仁华学校奥林匹克数学系列丛书

人大附中 编

仁华学校奥林匹克数学

RENHUAXUEXIAOAOLINPIKESHUXUE

小学五年级

课本

中国大百科全书出版社

人大附中远程教育网网址：
http://www.rdfz.com

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

- 仁华学校奥林匹克数学课本（12册）
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练导引·小学部（2册）
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练教程（4册）
- 仁华学校奥林匹克数学竞赛试题与详解·小学部（6册）
- 仁华学校奥林匹克数学测试卷（4册）

仁华学校奥林匹克物理系列丛书

- 仁华学校奥林匹克物理课本（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理试题解析（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理实验（2册）

仁华学校奥林匹克英语系列丛书

- 仁华学校奥林匹克图解英语（4册）

ISBN 7-5000-6981-2
9 787500 069812 >

ISBN7-5000-6981-2/G·663
定价：10.00元

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

仁华学校（原华罗庚学校）
奥林匹克数学课本

小学五年级

（最新版）

人大附中编
主编：刘彭芝

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚　　社长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

仁华学校奥林匹克数学课本·小学五年级/刘彭芝主编.－北京:中国大百科全书出版社,2003.12
(仁华学校奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7－5000－6981－2

Ⅰ.仁…　Ⅱ.刘…
Ⅲ.数学课－小学－教学参考资料　Ⅳ.G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 118205 号

仁华学校奥林匹克数学课本(小学五年级·最新版)

主　　编:刘彭芝
责任编辑:简菊玲
封面设计:何　茜
责任印制:徐继康

出版发行:中国大百科全书出版社
(北京阜成门北大街 17 号　100037　68315606)
http://www.ecph.com.cn
排　　版:北京中文天地文化艺术有限公司
印　　刷:北京华正印刷厂
经　　销:新华书店总店北京发行所

版　　次:2004 年 1 月第 1 版
印　　次:2004 年 1 月第 1 次印刷
印　　张:9.625
开　　本:880×1230　1/32
字　　数:207 千字
印　　数:1－20000
ISBN 7－5000－6981－2/G·663
定　　价:10.00 元

顾　问	王　元	裘宗沪	
	冯克勤	陈德泉	
主　编	刘彭芝		
副主编	童　欣	杨骅飞	
编　委	童　欣	莫颂清	杨骅飞
	胡先蕙	邓健新	郭丽军
	彭建平	刘红燕	陶晓勇
	梁丽平		
编　撰	梁丽平	刘景华	杨骅飞
	顾秀文	张佐超	周沛耕
	李志红	薄云程	郭丽军
	李　玫	袁素芬	胡先蕙
	陶晓勇	田利英	

序

这套丛书是北京仁华学校的教学用书。

北京仁华学校是人大附中的超常教育实验基地。其前身为北京市华罗庚学校，2003年12月改用新名（为叙述方便起见，下文涉及“北京市华罗庚学校”或“华校”的一律改用新名）。仁华学校的办学目的是探索科学实用、简单易行的鉴别与选拔超常儿童的方法，探索具有中国特色的超常教育模式，为国家大面积早期发现与培养现代杰出人才开辟一条切实可行的途径。在这里，数百位优秀教师精心执教，一批批超常儿童茁壮成长。仁华学校全体师生决心在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族的伟大复兴甘当马前卒。

超常教育与早期教育为当今世界各国所重视。近年来，我国的众多有识之士投身超常教育事业，也取得了可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步，但同时也是一个复杂而全新的教育课题。无论在历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长的环境不佳，特别是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育。因而，必须更新教育观念和教学模式，这样才能把大批聪慧儿童培养成为知识经济时代的栋梁之材。我们认为，超常儿童是具有良好的智力和非智力个性特征的统一体，是遗传与环境共同作用下的产物。基于此种看法，北京仁华学校的超常

教育，以尊重个性和挖掘潜力为基本原则，强调选拔与培养相结合，不缩短学制而注重学生综合素质的全面提高。

仁华学校分为小学部、初中部和高中部。小学部属校外培训性质，招收小学三至六年级的学生，招生时间定在每年9月或10月，入学后每周学习一次。初中部和高中部属常规中等教育，纳入人大附中建制，每个年级设4－6个实验班。仁华学校初中部和高中部的生源分别主要来自小学部和初中部，同时面向全市招生。

仁华学校在办学过程中，逐渐形成了自己独特的课程体系。在必修课中，我们把数学作为带头学科，并以此促进物理、化学、生物、外语、计算机等其他学科的发展。这是因为，数学作为研究现实世界中数和形的一门基础科学，不仅对人类社会的进步和国家的建设发挥着关键的作用，而且对训练人们的思维能力具有重要的价值。此外，仁华学校还开设有现代少年、科学实践、社会实践、心理导向、创造发明和生物环保等特色课，以及汽车模拟驾驶、网页设计、天文观测、电子技术、几何画板、艺术体操、篆刻和摄影等选修课。华校全新的课程设置，近而言之，是希望学生能够增强学习兴趣，开阔知识视野；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下坚实而全面的科学文化基础。

仁华学校在办学过程中，还逐渐形成了一支思想新、业务精、肯吃苦、敢拼搏的教师队伍。这其中既有多年工作在教学第一线的中小学高级和特级教师，又有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，还有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们着眼于祖国的未来，甘做人梯，为超常教育事业辛勤耕耘，是仁华学校藉以成长、引以自豪的中流砥柱。

实践证明，仁华学校对超常儿童的培养方略是可取的。十余年来，仁华学校为高等学校输送了大量全面发展、学有特长并具备创新精神和高尚品德的优异人才。已毕业的16届实验班学生全部考取重点大学，其中进入北京大学和清华大学的人数约占总数的68%，保送生约占25%。不仅如此，还有近3000人次学生在区、市、国家乃至世界级的学科竞赛中获奖夺魁，数量位居北京市重点中学之首。仁华学校的学生在全国雷达表青少年科学英才竞赛中获一、二、三等奖各一次，在全俄罗斯数学竞赛中获两枚金牌、一枚银牌，在国际物理邀请赛中获一枚银牌，在国际信息学奥林匹克竞赛（IOI）中获一枚铜牌，在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获满分金牌2枚和银牌1枚。近200人在各种发明比赛中获奖，其中几十人获全国及世界创造发明比赛的金奖、银奖，并取得五项国家专利。还有33人次在全国科学论文评比中获一、二、三等奖。此外，实验班的同学在艺术体育等方面也成绩斐然。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实践，使得一批又一批英才脱颖而出，这足以显示仁华学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

仁华学校超常教育的实践和成果已引起全国和国际教育界的关注。华校现在是中国人才研究会超常人才专业委员会副理事长单位，其超常教育研究课题曾荣获北京市“八五”普教科研优秀成果二等奖。仁华学校先后有数十位师生参加了国际超常儿童教育学术会议，在各种国际会议上宣读论文三十余篇，并同五十多个国家和地区从事超常教育的学校及研究机构建立了友好往来或合作研究关系。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验基础之上的。我们组织编写的这套“北京市

华罗庚学校奥林匹克系列丛书”的作者大部分都是原华校的骨干教师，开创了荟萃专家编书的格局。另外还有数位曾经在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获得金牌和银牌的大学生和研究生参加撰写。这支由学生组成的特别劲旅将他们学习的真切感受和新鲜经验表达出来，使得本丛书独具一格。综合而言，展现在读者面前的这套丛书集实用、新颖、通俗、严谨等特点于一身，我们将其奉献给中小学教师、学生及家长，希望能博得广大读者的喜爱。此套丛书涉及数学、英语、物理和计算机等学科，目前已经出版和即将出版的有四十余册。

俗云：“一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。”仁华学校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。“合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。”遥望未来，让我们同呼志士之言：为中国在21世纪成为科技强国而献身。

作为本系列丛书的主编，借这套丛书再次出版的机会，我再次以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意，恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

写于2001年1月

修改于2003年12月

目　录

上　册

目　录

下　册

上册

第1讲 数的整除问题

数的整除问题，内容丰富，思维技巧性强．它是小学数学中的重要课题，也是小学数学竞赛命题的内容之一．

一、基本概念和知识

1．整除——约数和倍数

例如：$15\div3=5$，$63\div7=9$

一般地，如 a、b、c 为整数，$b\neq0$，且 $a\div b=c$，即整数 a 除以整除 b（b 不等于 0），除得的商 c 正好是整数而没有余数（或者说余数是 0），我们就说，a 能被 b 整除（或者说 b 能整除 a）．记作 $b|a$．否则，称为 a 不能被 b 整除，（或 b 不能整除 a），记作 $b\nmid a$．

如果整数 a 能被整数 b 整除，a 就叫做 b 的倍数，b 就叫做 a 的约数．

例如：在上面算式中，15 是 3 的倍数，3 是 15 的约数；63 是 7 的倍数，7 是 63 的约数．

2．数的整除性质

性质 1：如果 a、b 都能被 c 整除，那么它们的和与差也能被 c 整除．

即：如果 $c|a$，$c|b$，那么 $c|(a\pm b)$．

例如：如果 $2|10$，$2|6$，那么 $2|(10+6)$，

并且 $2|(10-6)$.

性质2：如果 b 与 c 的积能整除 a，那么 b 与 c 都能整除 a．即：如果 $bc|a$，那么 $b|a$，$c|a$.

性质3：如果 b、c 都能整除 a，且 b 和 c 互质，那么 b 与 c 的积能整除 a.

即：如果 $b|a$，$c|a$，且 $(b, c)=1$，那么 $bc|a$.

例如：如果 $2|28$，$7|28$，且 $(2, 7)=1$，

那么 $(2\times7)|28$.

性质4：如果 c 能整除 b，b 能整除 a，那么 c 能整除 a.

即：如果 $c|b$，$b|a$，那么 $c|a$.

例如：如果 $3|9$，$9|27$，那么 $3|27$.

3．数的整除特征

① 能被2整除的数的特征：个位数字是0、2、4、6、8的整数．“特征”包含两方面的意义：一方面，个位数字是偶数（包括0）的整数，必能被2整除；另一方面，能被2整除的数，其个位数字只能是偶数（包括0）．下面“特征”含义相似．

② 能被5整除的数的特征：个位是0或5.

③ 能被3（或9）整除的数的特征：各个数位数字之和能被3（或9）整除．

④ 能被4（或25）整除的数的特征：末两位数能被4（或25）整除．

例如：$1864=1800+64$，因为100是4与25的倍数，所以1800是4与25的倍数．又因为 $4|64$，所以1864能被4整除．但因为 $25\nmid64$，所以1864不能被25整除．

⑤ 能被 8（或 125）整除的数的特征：末三位数能被 8（或 125）整除.

例如：$29375=29000+375$，因为 1000 是 8 与 125 的倍数，所以 29000 是 8 与 125 的倍数. 又因为 $125\mid 375$，所以 29375 能被 125 整除. 但因为 $8\nmid 375$，所以 $8\nmid 29375$.

⑥ 能被 11 整除的数的特征：这个整数的奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差（大减小）是 11 的倍数.

例如：判断 123456789 这九位数能否被 11 整除？

解：这个数奇数位上的数字之和是 $9+7+5+3+1=25$，偶数位上的数字之和是 $8+6+4+2=20$. 因为 $25-20=5$，又因为 $11\nmid 5$，所以 $11\nmid 123456789$.

再例如：判断 13574 是否是 11 的倍数？

解：这个数的奇数位上数字之和与偶数位上数字和的差是：$(4+5+1)-(7+3)=0$. 因为 0 是任何整数的倍数，所以 $11\mid 0$. 因此 13574 是 11 的倍数.

⑦ 能被 7（11 或 13）整除的数的特征：一个整数的末三位数与末三位以前的数字所组成的数之差（以大减小）能被 7（11 或 13）整除.

例如：判断 1059282 是否是 7 的倍数？

解：把 1059282 分为 1059 和 282 两个数. 因为 $1059-282=777$，又 $7\mid 777$，所以 $7\mid 1059282$. 因此 1059282 是 7 的倍数.

再例如：判断 3546725 能否被 13 整除？

解：把 3546725 分为 3546 和 725 两个数. 因为 $3546-725=2821$. 再把 2821 分为 2 和 821 两个数，因为

$821-2=819$，又 $13|819$，所以 $13|2821$，进而 $13|3546725$.

二、例　题

【例 1】　已知 $45|\overline{x1993y}$. 求所有满足条件的六位数 $\overline{x1993y}$.

解：∵　$45=5\times9$，

∴　根据整除“性质 2”可知

$5|\overline{x1993y}$，$9|\overline{x1993y}$.

∴　y 可取 0 或 5.

当　$y=0$ 时，根据 $9|\overline{x1993y}$ 及数的整除特征③可知 $x=5$，

当　$y=5$ 时，根据 $9|\overline{x1993y}$ 及数的整除特征③可知 $x=9$.

∴　满足条件的六位数是 519930 或 919935.

【例 2】　李老师为学校一共买了 28 支价格相同的钢笔，共付人民币 9$\square$.2$\square$元. 已知$\square$处数字相同，请问每支钢笔多少元？

解：∵　9$\square$.2$\square$元 = 9$\square$2$\square$分

$28=4\times7$，

∴　根据整除“性质 2”可知

4 和 7 均能整除 9$\square$2$\square$.

$4|2\square$，可知$\square$处只能填 0 或 4 或 8.

因为　$7\nmid 9020$，$7\nmid 9424$，所以$\square$处不能填 0 和 4；

因为　$7|9828$，所以$\square$处应该填 8.

又∵　9828 分 = 98.28 元

$98.28\div28=3.51$（元）

答：每支钢笔 3.51 元.

【例 3】 已知整数$\overline{1a2a3a4a5a}$能被 11 整除. 求所有满足这个条件的整数.

解：∵　$11|\overline{1a2a3a4a5a}$，

∴　根据能被 11 整除的数的特征可知：

$1+2+3+4+5$ 的和与 $5a$ 之差应是 11 的倍数，

即 $11|(15-5a)$. 或 $11|(5a-15)$.

但是　$15-5a=5(3-a)$，$5a-15=5(a-3)$，又 $(5, 11)=1$，因此 $11|(3-a)$或 $11|(a-3)$.

又∵　a 是数位上的数字.

∴　a 只能取 0～9.

所以只有 $a=3$ 才能满足 $11|(3-a)$或 $11|(a-3)$，即当 $a=3$ 时，$11|15-5a$.

∴　符合题意的整数只有 1323334353.

试一试：如果将例 3 中的整数改为$\overline{1a_1 2a_2 3a_3 4a_4 5a_5}$（其中 a_1，a_2，…，a_5 互不相同），且它能被 11 整除，你能找到一个符合条件的整数吗？

【例 4】 把三位数$\overline{3ab}$接连重复地写下去，共写 1993 个$\overline{3ab}$，所得的数$\underbrace{\overline{3ab3ab\cdots3ab}}_{1993个3ab}$恰是 91 的倍数. 试求$\overline{ab}=$？

解：∵　$91=7\times13$，且 $(7, 13)=1$.

