，不剪开这六张彩纸，就可以把他们贴满立方体的六个侧面.



关于空间想象力的综合训练题参考解答

1. 想象一个正方体，固定一个面为 2 号面，依次可排出 2 号面对面是 6 号面.

2. 如右图可以看出，长方体的正面及上面之和恰等于：



长 ×（宽 + 高）$= 209 = 11 \times 19$

有两种可能：①长 $= 11$，宽 + 高 $= 19$.

②长 $= 19$，宽 + 高 $= 11$.

宽和高必是一个奇质数与一个偶质数 2.

只有 $19 = 17 + 2$ 合乎要求，$11 = 9 + 2$ 不符合要求.

所以长 $= 11$，

长方体体积是 $11 \times 17 \times 2 = 374$.

3. 原立方体的表面积 $=5\times5\times6=150$. 减少的表面积是两块 3×2 长方形的面积，即减少了 $3\times2\times2=12$，所以减少的百分比是 $\frac{12}{150}=8\%$.

4. 三个小正方体拼接成图中的样子（见 307 页原题图），减少了小正方体的 4 个侧面正方形的面积，表面积减少了 16 平方厘米，每个正方形侧面为 $16\div4=4$ 平方厘米，每个正方体棱长为 2 厘米，三个小正方体体积（即所成形体的体积）是 $3\times2^3=24$ 立方厘米.

5. 容器的底面积是

$(13-4)\times(9-4)=45$ 平方厘米，高为 2 厘米，容器体积是 $45\times2=90$ 立方厘米.

6. 纸盒的容积与圆柱体积之比 $=\frac{8}{6.28}$. 所以纸盒的容积为 800 立方厘米.

7. 所装入石块的体积应等于桶的容积的一半. 投入石块：

$(10\times10\times15)\div(2\times2\times3)=125$（块）.

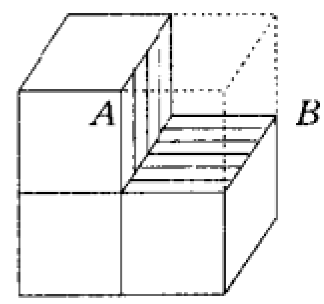
8. 由于纸盒无盖，所以一个竖式纸盒有一个正方形和 4 个长方形，一个横式纸盒有 2 个正方形和 3 个长方形，那么一个竖式纸盒和两个横式纸盒共有 5 个正方形和 10 个长方形，这时所用的正方形纸板与长方形纸板的比恰是 1:2，也就是说按照每做一个竖式纸盒，再做两个横式纸盒的比例做纸盒，就可以把两种不同形状的纸板用完. 因此，在所做的纸盒中，竖式纸盒的总数与横式纸盒的总数之比是 1:2.

9. 没打洞之前正方体表面积共 $6\times3\times3=54$，打洞后，表面积减少 6 又增加 6×4（洞的表面积）. 即所得形

体的表面积是 $54-6+24=72$.

10．没涂色的小正方块共有 $8\times8\times8=512$ 块，只有一面涂色的共有 $8\times8\times6=384$ 块，恰有两个面为红色的共有 $8\times12=96$ 块，恰有三个面为红色的，共有 8 块.

11．将三个大小一样的立方体积木如右图堆放，则量得 A、B 两点距离就是体对角线的长.



12．从前、后、左、右、上、下六个方向分别看这堆积木形成的形体表面.

从前看有 7 个边长为 2 厘米的小正方形；
从后看有 7 个边长为 2 厘米的小正方形；
从左看有 9 个边长为 2 厘米的小正方形；
从右看有 9 个边长为 2 厘米的小正方形；
从上看有 9 个边长为 2 厘米的小正方形；
从下看有 9 个边长为 2 厘米的小正方形；
因此，这堆积木的表面积是：
$2^2\times(7+7+9+9+9+9)=200$（平方厘米）.

13．长方体体积是 2100 立方米，高为 10 米，所以底面积为 210 平方米.

$210=1\times210=2\times105=3\times70=5\times42=6\times35=7\times30=10\times21=14\times15$. 可见，长为 15 米，宽为 14 米，长宽之和是 $15+14=29$ 米.

14．先前的正方体有 6 个面，每个面的面积是 1 平方米，共 6 平方米. 无论后来锯成多少块，这 6 个面的 6 平方米总是后来的小木块的表面积的一部分.

再考虑到每锯一刀就会得到两个一平方米的表面，现在一共锯了 $2+3+4=9$ 刀，一共得到 18 平方米的表

面，因此总的表面积为：

$6+(2+3+4)\times2=24$（平方米）.

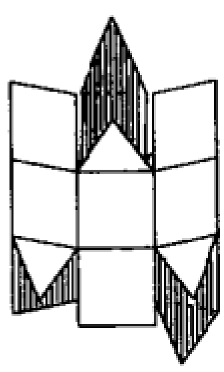
15. 正方体在挖小洞之前的表面积为 6×2^2，挖了小洞之后面积不但没有减少，反还要加上三个小洞的侧面积的和. 三个小洞各有四个侧面，每个侧面的面积分别是：

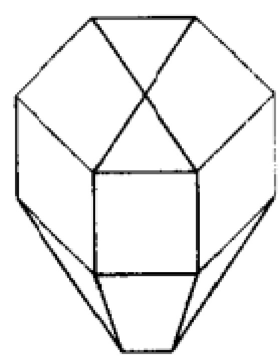
1^2，$(\frac{1}{2})^2$，$(\frac{1}{4})^2$，

因此总的表面积为：

$6\times2^2+4\times1^2+4\times(\frac{1}{2})^2+4\times(\frac{1}{4})^2=29\frac{1}{4}$（平方厘米）.