∴　$7|\underbrace{\overline{3ab3ab\cdots3ab}}_{1993个3ab}$，　$13|\underbrace{\overline{3ab3ab\cdots3ab}}_{1993个3ab}$.

根据一个数能被 7 或 13 整除的特征可知：

原数　$\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1993组}$能被 7 以及 13 整除

当且仅当　$\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1992组}-\overline{3ab}$能被 7 以及 13 整除，

也就是 $\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}\overline{000}$能被 7 以及 13 整除.

因为(7,10)=1,(13,10)=1,所以 $7|\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}000$,

$13|\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}000$也就是 $7|\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}$，$13|\underbrace{\overline{3ab\cdots3ab}}_{1991组}$，因此，用一次性质（特征），就去掉了两组$\overline{3ab}$；反复使用性质 996 次，最后转化成：原数能被 7 以及 13 整除，当且仅当$\overline{3ab}$能被 7 以及 13 整除

又∵ 91 的倍数中小于 1000 的只有 $91\times4=364$ 的百位数字是 3，∴ $\overline{3ab}=364$

∴ $\overline{ab}=64$.

【例 5】 在 865 后面补上三个数字，组成一个六位数，使它能分别被 3、4、5 整除，且使这个数值尽可能的小.

分析 设补上数字后的六位数是$\overline{865abc}$. 因为这个六位数能分别被 3、4、5 整除，所以它应满足以下三个条件：

第一，数字和（$8+6+5+a+b+c$）是 3 的倍数.

第二，末两位数字组成的两位数$\overline{bc}$是 4 的倍数.

第三，末位数字 c 是 0 或 5.

解：设要求的六位数为$\overline{865abc}$. 根据题意可知：

$4|\overline{bc}$，且 c 只能取 0 或 5.

又∵ 能被 4 整除的数的个位数不可能是 5.

∴ c 只能取 0. 因而 b 只能取自 0，2，4，6，8 中之一.

又∵ $3|\overline{865ab0}$，且（$8+6+5$）除以 3 余 1，

∴ $a+b$ 除以 3 余 2.

为满足题意“数值尽可能小”，只需取 $a=0$，$b=2$.

∴　要求的六位数是 865020.

【例 6】　求能被 26 整除的六位数 $\overline{x1991y}$.

分析　∵　$26=2\times13$,

∴　$\overline{x1991y}$ 能分别被 2 和 13 整除.

∴　解此题可以从 $2|\overline{x1991y}$ 入手考虑.

解：∵　$2|\overline{x1991y}$

∴　y 可能取 0、2、4、5、6、8.

又∵　$13|\overline{x1991y}$.

∴　13 能整除 $\overline{x19}$ 与 $\overline{91y}$ 的差.

当　$y=0$ 时,

由于 $13|910$，而 13 又要整除 $\overline{x19}$ 与 910 之差,

∴　$13|\overline{x19}$.

又∵　$\overline{x19}=100x+19=(7\times13+9)x+19$

$=7\times13x+9x+13+6$

∴　根据整除“性质 1”，有 $13|9x+6$,

经试验可知只有当 $x=8$ 时，$13|9x+6$,

∴　当 $y=0$ 时，符合题意的六位数是 819910.

当 $y=2$ 时，因为 $13|\overline{x19912}$，所以 13 整除 $\overline{x19}$ 与 $(910+2)$ 之差，也即 13 整除 $\overline{x19}$ 与 2 之差；与前相仿，$\overline{x19}=7\times13x+13+9x+6$，所以 13 整除 $9x+6-2$,

即　$13|9x+4$.

经试验可知只有当 $x=1$ 时，$13|9x+4$.

∴　当 $y=2$ 时，符合题意的六位数是 119912.

同理，当 $y=4$ 时，$13|9x+6-4$,

即　$13|9x+2$,

经试验可知当 $x=7$ 时，$13|9x+2$.

∴　当 $y=4$ 时，符合题意的六位数是 719914.

同理，当 $y=6$ 时，$13|9x+6-6$.

即 $13|9x$.

经试验可知 x 无解（因为 x 是 $\overline{x1991y}$ 的最高位数码，$x\neq0$）.

∴ 当 $y=6$ 时，找不到符合题意的六位数.

同理，当 $y=8$ 时，$13|9x+6-8$，

即 $13|9x-2$.

经试验只有当 $x=6$ 时，$13|9x-2$.

∴ 当 $y=8$ 时，符合题意的六位数是 619918.

答：满足本题条件的六位数共有 819910、119912、719914 和 619918 四个.

习 题 一

1. 已知 $72|\overline{x931y}$，求满足条件的五位数.

2. 已知五位数 $\overline{154xy}$ 能被 8 和 9 整除，求 $x+y$ 的值.

3. 若五位数 $\overline{32x5y}$ 能同时被 2、3、5 整除，试求满足条件的所有这样的五位数.

4. 将自然数 1、2、3、4、5、6、7、8、9 依次重复写下去组成一个 1993 位数，试问：这个数能否被 3 整除？

5. 一本陈年老账上记着：72 只桶，共 $\square$ 67.9 $\square$ 元. 这里 $\square$ 处字迹已不清. 请把 $\square$ 处数字补上，并求桶的单价.

6. 证明：任意一个三位数连着写两次得到一个六位数，这个六位数一定能同时被 7、11、13 整除.

习题一解答

1．39312.

2．8.

3．32250、32550、32850.

4．解：∵　$1+2+3+\cdots+9=45$，$3|45$，

又∴　1993 除以 9 余 4，

∴　这个 1993 位数的最末 4 位数字是 1234.

∵　$1+2+3+4=10$，　$3\nmid 10$，

∴　这个 1993 位数不能被 3 整除.

5．$\boxed{}$为 3、2 共 367.92 元，每只桶 5.11 元.

6．证明：设任意一个三位数为$\overline{abc}$，则六位数

$$\begin{aligned}\overline{abcabc}&=\overline{abc}\times1000+\overline{abc}\\&=1001\times\overline{abc}\\&=7\times11\times13\times\overline{abc}\end{aligned}$$

所以，这个六位数一定能同时被 7、11、13 整除.

第2讲　质数、合数和分解质因数

一、基本概念和知识

1. 质数与合数

一个数除了 1 和它本身，不再有别的约数，这个数叫做质数（也叫做素数）.

一个数除了 1 和它本身，还有别的约数，这个数叫做合数.

要特别记住：1 不是质数，也不是合数.

2. 质因数与分解质因数

如果一个质数是某个数的约数，那么就说这个质数是这个数的质因数.

把一个合数用质因数相乘的形式表示出来，叫做分解质因数.

例：把 30 分解质因数.

解：$30=2\times3\times5$.

其中 2、3、5 叫做 30 的质因数.

又如　$12=2\times2\times3=2^2\times3$，2、3 都叫做 12 的质因数.

二、例　题

【例 1】　三个连续自然数的乘积是 210，求这三个数.

解：∵　$210=2\times3\times5\times7$

∴　可知这三个数是 5、6 和 7.

【例 2】　两个质数的和是 40，求这两个质数的乘积的最大值是多少？

解：把 40 表示为两个质数的和，共有三种形式：

$$40=17+23=11+29=3+37.$$

∵　$17\times23=391>11\times29=319>3\times37=111$.

∴　所求的最大值是 391.

答：这两个质数的最大乘积是 391.

【例 3】　自然数 123456789 是质数，还是合数？为什么？

解：123456789 是合数.

因为它除了有约数 1 和它本身外，至少还有约数 3，所以它是一个合数.

【例 4】　连续九个自然数中至多有几个质数？为什么？

解：如果这连续的九个自然数在 1 与 20 之间，那么显然其中最多有 4 个质数(如：1～9 中有 4 个质数 2、3、5、7).

如果这连续的九个自然中最小的不小于 3，那么其中的偶数显然为合数，而其中奇数的个数最多有 5 个．这 5

个奇数中必只有一个个位数是 5，因而 5 是这个奇数的一个因数，即这个奇数是合数．这样，至多另 4 个奇数都是质数．

综上所述，连续九个自然数中至多有 4 个质数．

【例 5】 把 5、6、7、14、15 这五个数分成两组，使每组数的乘积相等．

解：$\because$ $5=5, 7=7, 6=2\times3, 14=2\times7, 15=3\times5$，

这些数中质因数 2、3、5、7 各共有 2 个，所以如把 14（$=2\times7$）放在第一组，那么 7 和 6（$=2\times3$）只能放在第二组，继而 15（$=3\times5$）只能放在第一组，则 5 必须放在第二组．

这样 $14\times15=210=5\times6\times7$．

$\therefore$ 这五个数可以分为 14 和 15，5、6 和 7 两组．

【例 6】 有三个自然数，最大的比最小的大 6，另一个是它们的平均数，且三数的乘积是 42560．求这三个自然数．

分析 先大概估计一下，$30\times30\times30=27000$，远小于 42560．$40\times40\times40=64000$，远大于 42560．因此，要求的三个自然数在 30～40 之间．

解：
$$
\begin{aligned}
42560 &= 2^6\times5\times7\times19\\
&= 2^5\times(5\times7)\times(19\times2)\\
&= 32\times35\times38 \qquad (\text{合题意})
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 要求的三个自然数分别是 32、35 和 38．

【例 7】 有 3 个自然数 a、b、c．已知 $a\times b=6$，$b\times c=15$，$a\times c=10$．求 $a\times b\times c$ 是多少？

解：$\because$ $6=2\times3$，$15=3\times5$，$10=2\times5$．

$\therefore\quad (a\times b)\times(b\times c)\times(a\times c)$

$\quad=(2\times3)\times(3\times5)\times(2\times5)$

$\therefore\quad a^2\times b^2\times c^2=2^2\times3^2\times5^2$

$\therefore\quad (a\times b\times c)^2=(2\times3\times5)^2$

$\therefore\quad a\times b\times c=2\times3\times5=30$

在例 7 中有 $a^2=2^2$，$b^2=3^2$，$c^2=5^2$，其中 $2^2=4$，$3^2=9$，$5^2=25$，像 4、9、25 这样的数，推及一般情况，我们把一个自然数平方所得到的数叫做完全平方数或叫做平方数.

如：$1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9$，$4^2=16$，…，$11^2=121$，$12^2=144$，…其中 1，4，9，16，…，121，144，…都叫做完全平方数.

下面让我们观察一下，把一个完全平方数分解质因数后，各质因数的指数有什么特征.

例如：把下列各完全平方数分解质因数：

9，36，144，1600，275625.

解：$9=3^2$　　$36=2^2\times3^2$　　$144=3^2\times2^4$

$1600=2^6\times5^2$　　$275625=3^2\times5^4\times7^2$

可见，一个完全平方数分解质因数后，各质因数的指数均是偶数.

反之，如果把一个自然数分解质因数之后，各个质因数的指数都是偶数，那么这个自然数一定是完全平方数.

如上例中，$36=6^2$，$144=12^2$，$1600=40^2$，$275625=525^2$.

【例 8】　一个整数 a 与 1080 的乘积是一个完全平方数. 求 a 的最小值与这个平方数.

分析 ∵ a 与 1080 的乘积是一个完全平方数，

∴ 乘积分解质因数后，各质因数的指数一定全是偶数.

解：∵ $1080\times a=2^3\times3^3\times5\times a$，

又∵ $1080=2^3\times3^3\times5$ 的质因数分解中各质因数的指数都是奇数，

∴ a 必含质因数 2、3、5，因此 a 最小为 $2\times3\times5$.

∴ $1080\times a=1080\times2\times3\times5=1080\times30=32400$.

答：a 的最小值为 30，这个完全平方数是 32400.

【例 9】 问 360 共有多少个约数？

分析 $360=2^3\times3^2\times5$.

为了求 360 有多少个约数，我们先来看 $3^2\times5$ 有多少个约数，然后再把所有这些约数分别乘以 1、2、2^2、2^3，即得到 $2^3\times3^2\times5$（$=360$）的所有约数．为了求 $3^2\times5$ 有多少个约数，可以先求出 5 有多少个约数，然后再把这些约数分别乘以 1、3、3^2，即得到 $3^2\times5$ 的所有约数.

解：记 5 的约数个数为 Y_1，

$3^2\times5$ 的约数个数为 Y_2，

360（$=2^3\times3^2\times5$）的约数个数为 Y_3.

由上面的分析可知：

$Y_3=4\times Y_2$，$Y_2=3\times Y_1$，

显然 $Y_1=2$（5 只有 1 和 5 两个约数）.

因此 $Y_3=4\times Y_2=4\times3\times Y_1=4\times3\times2=24$.

所以 360 共有 24 个约数.

说明：$Y_3=4\times Y_2$ 中的“4”即为“1、2、2^2、2^3”中数的个数，也就是其中 2 的最大指数加 1，也就是 $360=2^3\times3^2\times5$ 中质因数 2 的个数加 1；$Y_2=3\times Y_1$ 中的

“3”即为“1、3、3^2”中数的个数，也就是 $2^3\times3^2\times5$ 中质因数 3 的个数加 1；而 $Y_1=2$ 中的“2”即为“1、5”中数的个数，即 $2^3\times3^2\times5$ 中质因数 5 的个数加 1．因此

$$Y_3=(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24.$$

对于任何一个合数，用类似于对 $2^3\times3^2\times5$（$=360$）的约数个数的讨论方式，我们可以得到一个关于求一个合数的约数个数的重要结论：

一个合数的约数个数，等于它的质因数分解式中每个质因数的个数（即指数）加 1 的连乘的积．

【例 10】　求 240 的约数的个数．

解： ∵　$240=2^4\times3^1\times5^1$，

∴　240 的约数的个数是

$(4+1)\times(1+1)\times(1+1)=20$，

∴　240 有 20 个约数．

请你列举一下 240 的所有约数，再数一数，看一看是否是 20 个？

习　题　二

1．边长为自然数，面积为 105 的形状不同的长方形共有多少种？

2．11112222 个棋子排成一个长方阵．每一横行的棋子数比每一竖列的棋子数多 1 个．这个长方阵每一横行有多少个棋子？

3．五个相邻自然数的乘积是 55440，求这五个自然数．

4．自然数 a 乘以 338，恰好是自然数 b 的平方．求

a 的最小值以及 b.

5．求 10500 的约数共有多少个？

习题二解答

1．$\because$ $105=3\times5\times7$，

$\therefore$ $105=1\times105=3\times35=5\times21=7\times15$，

$\therefore$ 共有 4 种.

2．分析

$\because$ 每一横行棋子数比每一竖列棋子数多 1 个.

$\therefore$ 横行数与竖列数应是两个相邻的自然数.

解：$11112222=3333\times3334$

$\therefore$ 答案为 3334.

3．7、8、9、10、11.

4．分析

$\because$ 自然数 a 乘以 338，恰好是自然数 b 的平方，

$\therefore$ a 与 338 的积分解质因数以后，每个质因数的个数之和都是偶数.

解：$\because$ $338=2\times13\times13$，

$\therefore$ $a=2$，$b=2\times13=26$.

5．解：$\because$ $10500=2^2\times3\times5^3\times7$，

又 $\because$ $(2+1)\times(1+1)\times(3+1)\times(1+1)=48$.

$\therefore$ 10500 的约数共有 48 个.

第3讲　最大公约数和最小公倍数

一、基本概念和知识

1. 公约数和最大公约数

几个数公有的约数，叫做这几个数的公约数；其中最大的一个，叫做这几个数的最大公约数.

例如：12 的约数有：1，2，3，4，6，12；

18 的约数有：1，2，3，6，9，18.

12 和 18 的公约数有：1，2，3，6. 其中 6 是 12 和 18 的最大公约数，记作（12，18）=6.

2. 公倍数和最小公倍数

几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数；其中最小的一个，叫做这几个数的最小公倍数.

例如：12 的倍数有：12，24，36，48，60，72，84，…

18 的倍数有：18，36，54，72，90，…

12 和 18 的公倍数有：36，72，…. 其中 36 是 12 和 18 的最小公倍数，记作〔12，18〕=36.

3. 互质数

如果两个数的最大公约数是 1，那么这两个数叫做互质数.

二、例　题

【例 1】　用一个数去除 30、60、75，都能整除，这个数最大是多少？

分析　∵　要求的数去除 30、60、75 都能整除，

∴　要求的数是 30、60、75 的公约数.

又∵　要求符合条件的最大的数，

∴　就是求 30、60、75 的最大公约数.

解：∵

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 30 & 60 & 75 \\ \hline 3 & 6 & 12 & 15 \\ \hline & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

（30，60，75）＝5×3＝15

∴　这个数最大是 15.

【例 2】　一个数用 3、4、5 除都能整除，这个数最小是多少？

分析　由题意可知，要求的数是 3、4、5 的公倍数，且是最小的公倍数.

解：∵　〔3，4，5〕＝3×4×5＝60，

∴　用 3、4、5 除都能整除的最小的数是 60.

【例 3】　有三根铁丝，长度分别是 120 厘米、180 厘米和 300 厘米. 现在要把它们截成相等的小段，每根都不能有剩余，每小段最长多少厘米？一共可以截成多少段？

分析　∵　要截成相等的小段，且无剩余，

∴　每段长度必是 120、180 和 300 的公约

数．

又∵　每段要尽可能长，

∴　要求的每段长度就是 120、180 和 300 的最大公约数．

解：∵

$$
\begin{array}{r|rrr}
30 & 120 & 180 & 300 \\
\hline
2 & 4 & 6 & 10 \\
\hline
 & 2 & 3 & 5
\end{array}
$$

$(120,180,300)=30\times2=60$

∴　每小段最长 60 厘米．

$120\div60+180\div60+300\div60$

$=2+3+5=10$（段）

答：每段最长 60 厘米，一共可以截成 10 段．

【例 4】　加工某种机器零件，要经过三道工序．第一道工序每个工人每小时可完成 3 个零件，第二道工序每个工人每小时可完成 10 个，第三道工序每个工人每小时可完成 5 个，要使加工生产均衡，三道工序至少各分配几个工人？

分析　要使加工生产均衡，各道工序生产的零件总数应是 3、10 和 5 的公倍数．要求三道工序“至少”要多少工人，要先求 3、10 和 5 的最小公倍数．

解：∵

$$
\begin{array}{r|rrr}
5 & 3 & 10 & 5 \\
\hline
 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

$[3,10,5]=5\times3\times2=30$

∴　各道工序均应加工 30 个零件．

$30\div3=10$（人）

$30\div10=3$（人）

$30 \div 5 = 6$（人）

答：第一道工序至少要分配10人，第二道工序至少要分配3人，第三道工序至少要分配6人.

【例5】　一次会餐供有三种饮料. 餐后统计，三种饮料共用了65瓶；平均每2个人饮用一瓶 A 饮料，每3人饮用一瓶 B 饮料，每4人饮用一瓶 C 饮料. 问参加会餐的人数是多少人？

分析　由题意可知，参加会餐人数应是2、3、4的公倍数.

解：∵　$[2, 3, 4] = 12$

∴　参加会餐人数应是12的倍数.

又∵　$12 \div 2 + 12 \div 3 + 12 \div 4$

$= 6 + 4 + 3 = 13$（瓶），

∴　可见12个人要用6瓶 A 饮料，4瓶 B 饮料，3瓶 C 饮料，共用13瓶饮料.

又∵　$65 \div 13 = 5$，

∴　参加会餐的总人数应是12的5倍，

$12 \times 5 = 60$（人）.

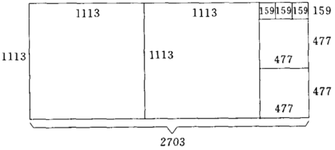
答：参加会餐的总人数是60人.

【例6】　一张长方形纸，长2703厘米，宽1113厘米. 要把它截成若干个同样大小的正方形，纸张不能有剩余且正方形的边长要尽可能大. 问：这样的正方形的边长是多少厘米？

分析　由题意可知，正方形的边长即是2703和1113的最大公约数. 在学校，我们已经学过用短除法求两个数的最大公约数，但有时会遇到类似此题情况，两

个数除了 1 以外的公约数一下不好找到．但又不能轻易断定它们是互质数．怎么办？在此，我们以例 6 为例介绍另一种求最大公约数的方法．

对于例 6，可做如下图解：



从图中可知：在长 2703 厘米、宽 1113 厘米的长方形纸的一端，依次裁去以宽（1113 厘米）为边长的正方形 2 个．在裁后剩下的长 1113 厘米，宽 477 厘米的长方形中，再裁去以宽（477 厘米）为边长的正方形 2 个．然后又在裁剩下的长方形（长 477 厘米，宽 159 厘米）中，以 159 厘米为边长裁正方形，恰好裁成 3 个，且无剩余．因此可知，159 厘米是 477 厘米、1113 厘米和 2703 厘米的约数．所以裁成同样大的，且边长尽可能长的正方形的边长应是 159 厘米．所以，159 厘米是 2703 和 1113 的最大公约数．

让我们把图解过程转化为计算过程，即：

$2703 \div 1113$，商 2 余 477；

$1113 \div 477$，商 2 余 159；

$477 \div 159$，商 3 余 0．

或者写为

$2703 = 2 \times 1113 + 477$，

$1113=2\times477+159$，

$477=3\times159$.

当余数为 0 时，最后一个算式中的除数 159 就是原来两个数 2703 和 1113 的最大公约数.

可见，$477=159\times3$，

$1113=159\times3\times2+159=159\times7$，

$2703=159\times7\times2+477$

$=159\times7\times2+159\times3=159\times17$.

又 $\because$ 7 和 17 是互质数，

$\therefore$ 159 是 2703 和 1113 的最大公约数.

我们把这种求最大公约数的方法叫做辗转相除法.辗转相除法的优点在于它能在较短的时间内求出任意两个数的最大公约数.

【例 7】 用辗转相除法求 4811 和 1981 的最大公约数.

解：$\because$ $4811=2\times1981+849$，

$1981=2\times849+283$，

$849=3\times283$，

$\therefore$ $(4811, 1981)=283$.

补充说明：如果要求三个或更多的数的最大公约数，可以先求其中任意两个数的最大公约数，再求这个公约数与另外一个数的最大公约数，这样求下去，直至求得最后结果.也可以直接观察，依次试公有的质因数.

【例 8】 求 1008、1260、882 和 1134 四个数的最大公约数是多少？

解：$\because$ $(1260, 1008)=252$，

$(882, 1134)=126$，

又 $(252, 126)=126$，

$\therefore\quad (1008,\ 1260,\ 882,\ 1134) = 126.$

求两个数的最小公倍数，除了用短除法外，是否也有其他方法呢？请看例 9.

【例 9】　两个数的最大公约数是 4，最小公倍数是 252，其中一个数是 28，另一个数是多少？

解：设要求的数为 x，则有：$\begin{array}{r|ll} 4 & x & 28 \\ \hline & y & 7 \end{array}$

$\therefore\quad x = 4\times y \qquad 28 = 4\times 7$

$\therefore\quad 28x = 4\times y\times 4\times 7$

又 $\because$　4 是 x 和 28 的最大公约数，$(y,\ 7) = 1$，

$\therefore\quad 4\times y\times 7$ 是 x 和 28 的最小公倍数.

$\therefore\quad x\times 28 = 4\times 252$

$\therefore\quad x = 4\times 252\div 28 = 36$

$\therefore$　要求的数是 36.

通过例 9 的解答过程，不难发现：如果用 a 和 b 表示两个自然数，那么这两个自然数的最大公约数与最小公倍数关系是：

$$(a,\ b)\times [a,\ b] = a\times b.$$

这样，求两个数的最小公倍数的问题，即可转化成先求两个数的最大公约数，再用最大公约数除两个数的积，其结果就是这两个数的最小公倍数.

【例 10】　求 21672 和 11352 的最小公倍数.

解：$\because\quad (21672,\ 11352) = 1032$

（1032 可以用辗转相除法求得）

$$\begin{aligned}\therefore\quad [21672,\ 11352] &= 21672\times 11352\div 1032\\ &= 238392.\end{aligned}$$

答：21672 和 11352 的最小公倍数是 238392.

习　题　三

1．甲数是乙数的三分之一，甲数和乙数的最小公倍数是54，甲数是多少？乙数是多少？

2．一块长方形地面，长120米，宽60米，要在它的四周和四角种树，每两棵之间的距离相等，最少要种树苗多少棵？每相邻两棵之间的距离是多少米？

3．已知两个自然数的积是5766，它们的最大公约数是31．求这两个自然数．

4．兄弟三人在外工作，大哥6天回家一次，二哥8天回家一次，小弟12天回家一次．兄弟三人同时在十月一日回家，下一次三人再见面是哪一天？

5．将长25分米，宽20分米，高15分米的长方体木块锯成完全一样的尽可能大的立方体，不能有剩余，每个立方体的体积是多少？一共可锯多少块？

6．一箱地雷，每个地雷的重量相同，且都是超过1的整千克数，去掉箱子后地雷净重201千克，拿出若干个地雷后，净重183千克．求一个地雷的重量？

习题三解答

1. 甲数是 18，乙数是 54.

2. 每两棵之间的距离是 60 米，最少要种树苗 6 棵.

3. 解：设这两个自然数为 A 和 B.

$$[A, B] = 5766 \div 31 = 186.$$

$\because$ $186 = 2 \times 3 \times 31$,

$\therefore$ $\begin{cases} A = 31 \\ B = 31 \times 2 \times 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} A = 31 \times 2 \\ B = 31 \times 3, \end{cases}$

$\therefore$ 这两个自然数为 31 和 186 或 62 和 93.

4. 10 月 25 日.

5. 每个立方体的体积是 125 立方分米. 一共可锯 60 块.

6. 3 千克.

第4讲　带余数的除法

前面我们讲到除法中被除数和除数的整除问题．除此之外，例如：$16\div 3=5\cdots 1$，即 $16=5\times 3+1$．此时，被除数除以除数出现了余数，我们称之为带余数的除法．

一般地，如果 a 是整数，b 是整数（$b\neq 0$），那么一定有另外两个整数 q 和 r，$0\leqslant r<b$，使得 $a=b\times \mathrm{q}+r$．

当 $r=0$ 时，我们称 a 能被 b 整除．

当 $r\neq 0$ 时，我们称 a 不能被 b 整除，r 为 a 除以 b 的余数，q 为 a 除以 b 的不完全商（亦简称为商）．用带余除式又可以表示为 $a\div b=\mathrm{q}\cdots r$，$0\leqslant r<b$．

【例 1】　一个两位数去除 251，得到的余数是 41．求这个两位数．

分析　这是一道带余除法题，且要求的数是大于 41 的两位数．解题可从带余除式入手分析．

解：∵　被除数 ÷ 除数 = 商…余数，

即　被除数 = 除数 × 商 + 余数，

∴　251 = 除数 × 商 + 41，

251 − 41 = 除数 × 商，

∴　210 = 除数 × 商．

∵　$210=2\times 3\times 5\times 7$，

∴　210 的两位数的约数有 10、14、15、21、30、35、42、70，其中 42 和 70 大于余数 41．所以除数是 42 或 70．即要求的两位数是 42 或 70．

【例 2】　用一个自然数去除另一个整数，商 40，余数是 16．被除数、除数、商数与余数的和是 933，求被除数和除数各是多少？

解：∵　被除数＝除数×商＋余数，

即　被除数＝除数×40＋16．

由题意可知：被除数＋除数＝933－40－16＝877，

∴（除数×40＋16）＋除数＝877，

∴　除数×41＝877－16，

除数＝861÷41，

除数＝21，

∴　被除数＝21×40＋16＝856．

答：被除数是 856，除数是 21．

【例 3】　某年的十月里有 5 个星期六，4 个星期日，问这年的 10 月 1 日是星期几？

解：十月份共有 31 天，每周共有 7 天，

∵　31＝7×4＋3，

∴　根据题意可知：有 5 天的星期数必然是星期四、星期五和星期六．

∴　这年的 10 月 1 日是星期四．

【例 4】　3 月 18 日是星期日，从 3 月 17 日作为第一天开始往回数（即 3 月 16 日（第二天），15 日（第三天），…）的第 1993 天是星期几？

解：每周有 7 天，1993÷7＝284（周）…5（天），

从星期日往回数 5 天是星期二，所以第 1993 天必是星期二．

【例 5】　一个数除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余

2，求适合此条件的最小数.

这是一道古算题. 它早在《孙子算经》中记有："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？"

关于这道题的解法，在明朝就流传着一首解题之歌："三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正半月，除百零五便得知."意思是，用除以 3 的余数乘以 70，用除以 5 的余数乘以 21，用除以 7 的余数乘以 15，再把三个乘积相加. 如果这三个数的和大于 105，那么就减去 105，直至小于 105 为止. 这样就可以得到满足条件的解. 其解法如下：

方法 1：$2\times70+3\times21+2\times15=233$

$233-105\times2=23$

符合条件的最小自然数是 23.

例 5 的解答方法不仅就这一种，还可以这样解：

方法 2：〔3，7〕$+2=23$

23 除以 5 恰好余 3.

所以，符合条件的最小自然数是 23.

方法 2 的思路是什么呢？让我们再来看下面两道例题.

【例 6】 一个数除以 5 余 3，除以 6 余 4，除以 7 余 1，求适合条件的最小的自然数.