16. 首先把这个多面体想清楚，把剪下的硬纸板片左、右相粘后，形成下左图的样子，然后把上下两边的正方形和三角形分别粘好，应成为下右图的样子.





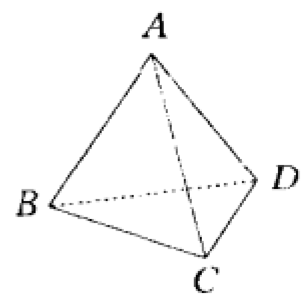
把多面体想清楚以后，就可以数面数、顶点数和棱数了.

硬纸片的每个正方形或三角形都是多面体的一个面，因此一共有 20 个面：12 个正方形和 8 个三角形；每个正方形有四条边，每个三角形三条边，共有 $12\times4+8\times3=72$ 条边，每两条边重合为多面体的一条棱，所以多面体共有 $72\div2=36$ 条棱.

每个正方形有四个顶点，每个三角形有三个顶点，共有 72 个顶点. 从上右图可以看出，每四个顶点重在一

起成为多面体的一个顶点，所以多面体共有 $72\div4=18$ 个顶点．因此面数 + 棱数 + 顶点数 $=20+36+18=74$．

17．不能将四个表面全染成黄色！理由如下：六个连续自然数被 3 除的余数必有两个 0，两个 1，两个 2，当且仅当一个面三角形三边分别被 3 除余 0、1、2 时，这个面三角形周长被 3 整除，此面三角形染红色．我们设



六个连续自然数被 3 除的余数分别为两个 a，两个 b，两个 c．任取面 $\triangle ABC$，如是黄色，必有两棱（不妨设 AB、AC）被 3 除余数同为 a；设 AD 被 3 除余数为 $b(\neq a)$．这时 BD、CD 中总有一个是被 3 除余 c 的，即 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中总有一个要染红色，因此，四面体的四个表面三角形不可能全染成黄色．

18．很明显，一个面上最多有 5 个方格可以染成红色，如图 (a)所示．当一个面染成 5 个红色方格以后，与这个面有公共边的四个面，就不能再有同样的染法，但这个面的对面仍可染成 5 个红色方格，因此，至多有两个面可以染成 5 个红色的方格，其余四个面，每一个面的四个拐角处的方格不能染红，一个面至多如图 (b)染上四个红格，但有公共边的两个面，不能都染成 (b)，只能有一组对面染成 (b)，另一组对面染成 (c)．采用以上步骤染成红色方格共有：

红		红
	红	
红		红

(a)

$5\times2+4\times2+2\times2=22$ 个．这是最多的红色方格数．

19．仅一面红色的长方体最多可形成 $5\times4=20$ 个一面红色的小正方体；

	红	
红		红
	红	

(b)

	红	
	红	

(c)

恰有两面红色的长方体最多可形成 $20 \times 2 = 40$ 个一面红色的小正方体；

恰有三面红色的长方体最多可形成 $4 + 16 \times 2 = 36$ 个一面红色的小正方体；

恰有四面红色的长方体最多可形成：$12 \times 2 + 4 \times 2 = 32$ 个一面红色的小正方体；

恰有五面红色的长方体最多可形成：

$3 + 9 \times 2 + 3 \times 2 = 27$ 个一面红色的小正方体；

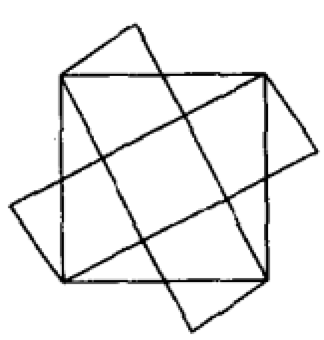
六面红色的长方体恰形成：

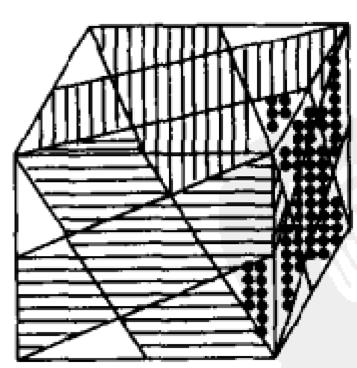
$(6 + 2 + 3) \times 2 = 22$ 个一面红色的小正方体；

分割后，所得一面红色的小正方体最多有：

$20 + 40 + 36 + 32 + 27 + 22 = 177$ 个．

20．试想在侧面上如下左图放置十字形，超出的部分折贴在相邻的侧面上．这样，就可以如下右图那样把六张十字形贴满在立方体表面上．





［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝仁华学校奥林匹克数学课本·小学六年级
作者＝刘彭芝主编　　人大附中编
页数＝３０５
ＳＳ号＝１１１８３４９２
出版日期＝２００４年０１月第１版
出版社＝中国大百科全书出版社
尺寸＝２１ｃｍ
原书定价＝１０．００
主题词＝数学课－小学－教学参考资料
参考文献格式＝刘彭芝主编．仁华学校奥林匹克数学课本：最新版．小学六年级．北京市：中国大百科全书出版社，２００４．０１．
内容提要＝本书是奥林匹克系列丛书之一，非常适合相应年级的学生使用。受到各年级学生的好评。

封面
书名
版权
前言

目录