分析 "除以 5 余 3"即"加 2 后被 5 整除"，同样"除以 6 余 4"即"加 2 后被 6 整除".

解：〔5，6〕$-2=28$，即 28 适合前两个条件.

想：28+〔5，6〕×？之后能满足"7 除余 1"的条件？

28+〔5，6〕$\times4=148$，$148=21\times7+1$，

又 $148<210=[5,6,7]$

所以，适合条件的最小的自然数是 148.

【例 7】　一个数除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 4，求符合条件的最小自然数.

解：想：$2+3\times?$ 之后能满足“5 除余 3”的条件？

$$2+3\times2=8.$$

再想：$8+[3,5]\times?$ 之后能满足“7 除余 4”的条件？

$$8+[3,5]\times3=53.$$

∴　符合条件的最小的自然数是 53.

归纳以上两例题的解法为：逐步满足条件法. 当找到满足某个条件的数后，为了再满足另一个条件，需做数的调整，调整时注意要加上已满足条件中除数的倍数.

解这类题目还有其他方法，将会在有关“同余”部分讲到.

【例 8】　一个布袋中装有小球若干个. 如果每次取 3 个，最后剩 1 个；如果每次取 5 个或 7 个，最后都剩 2 个. 布袋中至少有小球多少个？

解：$2+[5,7]\times1=37$（个）

∵　37 除以 3 余 1，除以 5 余 2，除以 7 余 2，

∴　布袋中至少有小球 37 个.

【例 9】　69、90 和 125 被某个正整数 N 除时，余数相同，试求 N 的最大值.

分析　在解答此题之前，我们先来看下面的例子：

15 除以 2 余 1，　19 除以 2 余 1，

即　15 和 19 被 2 除余数相同（余数都是 1）.

但是　$19-15$ 能被 2 整除.

由此我们可以得到这样的结论：如果两个整数 a 和 b，均被自然数 m 除，余数相同，那么这两个整数之差（大－小）一定能被 m 整除.

反之，如果两个整数之差恰被 m 整除，那么这两个整数被 m 除的余数一定相同.

例 9 可做如下解答：

$\because$ 三个整数被 N 除余数相同，

$\therefore$ $N|(90-69)$，即 $N|21$， $N|(125-90)$，即 $N|35$，

$\therefore$ N 是 21 和 35 的公约数.

$\because$ 要求 N 的最大值，

$\therefore$ N 是 21 和 35 的最大公约数.

$\because$ 21 和 35 的最大公约数是 7，

$\therefore$ N 最大是 7.

习 题 四

1. 用一个自然数去除另一个自然数，不完全商是 8，余数是 16. 被除数、除数、商、余数这四个数的和为 463，求除数.

2. 某数除以 3 余 1，除以 4 余 2，除以 5 余 3，除以 6 余 4，这个数最小是多少？

3. 某数除以 8 余 3，除以 9 余 4，除以 12 余 7，在 1000 以内这样的数有哪几个？

4. 用卡车运货，每次运 9 袋余 1 袋，每次运 8 袋余 3 袋，每次运 7 袋余 2 袋. 这批货至少有多少袋？

5. 57、96、148 被某自然数除，余数相同，且不为零. 求 284 被这个自然数除的余数.

习题四解答

1. 除数为 47.

2. 58.

3. 共 13 个. 有：67，139，211，283，355，427，499，571，643，715，787，859，931.

4. 163.

5. 11.

第5讲 奇数与偶数及奇偶性的应用

一、基本概念和知识

1．奇数和偶数

整数可以分成奇数和偶数两大类．能被2整除的数叫做偶数，不能被2整除的数叫做奇数．

偶数通常可以用$2k$（k为整数）表示，奇数则可以用$2k+1$（k为整数）表示．

特别注意，因为0能被2整除，所以0是偶数．

2．奇数与偶数的运算性质

性质1：偶数±偶数=偶数，　奇数±奇数=偶数．

性质2：偶数±奇数=奇数．

性质3：偶数个奇数相加得偶数．

性质4：奇数个奇数相加得奇数．

性质5：偶数×奇数=偶数，

奇数×奇数=奇数．

二、例　题

利用奇数与偶数的这些性质，我们可以巧妙地解决许多实际问题．

【例1】　$1+2+3+\cdots+1993$的和是奇数？还是偶

数？

分析　此题可以利用高斯求和公式直接求出和，再判别和是奇数，还是偶数．但是如果从加数的奇、偶个数考虑，利用奇偶数的性质，同样可以判断和的奇偶性．此题可以有两种解法．

解法1：∵　$1+2+3+\cdots+1993$

$$=\frac{(1+1993)\times 1993}{2}=997\times 1993,$$

又∵　997和1993是奇数，奇数×奇数＝奇数，

∴　原式的和是奇数．

解法2：∵　$1993\div 2=996\cdots 1$，

∴　1～1993的自然数中，有996个偶数，有997个奇数．

∵　996个偶数之和一定是偶数，

又∵　奇数个奇数之和是奇数，

∴　997个奇数之和是奇数．

因为，偶数＋奇数＝奇数，

所以原式之和一定是奇数．

【例2】　一个数分别与另外两个相邻奇数相乘，所得的两个积相差150，这个数是多少？

解法1：∵　相邻两个奇数相差2，

∴　150是这个要求数的2倍．

∴　这个数是$150\div 2=75$．

解法2：设这个数为x，设相邻的两个奇数为$2a+1$，$2a-1$（$a\geqslant 1$）．则有

$$(2a+1)x-(2a-1)x=150,$$

$$2ax+x-2ax+x=150,$$

$$2x=150,$$

$$x=75.$$

∴　这个要求的数是 75.

【例 3】　元旦前夕，同学们相互送贺年卡．每人只要接到对方贺年卡就一定回赠贺年卡，那么送了奇数张贺年卡的人数是奇数，还是偶数？为什么？

分析　此题初看似乎缺总人数．但解决问题的实质在送贺年卡的张数的奇偶性上，因此与总人数无关．

解： 由于是两人互送贺年卡，给每人分别标记送出贺年卡一次．那么贺年卡的总张数应能被 2 整除，所以贺年卡的总张数应是偶数．

送贺年卡的人可以分为两种：

一种是送出了偶数张贺年卡的人：他们送出贺年卡总和为偶数．

另一种是送出了奇数张贺年卡的人：他们送出的贺年卡总数 = 所有人送出的贺年卡总数 − 所有送出了偶数张贺年卡的人送出的贺年卡总数 = 偶数 − 偶数 = 偶数．

他们的总人数必须是偶数，才使他们送出的贺年卡总数为偶数．

所以，送出奇数张贺年卡的人数一定是偶数．

【例 4】　已知 a、b、c 中有一个是 5，一个是 6，一个是 7．求证 $a-1$，$b-2$，$c-3$ 的乘积一定是偶数．

证明：∵　a、b、c 中有两个奇数、一个偶数，

∴　a、c 中至少有一个是奇数，

∴　$a-1$，$c-3$ 中至少有一个是偶数．

又∵　偶数 × 整数 = 偶数，

∴　$(a-1)\times(b-2)\times(c-3)$ 是偶数．

【例 5】　任意改变某一个三位数的各位数字的顺序得到一个新数．试证新数与原数之和不能等于 999．

证明：设原数为$\overline{abc}$，设改变其各位数字顺序后得到的新数为$\overline{a'b'c'}$.

假设原数与新数之和为 999，即$\overline{abc}+\overline{a'b'c'}=999$.

则有 $a+a'=b+b'=c+c'=9$，因为 9 不会是进位后得到的

又因为 a'、b'、c'是 a、b、c 调换顺序得到的，

所以 $a+b+c=a'+b'+c'$.

因此，又有$(a+a')+(b+b')+(c+c')=9+9+9$，

即 $2(a+b+c)=3\times9$.

可见：等式左边是偶数，等式的右边（$3\times9=27$）是奇数．偶数≠奇数．因此，等式不成立．所以，此假设“原数与新数之和为 999”是错误的，命题得证．

这个证明过程教给我们一种思考问题和解决问题的方法．先假设某种说法正确，再利用假设说法和其他性质进行分析推理，最后得到一个不可能成立的结论，从而说明假设的说法不成立．这种思考证明的方法在数学上叫“反证法”．

【例 6】 用代表整数的字母 a、b、c、d 写成等式组：

$$a\times b\times c\times d-a=1991$$
$$a\times b\times c\times d-b=1993$$
$$a\times b\times c\times d-c=1995$$
$$a\times b\times c\times d-d=1997$$

试说明：符合条件的整数 a、b、c、d 是否存在．

解：由原题等式组可知：

$a(bcd-1)=1991$，　$b(acd-1)=1993$，

$c(abd-1)=1995$，　$d(abc-1)=1997$.

∵　1991、1993、1995、1997 均为奇数，

且只有奇数×奇数＝奇数，

∴　a、b、c、d 分别为奇数.

∴　$a\times b\times c\times d$＝奇数.

∴　a、b、c、d 的乘积分别减去 a、b、c、d 后，一定为偶数. 这与原题等式组矛盾.

∴　不存在满足题设等式组的整数 a、b、c、d.

【例 7】　桌上有 9 只杯子，全部口朝上，每次将其中 6 只同时“翻转”. 请说明：无论经过多少次这样的“翻转”，都不能使 9 只杯子全部口朝下.

解：要使一只杯子口朝下，必须经过奇数次“翻转”. 要使 9 只杯子口全朝下，必须经过 9 个奇数之和次“翻转”. 即“翻转”的总次数为奇数. 但是，按规定每次翻转 6 只杯子，无论经过多少次“翻转”，翻转的总次数只能是偶数次. 因此无论经过多少次“翻转”，都不能使 9 只杯子全部口朝下.

【例 8】　假设 n 盏有拉线开关的灯亮着，规定每次拉动（$n-1$）个开关，能否把所有的灯都关上？请证明此结论，或给出一种关灯的办法.

证明：当 n 为奇数时，不能按规定将所有的灯关上.

因为要关上一盏灯，必须经过奇数次拉动它的开关.

由于 n 是奇数，所以 n 个奇数的和＝奇数，

因此要把所有的灯（n 盏）都关上，拉动拉线开关的总次数一定是奇数.

但因为规定每次拉动 $n-1$ 个开关，且 $n-1$ 是偶数，

故　按规定拉动开关的总次数一定是偶数.

∵ 奇数≠偶数，

∴ 当 n 为奇数时，不能按规定将所有灯都关上.

当 n 为偶数时，能按规定将所有灯关上. 关灯的办法如下：

设灯的编号为 1，2，3，4，…，n. 做如下操作：

第一次，1 号灯不动，拉动其余开关；

第二次，2 号灯不动，拉动其余开关；

第三次，3 号灯不动，拉动其余开关；

…

第 n 次，n 号灯不动，拉动其余开关. 这时所有的灯都关上了.

【例 9】 在圆周上有 1987 个珠子，给每一珠子染两次颜色，或两次全红，或两次全蓝，或一次红、一次蓝. 最后统计有 1987 次染红，1987 次染蓝. 求证至少有一珠子被染上过红、蓝两种颜色.

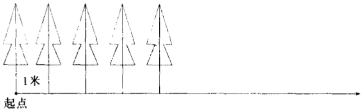
证明：假设没有一个珠子被染上过红、蓝两种颜色，即所有珠子都是两次染同色. 设第一次染 m 个珠子为红色，第二次必然还仅染这 m 个珠子为红色. 则染红色次数为 $2m$ 次.

∵ $2m\neq1987$（偶数≠奇数）

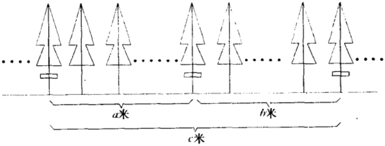
∴ 假设不成立.

∴ 至少有一个珠子被染上红、蓝两种颜色.

【例 10】 如下图，从起点始，隔一米种一棵树，如果把三块“爱护树木”的小牌分别挂在三棵树上，那么不管怎样挂，至少有两棵挂牌的树，它们之间的距离是偶数（以米为单位），这是为什么？



解：任意挑选三棵树挂上小牌，假设第一棵挂牌的树与第二棵挂牌的树之间相距 a 米，第二棵挂牌的树与第三棵挂牌的树之间相距 b 米，那么第一棵挂牌的树与第三棵挂牌的树之间的距离 $c = a + b$（米）（如下图），如果 a、b 中有一个是偶数，题目已得证；如果 a、b 都是奇数，因为奇数 + 奇数 = 偶数，所以 c 必为偶数，那么题目也得证.



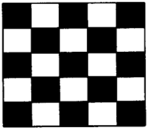
【例 11】　某校六年级学生参加区数学竞赛，试题共 40 道，评分标准是：答对一题给 3 分，答错一题倒扣 1 分．某题不答给 1 分，请说明该校六年级参赛学生得分总和一定是偶数.

解：对每个学生来说，40 道题都答对共得 120 分，是个偶数．如果答错一道，相当于从 120 分中扣 4 分．不论答错多少道，扣分的总数应是 4 的倍数，即扣偶数

分．从 120 里减去偶数．差仍是偶数．同样，如果有某题不答，应从 120 里减去（3－1）分．不论有多少道题没答，扣分的总数是 2 的倍数，也是偶数．所以从 120 里减去偶数，差仍是偶数．因此，每个学生得分数是偶数，那么全年级参赛学生得分总和也一定是偶数．

【例 12】　某学校一年级一班共有 25 名同学，教室座位恰好排成 5 行，每行 5 个座位．把每一个座位的前、后、左、右的座位叫做原座位的邻位．问：让这 25 个学生都离开原座位坐到原座位的邻位，是否可行？

分析　为了便于分析，我们可借助于下图，且用黑白染色帮助分析．



我们把每一个黑、白格看作是一个座位．从图中可知，已在黑格“座位”上的同学要换到邻座，必须坐到白格上；已在白格“座位”上的同学要换到邻座，又必须全坐到黑格“座位”上．因此，要使每人换为邻座位，必须黑、白格数相等．

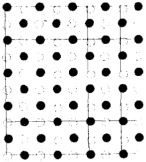
解：从上图可知：黑色座位有 13 个，白色座位有 12 个，$13\neq12$，因此，不可能使每个座位的人换为邻座位．

例 12 的解法，采用了黑白两色间隔染（着）色的办法．因为整数按奇偶分类只有两类，所以将这类问题转变为黑白两色间隔着色，可以帮助我们较直观地理解和

处理问题．让我们再看一道例题，再体会一下奇偶性与染色的关系．

【例 13】　在中国象棋盘任意取定的一个位置上放置着一颗棋子“马”，按中国象棋的走法，当棋盘上没有其他棋子时，这只“马”跳了若干步后回到原处，问：“马”所跳的步数是奇数还是偶数？

解：在中国象棋中，“马”走“日”字，如果将棋盘上的各点按黑白二色间隔着色（如图），可以看出，“马”走任何一步都是从黑色点走到白色点，或从白色点走到黑色点．因此，“马”从一色点跳到另一同色点，必定要跳偶数步．



因此，不论开始时“马”在棋盘的哪个位置上，而且不论“马”跳多少次，要跳回原处，必定要跳偶数步．

【例 14】　线段 AB 有两个端点，一个端点染红色，另一个端点染蓝色．在这个 AB 线段中间插入 n 个交点，或染红色，或染蓝色，得到 $n+1$ 条小线段（不重叠的线段）．试证：两个端点不同色的小线段的条数一定是奇数．

证明：当在 AB 中插入第一点时，无论红或蓝色，两端色不同的线段仍是一条．

插入第二点时有三种情况：

① 插入点在两端不同色的线段中，则两端不同色线段条数不变．

② 插入点在两端同色的线段中，且插入点颜色与线段端点颜色相同，则两端不同色线段条数不变．

③ 插入点在两端同色的线段中，但插入点颜色与线段端点颜色不同，则两端不同色线段条数增加两条.

因此插入第二个点时端点不同色的线段数比插入第一个点时端点不同色的线段数（=1）多 0 或 2，因此是奇数（1 或 3）.

同样，每增加一个点，端点不同色的线段增加偶数（0 或 2）条. 因此，无论 n 是什么数，端点不同色的线段总是奇数条.

习　题　五

1. 有 100 个自然数，它们的和是偶数. 在这 100 个自然数中，奇数的个数比偶数的个数多. 问：这些数中至多有多少个偶数？

2. 有一串数，最前面的四个数依次是 1、9、8、7. 从第五个数起，每一个数都是它前面相邻四个数之和的个位数字. 问：在这一串数中，会依次出现 1、9、8、8 这四个数吗？

3. 求证：四个连续奇数的和一定是 8 的倍数.

4. 把任意 6 个整数分别填入右图中的 6 个小方格内，试说明一定有一个矩形，它的四个角上四个小方格中的四个数之和为偶数.

5. 如果两个人通一次电话，每人都记通话一次，在 24 小时以内，全世界通话次数是奇数的那些人的总数为______.

(A) 必为奇数，　　　　(B) 必为偶数，

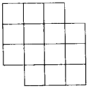
（C）可能是奇数，也可能是偶数．

6．一次宴会上，客人们相互握手．问握手次数是奇数的那些人的总人数是奇数还是偶数．

7．有 12 张卡片，其中有 3 张上面写着 1，有 3 张上面写着 3，有 3 张上面写着 5，有 3 张上面写着 7．你能否从中选出五张，使它们上面的数字和为 20？为什么？

8．有 10 只杯子全部口朝下放在盘子里．你能否每次翻动 4 只杯子，经过若干次翻动后将杯子全部翻成口朝上？

9．电影厅每排有 19 个座位，共 23 排，要求每一观众都仅和它邻近（即前、后、左、右）一人交换位置．问：这种交换方法是否可行？



10．由 14 个大小相同的方格组成下列图形（右图），请证明：不论怎样剪法，总不能把它剪成 7 个由两个相邻方格组成的长方形．

习题五解答

1．偶数至多有 48 个．

2．提示：先按规律写出一些数来，再找其奇、偶性的排列规律，便可得到答案：不会依次出现 1、9、8、8 这四个数．

3．设四个连续奇数是 $2n+1$，$2n+3$，$2n+5$，$2n+7$，n 为整数，则它们的和是

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)$$
$$=2n\times4+16=8n+16=8(n+2).$$

所以，四个连续奇数的和是 8 的倍数．

4．证明：设填入数分别为 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6．有

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6

假设要证明的结论不成立，则有：

$$a_1+a_2+a_4+a_5=\text{奇数}$$
$$a_1+a_3+a_4+a_6=\text{奇数}$$
$$+)\ a_2+a_3+a_5+a_6=\text{奇数}$$

$$2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=\text{奇数}$$

∵　偶数≠奇数，　　∴　假设不成立，命题得证.

5. 应选择 (B). 参考例 3.

6. 是偶数. 参考例 3.

7. 不能. 因为 5 个奇数的和为奇数，不可能等于 20.

8. 能. 例如

第一次　　　　　　7 8 9 10

第二次　　　　3 4 5 6

第三次　　　2 3 4 5

第四次　1 3　4 5

9. 这种交换方法是不可行的. 参考例 12.

10. 利用黑白相间染色方法可以证明：不可能剪成由 7 个相邻两个方格组成的长方形，因为图形中一种颜色有 8 格，另一种颜色有 6 格，而每个相邻两个方格组成的长方形是一黑格一白格，7 个这样的长方形共 7 黑格 7 白格. 与图形相矛盾.

第6讲　能被30以下质数整除的数的特征

大家知道，一个整数能被2整除，那么它的个位数能被2整除；反过来也对，也就是一个数的个位数能被2整除，那么这个数本身能被2整除．因此，我们说“一个数的个位数能被2整除”是“这个数能被2整除”的特征．在这一讲中，我们通过寻求对于某些质数成立的等式来导出能被这些质数整除的数的特征．

为了叙述方便起见，我们把所讨论的数 N 记为：

$N=\cdots\overline{a_3a_2a_1a_0}=\cdots+a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$，

有时也表示为

$N=\overline{\cdots DCBA}$．

我们已学过同余，用 mod 2 表示除以2取余数．有公式：

① $N\equiv a_0 \pmod 2$

② $N\equiv \overline{a_1a_0} \pmod 4$

③ $N\equiv \overline{a_2a_1a_0} \pmod 8$

④ $N\equiv \overline{a_3a_2a_1a_0} \pmod{16}$

这几个公式表明一个数被2（4，8，16）整除的特性，而且表明了不能整除时，如何求余数．

此外，被3（9）整除的数的特征为：它的各位数字之和可以被3（9）整除．我们借用同余记号及一些运算性质来重新推证一下．如（mod 9），如果，

$$N=\overline{a_3a_2a_1a_0}=a_3\times1000+a_2\times100+a_1\times10+a_0$$
$$=a_3\times(999+1)+a_2\times(99+1)+a_1\times(9+1)+a_0$$
$$=(a_3+a_2+a_1+a_0)+(a_3\times999+a_2\times99+a_1\times9),$$

那么，等式右边第二个括号中的数是 9 的倍数，从而有

$$N\equiv a_3+a_2+a_1+a_0 \pmod 9$$

对于 mod 3，理由相仿，从而有公式：

⑤ $N\equiv(\cdots+a_3+a_2+a_1+a_0)\pmod 9$，

$N\equiv(\cdots+a_3+a_2+a_1+a_0)\pmod 3$.

对于被 11 整除的数，它的特征为：它的奇位数字之和与偶位数字之和的差（大减小）能被 11 整除.

先看一例. $N=31428576$，改写 N 为如下形式：

$$N=6+7(11-1)+5(99+1)+8(1001-1)+2(9999+1)+4(100001-1)+1(999999+1)+3(10000001-1)$$
$$=6-7+5-8+2-4+1-3$$
$$+7\times11+5\times99+8\times1001+2\times9999+4\times100001+1\times999999+3\times10000001.$$

由于下面这两行里，11、99、1001、9999、100001、999999、10000001 都是 11 的倍数，所以

$$N=6-7+5-8+2-4+1-3 \pmod{11}.$$

小学生在运算时，碰上"小减大"无法减时，可以从上面 N 的表达式最后一行中"借用"11 的适当倍数（这样，最后一行仍都是 11 的倍数），把它加到"小减大"的算式中，这样就得到：

$$N\equiv11+6-7+5-8+2-4+1-3\equiv3 \pmod{11}.$$

现在总结成一般性公式（推理理由与例题相仿）.

设　$N=\overline{\cdots a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$，

则　$N \equiv (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + \cdots) \pmod{11}$

或者：

⑥ $N \equiv ((a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)) \pmod{11}$

（当不够减时，可添加 11 的适当倍数）.

因此，一个自然数能被 11 整除的特征是：它的奇位数字之和与偶位数字之和的差（大减小）能被 11 整除.

我们这里的公式不仅包含整除情况，还包含有余数的情况.

下面研究被 7、11、13 整除的数的特征.

有一关键性式子：$7 \times 11 \times 13 = 1001$.

如有一个数有六位，记为 $N = \overline{FEDCBA}$. 那么

$$
\begin{aligned}
N &= \overline{FED} \times 1000 + \overline{CBA} \\
&= \overline{FED} \times (1001) - \overline{FED} + \overline{CBA} \\
&= \overline{FED} \times (7 \times 11 \times 13) + \overline{CBA} - \overline{FED}.
\end{aligned}
$$

所以 N 能被 7、11、13 整除，相当于

$\overline{CBA} - \overline{FED}$ 或 $\overline{FED} - \overline{CBA}$　（以大减小）

能被 7、11、13 整除. 总结为公式：

⑦ $N = \overline{\cdots GFEDCBA} \equiv \overline{CBA} - \overline{\cdots GFED} \pmod{7}$；$\pmod{11}$；$\pmod{13}$

（当 $\overline{CBA} < \overline{\cdots GFED}$ 时，可在 $\overline{CBA} - \overline{\cdots GFED}$ 上加上 7 或 11 或 13 的适当倍数）.

表述为：判定某数能否被 7 或 11 或 13 整除，只要把这个数的末三位与前面隔开，分成两个独立的数，取它们的差（大减小），看它是否被 7 或 11 或 13 整除.

此法则可以连续使用.

例：$N=31428576$．判定 N 是否被 11 整除．

第一步：$\begin{array}{r} 31428 \\ -\quad 576 \\ \hline 30852 \end{array}$　　第二步：$\begin{array}{r} 852 \\ -\ 30 \\ \hline 822 \end{array}$

因为 822 不能被 11 整除，所以 N 不能被 11 整除．

例：$N=215332$．判定 N 是否被 7、11、13 整除．

第一步：$\begin{array}{r} 332 \\ -215 \\ \hline 117 \end{array}$

由于 $117=13\times 9$，所以 117 能被 13 整除，但不能被 7、11 整除，因此 N 能被 13 整除，不能被 7、11 整除．

此方法的优点在于当判定一个较大的数能否被 7 或 11 或 13 整除时，可用减法把这个大数化为一个至多是三位的数，然后再进行判定．

如 $N=987654321$．判定 N 能否被 13 整除？

第一步：$\begin{array}{r} 987654 \\ -\quad 321 \\ \hline 987333 \end{array}$　　第二步：$\begin{array}{r} 987 \\ -333 \\ \hline 654 \end{array}$

而 $654=50\times 13+4$，所以原数不能被 13 整除．如直接计算，很费力：

$987654321=75973409\times 13+4$.

下面研究可否被 17、19 整除的简易判别法．回顾对比前面，由等式 $1001=7\times 11\times 13$ 的启发，才有简捷的“隔位相减判整除性”的方法．对于质数 17，我们有下面一些等式：

$17\times 6=102$，　$17\times 59=1003$，　$17\times 588=9996$，

$17\times 5882=99994$，

我们不妨从 $17\times 59=1003$ 出发．

由于 $N=\overline{FEDCBA}=\overline{FED}\times 1000+\overline{CBA}$

$=\overline{FED}\times(1003-3)+\overline{CBA}$

$=\overline{FED}\times 1003+\overline{CBA}-3\times\overline{FED}$

$\equiv\overline{CBA}-3\times\overline{FED}\pmod{17}$.

（亦可在$\overline{CBA}-3\times\overline{FED}$上加上 17 的适当倍数）.

因此，判定一个数可否被 17 整除，只要将其末三位与前面隔开，看末三位数与前面隔出数的 3 倍的差（大减小）是否被 17 整除.

例：$N=31428576$，判定 N 能否被 17 整除.

第一步：

$$\begin{array}{r} 31428 \\ \times\quad\ \ 3 \\ \hline 94284 \\ -\ \ 576 \\ \hline 93708 \end{array}$$

第二步：

$$\begin{array}{r} 708 \\ -279 \\ \hline 429 \end{array}\quad(93\times 3)$$

而 $429=25\times 17+4$，所以 N 不能被 17 整除.

例：$N=2661027$ 能否被 17 整除？

第一步：

$$\begin{array}{r} 2661 \\ \times\quad 3 \\ \hline 7983 \\ -\ 027 \\ \hline 7956 \end{array}$$

第二步：

$$\begin{array}{r} 956 \\ -\ \ 21 \\ \hline 935 \end{array}\ (7\times 3)$$

又 $935=55\times 17$.

所以 N 可被 17 整除.

下面来推导被 19 整除的简易判别法.

寻找关键性式子：$19\times 52=988$，$19\times 53=1007$.

由于 $N=\overline{FEDCBA}=\overline{FED}\times(1000)+\overline{CBA}$

$=\overline{FED}\times(1007-7)+\overline{CBA}$

$=\overline{FED}\times 1007+\overline{CBA}-7\times\overline{FED}$

$$\equiv \overline{CBA} - 7\times\overline{FED}\pmod{19}.$$

（亦可在$\overline{CBA}-7\times\overline{FED}$上加上 19 的适当倍数）.

因此，判定一个数可否被 19 整除，只要将其末三位与前面隔开，看末三位与前面隔出数的 7 倍的差（大减小）是否被 19 整除.

例：$N=123456789$ 可否被 19 整除？

第一步：

$$\begin{array}{r} 123456 \\ \times\quad\ \ 7 \\ \hline 864192 \\ -\quad 789 \\ \hline 863403 \end{array}$$

第二步：

$$\begin{array}{r} 863 \\ \times\ \ 7 \\ \hline 6041 \\ -\ 403 \\ \hline 5638 \end{array}$$

第三步：

$$\begin{array}{r} 638 \\ -\ 35 \\ \hline 603 \end{array}\qquad (5\times 7)$$

又 $603=31\times19+14$，所以 N 不能被 19 整除.

例：$N=6111426$ 可否被 19 整除？

第一步：

$$\begin{array}{r} 6111 \\ \times\quad 7 \\ \hline 42777 \\ -\quad 426 \\ \hline 42351 \end{array}$$

第二步：

$$\begin{array}{r} 351 \\ -\ 294 \\ \hline 57 \end{array}\qquad (42\times 7)$$

又 $57=3\times19$，所以 N 可被 19 整除：$321654\times19=6111426$.

下面来推导被 23、29 整除的简易判别法.

寻找关键性式子，随着质数增大，简易法应该在 N 的位数多时起主要作用，现有

$$23\times435=10005,\qquad 29\times345=10005,$$

由此启发得到一个末四位隔开的方法：

$$\begin{aligned}\text{由于}N &= \overline{GFEDCBA}=\overline{GFE}\times10000+\overline{DCBA}\\ &=\overline{GFE}\times10005-5\times\overline{GFE}+\overline{DCBA},\end{aligned}$$

所以 $N \equiv \overline{DCBA} - 5 \times \overline{GFE}$ (mod 23)；(mod 29)，

（亦可在 $\overline{DCBA} - 5 \times \overline{GFE}$ 上加上 23 或 29 的适当倍数）.

因此，判定一个数可否被 23 或 29 整除，只要将其末四位与前面隔开，看末四位与前面隔出数的 5 倍的差（大减小）是否被 23 或 29 整除.

例：$N = 6938801$ 能否被 23 或 29 整除？

$$\begin{array}{r} 693 \\ \times \quad 5 \\ \hline 3465 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 8801 \\ -3465 \\ \hline 5336 \end{array},$$

又 $5336 = 23 \times 232 = 23 \times 29 \times 8$，

所以很快判出 N 可被 23 及 29 整除.

最后，如读者还想寻找以上数的更简明判别法，或被 31 以上质数整除的判别法，都是可以去探索的. 把这一节得到的公式简列于下：

$N = \overline{\cdots GFEDCBA}$

① $N \equiv \overline{CBA} - \overline{\cdots GFED}$ (mod 7)；(mod 11)；(mod 13)；

② $N \equiv \overline{CBA} - 3 \times \overline{\cdots GFED}$ (mod 17)；(mod 59)；

③ $N \equiv \overline{CBA} - 7 \times \overline{\cdots GFED}$ (mod 19)；(mod 53)；

④ $N \equiv \overline{DCBA} - 5 \times \overline{\cdots GFE}$ (mod 23)；(mod 29)；

⑤ $N \equiv \overline{CBA} + 8 \times \overline{\cdots GFED}$ (mod 31)；

⑥ $N \equiv \overline{CBA} + 1 \times \overline{\cdots GFED}$ (mod 37).

（可在上述这些同余式的右端加上相应质数的适当倍数）.

后两式没有证明，读者不难从 $999 = 37 \times 27$，$992 = 31 \times 32$ 启发出“隔位加”的判别法.

习　题　六

1. 公式 $1003=17\times 59$ 曾用于推导判定被 17 整除的公式，请说明公式②也是判定被 59 整除的简便公式.

2. 说明公式③也是判定被 53 整除的简便公式.

3. 61 是质数，并且 $10004=61\times 164$，你能利用这一等式导出判定被 61 整除的简便公式吗？

4. 67 是质数，$1005=67\times 15$，请证明：

$N=\overline{GFEDCBA}\equiv\overline{CBA}-5\times\overline{GFED}\pmod{67}$

(可在右端加上 67 的适当倍数).

5. $994=71\times 14$，71 是质数，请导出判定被 71 整除的公式.

6. $N=31428576$ 可否被 37 整除？

7. 已知整除$\overline{1x2x3x4x5}$能被 11 整除，求 x 可能的值.

8. 判别 $517214316+72^{10}$能否被 6 整除？能否被 9 整除？说明理由.

9. 证明 $2^{10}-2^{8}+2^{6}-2^{4}+2^{2}-1$ 能被 9 整除.

10. 求使 $2^{n}-1$ 能被 7 整除的所有自然数 n.

习题六解答

1. $N=\overline{GFEDCBA}=\overline{GFED}\times(1003-3)+\overline{CBA}$

$\equiv\overline{CBA}-3\times\overline{GFED}\pmod{59}$.

2. $N=\overline{GFED}\times(1007-7)+\overline{CBA}$

（$\because$ $1007=19\times53$）

$\equiv\overline{CBA}-7\times\overline{GFED}\pmod{53}$.

3. $N=\overline{DCBA}+\overline{GFE}\times(10004-4)\equiv\overline{DCBA}-4\times\overline{GFE}$

$\pmod{61}$.

4. $N=\overline{GFEDCBA}=\overline{GFED}\times(1005-5)+\overline{CBA}$

$\equiv\overline{CBA}-5\times\overline{GFED}\pmod{67}$.

5. $N=\overline{GFEDCBA}=\overline{GFED}\times(994+6)+\overline{CBA}$

$\equiv6\times\overline{GFED}+\overline{CBA}\pmod{71}$.

6. $N=31428576\equiv31428+576\equiv32004$

$\equiv4+32\equiv36\pmod{37}$. 所以不可以.

7. $x=1$.

8. $N=517214316+72^{10}\equiv0\pmod 2$;

$N\equiv0\pmod 3$, $\Rightarrow N\equiv0\pmod 6$. $N\equiv3\pmod 9$.

9. 写成二进制 $N=(10001000100)_2-(100010001)_2$ $=(1100110011)_2$，$(9)_{10}=(1001)_2$，直接作二进制除法，

$(N)_2\div(1001)_2=(1011011)_2$，$\therefore$ $9\nmid N$. 所以，可以整除 6，不能整除 9.

10. $(7)_{10}=(111)_2$,

$(2^n-1)_{10}=(1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}-1)_2=(\underbrace{11\cdots1}_{n个1})_2$

因此，$7\mid2^n-1$ 当且仅当 n 为 3 的倍数.

第7讲　行程问题

这一讲中，我们将要研究的是行程问题中一些综合性较强的题目．为此，我们需要先回顾一下已学过的基本数量关系：

路程＝速度×时间；

总路程＝速度和×时间；

路程差＝速度差×追及时间．

【例1】　小华在8点到9点之间开始解一道题，当时时针、分针正好成一直线，解完题时两针正好第一次重合．问：小明解这道题用了多长时间？

分析　这道题实际上是一个行程问题．开始时两针成一直线，最后两针第一次重合．因此，在我们所考察的这段时间内，两针的路程差为30分格，又因为时针每小时走5分格，即它的速度为$\frac{1}{12}$分格/分钟，而分针的速度为1分格/分钟，所以，当它们第一次重合时，一定是分针从后面追上时针．这是一个追及问题，追及时间就是小明的解题时间．

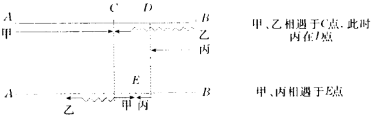
解：$30\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=30\div\frac{11}{12}=32\frac{8}{11}$（分钟）

答：小明解题共用了$32\frac{8}{11}$分钟．

【例2】　甲、乙、丙三人行路，甲每分钟走60米，乙每分钟走50米，丙每分钟走40米．甲从A地，乙和丙从B地同时出发相向而行，甲和乙相遇后，过了15分

钟又与丙相遇，求 A、B 两地间的距离.

画图如下：



分析 结合上图，如果我们设甲、乙在点 C 相遇时，丙在 D 点，则因为过 15 分钟后甲、丙在点 E 相遇，所以 C、D 之间的距离就等于 $(40+60)\times 15=1500$(米).

又因为乙和丙是同时从点 B 出发的，在相同的时间内，乙走到 C 点，丙才走到 D 点，即在相同的时间内乙比丙多走了 1500 米，而乙与丙的速度差为 $50-40=10$(米/分)，这样就可求出乙从 B 到 C 的时间为 $1500\div 10=150$(分钟)，也就是甲、乙二人分别从 A、B 出发到 C 点相遇的时间是 150 分钟，因此，可求出 A、B 的距离.

解： ① 甲和丙 15 分钟的相遇路程：

$(40+60)\times 15=1500$（米）.

② 乙和丙的速度差：

$50-40=10$（米/分钟）.

③ 甲和乙的相遇时间：

$1500\div 10=150$（分钟）.

④ A、B 两地间的距离：

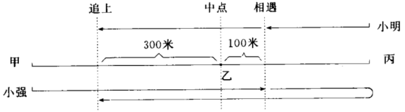
$(50+60)\times 150=16500$（米）$=16.5$ 千米.

答： A、B 两地间的距离是 16.5 千米.

【例 3】 甲、乙、丙是一条路上的三个车站，乙站

到甲、丙两站的距离相等，小强和小明同时分别从甲、丙两站出发相向而行，小强经过乙站 100 米时与小明相遇，然后两人又继续前进，小强走到丙站立即返回，经过乙站 300 米时又追上小明，问：甲、乙两站的距离是多少米？

先画图如下：



分析　结合上图，我们可以把上述运动分为两个阶段来考察：

① 第一阶段——从出发到二人相遇：

小强走的路程 = 一个甲、乙距离 + 100 米，

小明走的路程 = 一个甲、乙距离 − 100 米.

② 第二阶段——从他们相遇到小强追上小明，小强走的路程 = 2 个甲、乙距离 − 100 米 + 300 米 = 2 个甲、乙距离 + 200 米，

小明走的路程 = 100 + 300 = 400（米）.

从小强在两个阶段所走的路程可以看出：小强在第二阶段所走的路是第一阶段的 2 倍，所以，小明第二阶段所走的路也是第一阶段的 2 倍，即第一阶段应走 400 ÷ 2 = 200（米），从而可求出甲、乙之间的距离为 200 + 100 = 300（米）.

解略.

【例 4】 甲、乙、丙三人进行 200 米赛跑，当甲到终点时，乙离终点还有 20 米，丙离终点还有 25 米，如果甲、乙、丙赛跑的速度都不变，那么当乙到达终点时，丙离终点还有多少米？

分析 在相同的时间内，乙行了 $(200-20)=180$（米），丙行了 $200-25=175$（米），则丙的速度是乙的速度的 $175\div180=\frac{35}{36}$，那么，在乙走 20 米的时间内，丙只能走：$20\times\frac{35}{36}=19\frac{4}{9}$（米），因此，当乙到达终点时，丙离终点还有 $25-19\frac{4}{9}=5\frac{5}{9}$（米）.

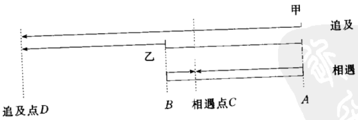
解：$25-20\times\frac{200-25}{200-20}=25-20\times\frac{35}{36}$

$=25-19\frac{4}{9}=5\frac{5}{9}$（米）

答：当乙到终点时，丙离终点还有 $5\frac{5}{9}$米.

【例 5】 甲、乙二人分别从 A、B 两地同时出发，如果两人同向而行，甲 26 分钟赶上乙；如果两人相向而行，6 分钟可相遇，又已知乙每分钟行 50 米，求 A、B 两地的距离.

先画图如下：



分析 若设甲、乙二人相遇地点为 C，甲追及乙的

地点为 D，则由题意可知甲从 A 到 C 用 6 分钟．而从 A 到 D 则用 26 分钟，因此，甲走 C 到 D 之间的路程时，所用时间应为：$(26-6)=20$（分）．

同时，由上图可知，C、D 间的路程等于 BC 加 BD．即等于乙在 6 分钟内所走的路程与在 26 分钟内所走的路程之和，为 $50\times(26+6)=1600$（米）．所以，甲的速度为 $1600\div20=80$（米/分），由此可求出 A、B 间的距离．

解：$50\times(26+6)\div(26-6)=50\times32\div20=80$(米/分)

$(80+50)\times6=130\times6=780$（米）

答：A、B 间的距离为 780 米．

【例 6】 一条公路上，有一个骑车人和一个步行人，骑车人速度是步行人速度的 3 倍，每隔 6 分钟有一辆公共汽车超过步行人，每隔 10 分钟有一辆公共汽车超过骑车人，如果公共汽车始发站发车的时间间隔保持不变，那么间隔几分钟发一辆公共汽车？

分析 要求汽车的发车时间间隔，只要求出汽车的速度和相邻两汽车之间的距离就可以了，但题目没有直接告诉我们这两个条件，如何求出这两个量呢？

由题可知：相邻两汽车之间的距离（以下简称间隔距离）是不变的，当一辆公共汽车超过步行人时，紧接着下一辆公共汽车与步行人之间的距离就是间隔距离，每隔 6 分钟就有一辆汽车超过步行人，这就是说：当一辆汽车超过步行人时，下一辆汽车要用 6 分钟才能追上步行人，汽车与行人的路程差就是相邻两汽车的间隔距离．

对于骑车人可作同样的分析．因此，如果我们把汽

车的速度记作 $V_{汽}$，骑车人的速度为 $V_{自}$，步行人的速度为 $V_{人}$（单位都是米/分钟），则：

间隔距离 $=(V_{汽}-V_{人})\times 6$(米)，

间隔距离 $=(V_{汽}-V_{自})\times 10$(米)，

$V_{自}=3V_{人}$.

综合上面的三个式子，可得：$V_{汽}=6V_{人}$，即 $V_{人}=\frac{1}{6}V_{汽}$，则：

间隔距离 $=(V_{汽}-\frac{1}{6}V_{汽})\times 6=5V_{汽}$（米）

所以，汽车的发车时间间隔就等于：

间隔距离 $\div V_{汽}=5V_{汽}$(米) $\div V_{汽}$(米/分钟) $=5$(分钟).

（解略）.

【例 7】 甲、乙二人沿铁路相向而行，速度相同，一列火车从甲身边开过用了 8 秒钟，离甲后 5 分钟又遇乙，从乙身边开过，只用了 7 秒钟，问从乙与火车相遇开始再过几分钟甲乙二人相遇？

分析 要求过几分钟甲、乙二人相遇，就必须求出甲、乙二人这时的距离与他们速度的关系，而与此相关联的是火车的运动，只有通过火车的运动才能求出甲、乙二人的距离. 火车的运行时间是已知的，因此必须求出其速度，至少应求出它和甲、乙二人的速度的比例关系. 由于本问题较难，故分步详解如下：

① 求出火车速度 $V_{车}$ 与甲、乙二人速度 $V_{人}$ 的关系，设火车车长为 l，则：

(i) 火车开过甲身边用 8 秒钟，这个过程为追及问题：故 $l=(V_{车}-V_{人})\times 8$； (1)

(ii) 火车开过乙身边用 7 秒钟，这个过程为相遇问

题：故 $l=(V_{车}+V_{人})\times 7$.　　　　(2)

由 (1)、(2) 可得：$8(V_{车}-V_{人})=7(V_{车}+V_{人})$，

所以，$V_{车}=15V_{人}$.

② 火车头遇到甲处与火车头遇到乙处之间的距离是：

$(8+5\times 60)\times(V_{车}+V_{人})=308\times 16V_{人}=4928V_{人}$.

③ 求火车头遇到乙时甲、乙二人之间的距离.

火车头遇甲后，又经过 $(8+5\times 60)$ 秒后，火车头才遇乙，所以，火车头遇到乙时，甲、乙二人之间的距离为：

$4928V_{人}-2(8+5\times 60)V_{人}=4312V_{人}$.

④ 求甲、乙二人过几分钟相遇？

$4312V_{人}\div 2V_{人}=2156$（秒）$=35\frac{28}{30}$（分钟）.

答：再过 $35\frac{28}{30}$ 分钟甲乙二人相遇.

习　题　七

1. 晶晶每天早上步行上学，如果每分钟走 60 米，则要迟到 5 分钟，如果每分钟走 75 米，则可提前 2 分钟到校. 求晶晶到校的路程？

2. 甲、乙、丙三人行路，甲每分钟走 60 米，乙每分钟走 67.5 米，丙每分钟走 75 米，甲乙从东镇去西镇，丙从西镇去东镇，三人同时出发，丙与乙相遇后，又经过 2 分钟与甲相遇，求东西两镇间的路程有多少米？

3. A、B 两辆汽车同时从甲、乙两站相对开出，两车第一次在距甲站 32 公里处相遇，相遇后两车继续行驶，各自到达乙、甲两站后，立即沿原路返回，第二次

在距甲站 64 公里处相遇，甲、乙两站间相距多少公里？

4. 周长为 400 米的圆形跑道上，有相距 100 米的 A、B 两点，甲、乙两人分别从 A、B 两点同时相背而跑，两人相遇后，乙即转身与甲同向而跑，当甲跑到 A 时，乙恰好跑到 B. 如果以后甲、乙跑的速度和方向都不变，那么追上乙时，甲共跑了多少米（从出发时算起）？

5. 老王从甲城骑自行车到乙城去办事，每小时骑 15 千米，回来时改骑摩托车，每小时骑 33 千米，骑摩托车比骑自行车少用 1.8 小时，求甲、乙两城间的距离.

6. 速度为快、中、慢的三辆汽车同时从同一地点出发，沿同一公路追赶前面一个骑车人，这三辆车分别用 6 分钟、10 分钟、12 分钟追上骑车人，现在知道快车每小时 24 公里，中速车每小时 20 公里，那么慢车每小时行多少公里？

7. 在环形跑道上，两人都按顺时针方向跑时，每 12 分钟相遇一次，如果两人速度不变，其中一人改成按逆时针方向跑，每隔 4 分钟相遇一次，问两人各跑一圈需要几分钟？

习题七解答

1. 解法 1：$(60\times5+75\times2)\div(75-60)=30$（分钟），
$60\times(30+5)=2100$（米），
或 $75\times(30-2)=2100$（米）.

解法 2：设路程为 x 米.

$$\frac{x}{60}-5=\frac{x}{75}+2$$

$x=2100$（米）.

2. 解法 1：

① 乙丙相遇时间：

$(60+75)\times2\div(67.5-60)=36$（分钟）.

② 东西两镇之间相距多少米？

$(67.5+75)\times36=5130$（米）

解法 2：设东西两镇之间相距 x 米，

$$\frac{x}{67.5+75}+2=\frac{x}{60+75},$$

$x=5130$（米）.

3. A、B 共行 3 个全程，则有：

解法 1：设全程为 x 公里，

$(x-32+x-64)\div2=32$，

$x=64+32\div2$，

$\therefore\quad x=80$（公里）.

解法 2：设全程为 x 公里

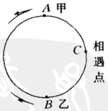
$x-32=(64+32)\div2$，

$x=80$（公里）.

解法 3：$64-32=32$（公里），

$32+32+32\div2=32+32+16=80$（公里）.

4. 乙从相遇点 C 跑回 B 点时，甲从 C 过 B 到 A，他比乙多跑了 100 米．乙从 B 到 C 时，甲从 A 到 C，说明 A 到 C 比 B 到 C 多 100 米．跑道周长 400 米，所以 B 到 C 是 100 米，A 到 C 是 200 米.



乙每跑 100 米，甲就多跑 100 米．要使甲、乙从 C 点开始，再次相遇，甲要比乙多跑一圈，也就是说，乙跑 400 米时，甲跑 800 米与乙第二次相遇，再加上甲从

A 到 C 的 200 米，甲共跑了 1000 米.

5. $1.8\div\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{33}\right)=1.8\div\frac{2}{55}=49.5$（千米）.

6.① 快车每分钟行多少米：$24000\div 60=400$（米）.

② 中速车每分钟行多少米：$20000\div 60=\frac{1000}{3}$（米）.

③ 快车 6 分钟行多少米：$400\times 6=2400$（米）.

④ 中速车 6 分钟行多少米：$\frac{1000}{3}\times 6=2000$（米）.

⑤ 中速车与骑车人每分钟相差米数：

$(2400-2000)\div(10-6)=100$（米）.

⑥ 骑车人每分钟行多少米：$\frac{1000}{3}-100=\frac{700}{3}$（米）.

⑦ 三辆汽车与骑车人的路程差：

$\left(400-\frac{700}{3}\right)\times 6=2400-1400=1000$（米）.

⑧ 慢车每分钟行多少米：

$\left(1000+\frac{700}{3}\times 12\right)\div 12=3800\div 12=\frac{950}{3}$（米）.

⑨ 慢车每小时行多少千米：

$\frac{950}{3}\times 60=19000$（米）$=19$（千米）.

7. 设用字母 a 表示甲速，用字母 b 表示乙速（$a>b$）.

$(a+b)\times 4=(a-b)\times 12$

$a:b=2:1$　（甲、乙速度比是 2:1）

甲、乙速度和为$\frac{1}{4}$圈/分钟.

$1\div\left(\frac{1}{4}\times\frac{2}{2+1}\right)=1\div\frac{1}{6}=6$（分钟），

$1\div\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2+1}\right)=1\div\frac{1}{12}=12$（分钟）.

第8讲　流水行船问题

船在江河里航行时，除了本身的前进速度外，还受到流水的推送或顶逆，在这种情况下计算船只的航行速度、时间和所行的路程，叫做流水行船问题.

流水行船问题，是行程问题中的一种，因此行程问题中三个量（速度、时间、路程）的关系在这里将要反复用到. 此外，流水行船问题还有以下两个基本公式：

顺水速度 = 船速 + 水速，　　　　(1)

逆水速度 = 船速 − 水速.　　　　(2)

这里，船速是指船本身的速度，也就是在静水中单位时间里所走过的路程. 水速，是指水在单位时间里流过的路程. 顺水速度和逆水速度分别指顺流航行时和逆流航行时船在单位时间里所行的路程.

根据加减法互为逆运算的关系，由公式（1）可以得到：

水速 = 顺水速度 − 船速，

船速 = 顺水速度 − 水速.

由公式（2）可以得到：

水速 = 船速 − 逆水速度，

船速 = 逆水速度 + 水速.

这就是说，只要知道了船在静水中的速度，船的实际速度和水速这三个量中的任意两个，就可以求出第三个量.

另外，已知船的逆水速度和顺水速度，根据公式（1）和公式（2），相加和相减就可以得到：

船速＝(顺水速度＋逆水速度)÷2，

水速＝(顺水速度－逆水速度)÷2.

【例 1】 甲、乙两港间的水路长 208 千米，一只船从甲港开往乙港，顺水 8 小时到达，从乙港返回甲港，逆水 13 小时到达，求船在静水中的速度和水流速度.

分析 根据题意，要想求出船速和水速，需要按上面的基本数量关系先求出顺水速度和逆水速度，而顺水速度和逆水速度可按行程问题的一般数量关系，用路程分别除以顺水、逆水所行时间求出.

解：

顺水速度：208÷8＝26（千米/小时）

逆水速度：208÷13＝16（千米/小时）

船速：（26＋16）÷2＝21（千米/小时）

水速：（26－16）÷2＝5（千米/小时）

答： 船在静水中的速度为每小时 21 千米，水流速度每小时 5 千米.

【例 2】 某船在静水中的速度是每小时 15 千米，它从上游甲地开往下游乙地共花去了 8 小时，水速每小时 3 千米，问从乙地返回甲地需要多少时间？

分析 要想求从乙地返回甲地需要多少时间，只要分别求出甲、乙两地之间的路程和逆水速度.

解：

从甲地到乙地，顺水速度：15＋3＝18（千米/小时），

甲乙两地路程：$18\times8=144$（千米），

从乙地到甲地的逆水速度：$15-3=12$（千米/小时），

返回时逆行用的时间：$144\div12=12$（小时）.

答：从乙地返回甲地需要 12 小时.

【例 3】　甲、乙两港相距 360 千米，一轮船往返两港需 35 小时，逆流航行比顺流航行多花了 5 小时．现在有一机帆船，静水中速度是每小时 12 千米，这机帆船往返两港要多少小时？

分析　要求帆船往返两港的时间，就要先求出水速．由题意可以知道，轮船逆流航行与顺流航行的时间和与时间差分别是 35 小时与 5 小时，用和差问题解法可以求出逆流航行和顺流航行的时间．并能进一步求出轮船的逆流速度和顺流速度．在此基础上再用和差问题解法求出水速.

解：

轮船逆流航行的时间：$(35+5)\div2=20$（小时），

顺流航行的时间：$(35-5)\div2=15$（小时），

轮船逆流速度：$360\div20=18$（千米/小时），

顺流速度：$360\div15=24$（千米/小时），

水速：$(24-18)\div2=3$（千米/小时），

帆船的顺流速度：$12+3=15$（千米/小时），

帆船的逆水速度：$12-3=9$（千米/小时），

帆船往返两港所用时间：

$360\div15+360\div9=24+40=64$（小时）.

答：机帆船往返两港要 64 小时.

下面继续研究两只船在河流中相遇问题．当甲、乙两船（甲在上游、乙在下游）在江河里相向开出，它们单位时间靠拢的路程等于甲、乙两船速度和．这是因为：

甲船顺水速度＋乙船逆水速度

＝(甲船速＋水速)＋(乙船速－水速)

＝甲船船速＋乙船船速．

这就是说，两船在水中的相遇问题与静水中的及两车在陆地上的相遇问题一样，与水速没有关系．

同样道理，如果两只船，同向运动，一只船追上另一只船所用的时间，也只与路程差和船速有关，与水速无关．这是因为：

甲船顺水速度－乙船顺水速度

＝(甲船速＋水速)－(乙船速＋水速)

＝甲船速－乙船速．

如果两船逆向追赶时，也有

甲船逆水速度－乙船逆水速度

＝(甲船速－水速)－(乙船速－水速)

＝甲船速－乙船速．

这说明水中追及问题与在静水中追及问题及两车在陆地上追及问题一样．

由上述讨论可知，解流水行船问题，更多地是把它转化为已学过的相遇和追及问题来解答．

【例 4】 小刚和小强租一条小船，向上游划去，不慎把水壶掉进江中，当他们发现并调过船头时，水壶与船已经相距 2 千米，假定小船的速度是每小时 4 千米，水流速度是每小时 2 千米，那么他们追上水壶需要多少时间？

分析　此题是水中追及问题，已知路程差是 2 千米，船在顺水中的速度是船速 + 水速．水壶飘流的速度只等于水速，所以速度差 = 船顺水速度 − 水壶飘流的速度 =（船速 + 水速）− 水速 = 船速．

解：路程差 ÷ 船速 = 追及时间

$2 \div 4 = 0.5$（小时）．

答：他们二人追回水壶需用 0.5 小时．

【例 5】　甲、乙两船在静水中速度分别为每小时 24 千米和每小时 32 千米，两船从某河相距 336 千米的两港同时出发相向而行，几小时相遇？如果同向而行，甲船在前，乙船在后，几小时后乙船追上甲船？

解：① 相遇时用的时间

$336 \div (24 + 32)$

$= 336 \div 56$

$= 6$(小时)．

② 追及用的时间（不论两船同向逆流而上还是顺流而下）：

$336 \div (32 - 24) = 42$(小时)．

答：两船 6 小时相遇；乙船追上甲船需要 42 小时．

习　题　八

1．甲、乙之间的水路是 234 千米，一只船从甲港到乙港需 9 小时，从乙港返回甲港需 13 小时，问船速和水速各为每小时多少千米？

2．一艘每小时行 25 千米的客轮，在大运河中顺水航

行 140 千米，水速是每小时 3 千米，需要行几个小时？

3. 一只小船静水中速度为每小时 30 千米. 在 176 千米长河中逆水而行用了 11 个小时. 求返回原处需用几个小时.

4. 一只船在河里航行，顺流而下每小时行 18 千米. 已知这只船下行 2 小时恰好与上行 3 小时所行的路程相等. 求船速和水速.

5. 两个码头相距 352 千米，一船顺流而下，行完全程需要 11 小时. 逆流而上，行完全程需要 16 小时，求这条河水流速度.

6. A、B 两码头间河流长为 90 千米，甲、乙两船分别从 A、B 码头同时启航. 如果相向而行 3 小时相遇，如果同向而行 15 小时甲船追上乙船，求两船在静水中的速度.

7. 乙船顺水航行 2 小时，行了 120 千米，返回原地用了 4 小时. 甲船顺水航行同一段水路，用了 3 小时. 甲船返回原地比去时多用了几小时？

8. 某河有相距 45 千米的上、下两码头，每天定时有甲、乙两艘船速相同的客轮分别从两码头同时出发相向而行. 一天甲船从上游码头出发时掉下一物，此物浮于水面顺水飘下，4 分钟后，与甲船相距 1 千米. 预计乙船出发后几小时可以与此物相遇？

习题八解答

1. 从甲到乙顺水速度：$234 \div 9 = 26$（千米/小时）.

从乙到甲逆水速度：$234 \div 13 = 18$（千米/小时）.

船速是：$(26 + 18) \div 2 = 22$（千米/小时）.

水速是：$(26 - 18) \div 2 = 4$（千米/小时）.

2. 顺水速度：$25 + 3 = 28$（千米/小时）.

顺水行 140 千米所需时间：$140 \div 28 = 5$（小时）.

3. 水速：$30 - (176 \div 11) = 14$（千米/小时）.

返回原处所需时间：$176 \div (14 + 30) = 4$（小时）.

4. 逆水速度：$18 \times 2 \div 3 = 12$（千米/小时）.

船速：$(18 + 12) \div 2 = 15$（千米/小时）.

水流速度：$(18 - 12) \div 2 = 3$（千米/小时）.

5. $(352 \div 11 - 352 \div 16) \div 2 = 5$（千米/小时）.

6. $90 \div 3 = 30$（千米/小时）.　$90 \div 15 = 6$（千米/小时）.

甲船速度：$(30 + 6) \div 2 = 18$（千米/小时）.

乙船速度：$(30 - 6) \div 2 = 12$（千米/小时）.

7. 乙船顺水速度：$120 \div 2 = 60$（千米/小时）.

乙船逆水速度：$120 \div 4 = 30$（千米/小时）.

水流速度：$(60 - 30) \div 2 = 15$（千米/小时）.

甲船顺水速度：$120 \div 3 = 40$（千米/小时）.

甲船逆水速度：$40 - 2 \times 15 = 10$（千米/小时）.

甲船逆水航行时间：$120 \div 10 = 12$（小时）.

甲船返回原地比去时多用时间：$12 - 3 = 9$（小时）.

8. 船速：$1000 \div 4 = 250$（米/分）.

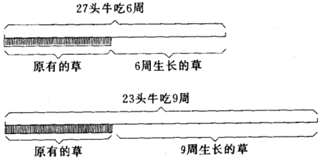
相遇时间：$45000 \div 250 = 180$（分）$= 3$（小时）.

第9讲　“牛吃草”问题

有这样的问题．如：牧场上有一片匀速生长的草地，可供27头牛吃6周，或供23头牛吃9周．那么它可供21头牛吃几周？这类问题称为“牛吃草”问题．

解答这类问题，困难在于草的总量在变，它每天，每周都在均匀地生长，时间愈长，草的总量越多．草的总量是由两部分组成的：①某个时间期限前草场上原有的草量；②这个时间期限后草场每天（周）生长而新增的草量．因此，必须设法找出这两个量来．

下面就用开头的题目为例进行分析．（见下图）



从上面的线段图可以看出23头牛9周的总草量比27头牛6周的总草量多，多出部分相当于3周新生长的草量．为了求出一周新生长的草量，就要进行转化．27头牛6周吃草量相当于$27\times6=162$头牛一周吃草量（或一头牛吃162周）．23头牛9周吃草量相当于$23\times9=207$头牛一周吃草量（或一头牛吃207周）．这样一来可以认

为每周新生长的草量相当于 $(207-162)\div(9-6)=15$ 头牛一周的吃草量.

需要解决的第二个问题是牧场上原有草量是多少？用 27 头牛 6 周的总吃草量减去 6 周新生长的草量（即 $15\times6=90$头牛吃一周的草量）即为牧场原有草量.

所以牧场上原有草量为 $27\times6-15\times6=72$ 头牛一周的吃草量（或者为 $23\times9-15\times9=72$）.

牧场上的草 21 头牛几周才能吃完呢？解决这个问题相当于把 21 头牛分成两部分. 一部分看成专吃牧场上原有的草，另一部分看成专吃新生长的草. 但是新生的草只能维持 15 头牛的吃草量，且始终可保持平衡（前面已分析过每周新生的草恰够 15 头牛吃一周）. 故分出 15 头牛吃新生长的草，另一部分 $21-15=6$（头）牛去吃原有的草. 所以牧场上的草够吃 $72\div6=12$（周），也就是这个牧场上的草够 21 头牛吃 12 周. 问题得解.

【例 2】　一只船发现漏水时，已经进了一些水，水匀速进入船内. 如果 10 人淘水，3 小时淘完；如 5 人淘水 8 小时淘完. 如果要求 2 小时淘完，要安排多少人淘水？

分析与解答　这类问题，都有它共同的特点，即总水量随漏水的延长而增加. 所以总水量是个变量. 而单位时间内漏进船的水的增长量是不变的. 船内原有的水量（即发现船漏水时船内已有的水量）也是不变的量. 对于这个问题我们换一个角度进行分析.

如果设每个人每小时的淘水量为“1 个单位”. 则船内原有水量与 3 小时内漏水总量之和等于每人每小时淘水量 × 时间 × 人数，即 $1\times3\times10=30$.

船内原有水量与 8 小时漏水量之和为 $1\times5\times8=40$.

每小时的漏水量等于 8 小时与 3 小时总水量之差 ÷ 时间差，即 $(40-30)\div(8-3)=2$（即每小时漏进水量为 2 个单位，相当于每小时 2 人的淘水量）.

船内原有的水量等于 10 人 3 小时淘出的总水量 − 3 小时漏进水量. 3 小时漏进水量相当于 $3\times2=6$ 人 1 小时淘水量. 所以船内原有水量为 $30-(2\times3)=24$.

如果这些水（24 个单位）要 2 小时淘完，则需 $24\div2=12$（人），但与此同时，每小时的漏进水量又要安排 2 人淘出，因此共需 $12+2=14$（人）.

从以上这两个例题看出，不管从哪一个角度来分析问题，都必须求出原有的量及单位时间内增加的量，这两个量是不变的量. 有了这两个量，问题就容易解决了.

【例 3】 12 头牛 28 天可以吃完 10 公亩牧场上全部牧草，21 头牛 63 天可以吃完 30 公亩牧场上全部牧草. 多少头牛 126 天可以吃完 72 公亩牧场上全部牧草（每公亩牧场上原有草量相等，且每公亩牧场上每天生长草量相等）？

分析 解题的关键在于求出一公亩一天新生长的草量可供几头牛吃一天，一公亩原有的草量可供几头牛吃一天.

12 头牛 28 天吃完 10 公亩牧场上的牧草. 相当于一公亩原来的牧草加上 28 天新生长的草可供 33.6 头牛吃一天 $(12\times28\div10=33.6)$.

21 头牛 63 天吃完 30 公亩牧场上的牧草，相当于一公亩原有的草加上 63 天新生长的草可供 44.1 头牛吃一天 $(63\times21\div30=44.1)$.

一公亩一天新生长的牧草可供 0.3 头牛吃一天，即

$(44.1-33.6)\div(63-28)=0.3$（头）.

一公亩原有的牧草可供 25.2 头牛吃一天，即

$33.6-0.3\times28=25.2$（头）.

72 公亩原有牧草可供 14.4 头牛吃 126 天．即

$72\times25.2\div126=14.4$（头）.

72 公亩每天新生长的草量可供 21.6 头牛吃一天．即

$72\times0.3=21.6$（头）.

所以 72 公亩牧场上的牧草共可以供 36$(=14.4+21.6)$ 头牛吃 126 天．问题得解．

解：一公亩一天新生长草量可供多少头牛吃一天？

$(63\times21\div30-12\times28\div10)\div(63-28)=0.3$（头）.

一公亩原有牧草可供多少头牛吃一天？

$12\times28\div10-0.3\times28=25.2$（头）.

72 公亩的牧草可供多少头牛吃 126 天？

$72\times25.2\div126+72\times0.3=36$（头）.

答：72 公亩的牧草可供 36 头牛吃 126 天．

【例 4】 一块草地，每天生长的速度相同．现在这片牧草可供 16 头牛吃 20 天，或者供 80 只羊吃 12 天．如果一头牛一天的吃草量等于 4 只羊一天的吃草量，那么 10 头牛与 60 只羊一起吃可以吃多少天？

分析 由于 1 头牛每天的吃草量等于 4 只羊每天的吃草量，故 60 只羊每天的吃草量和 15 头牛每天吃草量相等，80 只羊每天吃草量与 20 头牛每天吃草量相等．

解：60 只羊每天吃草量相当多少头牛每天的吃草量？

$60\div4=15$（头）.

草地原有草量与 20 天新生长草量可供多少头牛吃一天？

$16\times20=320$（头）.

80 只羊 12 天的吃草量供多少头牛吃一天？

$(80\div4)\times12=240$（头）.

每天新生长的草够多少头牛吃一天？

$(320-240)\div(20-12)=10$（头）.

原有草量够多少头牛吃一天？

$320-(20\times10)=120$（头）.

原有草量可供 10 头牛与 60 只羊吃几天？

$120\div(60\div4+10-10)=8$（天）.

答：这块草场可供 10 头牛和 60 只羊吃 8 天.

【例 5】 一水库原有存水量一定，河水每天均匀入库．5 台抽水机连续 20 天可抽干；6 台同样的抽水机连续 15 天可抽干．若要求 6 天抽干，需要多少台同样的抽水机？

解：水库原有的水与 20 天流入水可供多少台抽水机抽 1 天？

$20\times5=100$（台）.

水库原有的水与 15 天流入的水可供多少台抽水机抽 1 天？

$6\times15=90$（台）.

每天流入的水可供多少台抽水机抽 1 天？

$(100-90)\div(20-15)=2$（台）.

原有的水可供多少台抽水机抽 1 天？

$100-20\times2=60$（台）.

若 6 天抽完，共需抽水机多少台？

$60\div6+2=12$（台）.

答：若 6 天抽完，共需 12 台抽水机.

【例 6】 有三片草场，每亩原有草量相同，草的生

长速度也相同．三片草场的面积分别为 $3\frac{1}{3}$ 亩、10 亩和 24 亩．第一片草场可供 12 头牛吃 4 周．第二片草场可供 21 头牛吃 9 周，问：第三片草场可供多少头牛吃 18 周？

分析与解答 可用方程解．

解：设每亩草场原有的草量为 a，每周每亩草场新生长草量为 b．依题意

第一片草场（$3\frac{1}{3}$亩）原有的草与 4 周新生长的草量之和为：

$$\left(3\frac{1}{3}\right)a+\left(4\times3\frac{1}{3}\right)b.$$

每头牛每周的吃草量为（第一片草场 $3\frac{1}{3}$亩）：

$$\frac{\left(3\frac{1}{3}\right)a+4\times\left(3\frac{1}{3}\right)\times b}{12\times4}=\frac{10(a+4b)}{3\times12\times4}=\frac{5(a+4b)}{72}\quad(1)$$

第二片草地（10 亩）原有的草与 9 周生长出来的草为：

$$10a+(10\times9)b.$$

每头牛每周的吃草量为：（第二片草场）

$$\frac{10a+(10\times9)b}{21\times9}\qquad(2)$$

由于每头牛每周吃草量相等，列方程为：

$$\frac{10a+(10\times9)b}{21\times9}=\frac{5(a+4b)}{72},\qquad(3)$$

$$5a=60b,$$

$a=12b$（表示 1 亩草场上原有草量是每周新生长的草量的 12 倍）．

将 $a=12b$ 代入(3)的两边得到每头牛每周吃草量为$\frac{10}{9}b$．

设第三片草场（24 亩）可供 x 头牛 18 周吃完，则由每头牛每周吃草量可列出方程为：

$$\frac{24a+b\times(18\times24)}{18x}=\frac{10b}{9}, \qquad (4)$$

$$x=36$$

答：第三片草场可供 36 头牛 18 周食用．

这道题列方程时引入 a、b 两个辅助未知数．在解方程时不一定要求出其数值，在本题中只需求出它们的比例关系即可．

习　题　九

1．一块牧场长满草，每天牧草都均匀生长．这片牧场可供 10 头牛吃 20 天，可供 15 头牛吃 10 天．问：可供 25 头牛吃多少天？

2．22 头牛吃 33 亩草地上的草，54 天可以吃完．17 头牛吃 28 亩同样的草地上的草，84 天可以吃完．问：同样的牧草 40 亩可供多少头牛食用 24 天（每亩草地原有草量相等，草生长速度相等）？

3．有一牧场，17 头牛 30 天可将草吃完．19 头牛则 24 天可以吃完．现有若干头牛吃了 6 天后，卖掉了 4 头牛，余下的牛再吃两天便将草吃完．问：原来有多少头牛吃草（草均匀生长）？

4．现欲将一池塘水全部抽干，但同时有水匀速流入池塘．若用 8 台抽水机 10 天可以抽干；用 6 台抽水机 20 天能抽干．问：若要 5 天抽干水，需多少台同样的抽水机来抽水？

习题九解答

1．列综合算式：

$[10\times20-(10\times20-15\times10)\div(20-10)\times20]\div(25-5)=5$（天）．（算式等号左边 $(25-5)$ 中的“5”即为 $(10\times20-15\times10)\div(20-10)$）

答：可供 25 头牛吃 5 天．

2．一亩一天新生长草量可供多少头牛吃一天？

$(17\times84\div28-22\times54\div33)\div(84-54)=0.5$（头）．

40 亩草地原有草量可供多少头牛吃一天？

$40\times(17\times84-84\times0.5\times28)\div28=360$（头）．

40 亩牧草需多少头牛 24 天吃完？

$0.5\times40+360\div24=35$（头）．

答：40 亩草地需 35 头牛 24 天吃完．

3．牧场新生长草量为：

$(17\times30-19\times24)\div(30-24)=9$（头牛一天吃草量）．

牧场原有草量为：$(17-9)\times30=240$（头牛一天吃草量）．

牛的头数：$(240+8\times9+1\times2\times4)\div8=40$（头）．

答：原有 40 头牛吃草．

4．$(6\times20-8\times10)\div(20-10)+(6\times20-4\times20)\div5=12$（台）．

（算式左边 4×20 中的“4”即为 $(6\times20-8\times10)\div(20-10)$）

答：要 5 天抽完需 12 台抽水机同时工作．

第10讲 列方程解应用题

列方程解应用题是用字母来代替未知数，根据等量关系列出含有未知数的等式，也就是列出方程，然后解出未知数的值．列方程解应用题的优点在于可以使未知数直接参加运算．解这类应用题的关键在于能够正确地设立未知数，找出等量关系从而建立方程．而找出等量关系又在于熟练运用数量之间的各种已知条件．掌握了这两点就能正确地列出方程．

列方程解应用题的一般步骤是：

① 弄清题意，找出已知条件和所求问题；

② 依题意确定等量关系，设未知数 x；

③ 根据等量关系列出方程；

④ 解方程；

⑤ 检验，写出答案．

【例 1】 列方程，并求出方程的解．

① $\frac{11}{3}$减去一个数，所得差与 1.35 加上$\frac{13}{6}$的和相等，求这个数．

解：设这个数为 x．则依题意有

$$\frac{11}{3}-x=1.35+\frac{13}{6},$$

即

$$\frac{11}{3}-x=\frac{27}{20}+\frac{13}{6}$$

$$x=\frac{11}{3}-\frac{27}{20}-\frac{13}{6},$$

$x=\frac{3}{20}$.

检验：把 $x=\frac{3}{20}$代入原方程，左边 $=3\frac{2}{3}-\frac{3}{20}=3\frac{31}{60}$，与右边相等．所以 $x=\frac{3}{20}$是原方程的解．

② 某数的$\frac{1}{2}$比它的$\frac{21}{8}$倍少 11，求某数．

解：设某数为 x．依题意，有：

$$\frac{21}{8}x-\frac{1}{2}x=11,$$

即
$$\frac{17}{8}x=11,$$

$$x=\frac{88}{17}.$$

【例 2】 已知篮球、足球、排球平均每个 36 元．篮球比排球每个多 10 元，足球比排球每个多 8 元，每个足球多少元？

分析 ① 篮球、足球、排球平均每个 36 元，购买三种球的总价是：$36\times3=108$（元）．

② 篮球和足球都与排球比，所以把排球的单价作为标准量，设为 x．

③ 列方程时，等量关系可以确定为分类购球的总价 = 平均值导出的总价．

解：设每个排球 x 元，则每个篮球 $(x+10)$ 元，每个足球 $(x+8)$ 元．依题意，有：

$$x+x+10+x+8=36\times3,$$

$$3x+18=108,$$

$$3x=90,$$

$$x=30.$$

$x+8=30+8=38.$

答：每个足球 38 元.

【例 3】 妈妈买回一筐苹果，按计划天数，如果每天吃 4 个，则多出 48 个苹果，如果每天吃 6 个，则又少 8 个苹果．问：妈妈买回苹果多少个？计划吃多少天？

分析 1　根据已知条件分析出，每天吃苹果的个数及吃若干天后剩下苹果的个数是变量，而苹果的总个数是不变量．因此列出方程的等量关系是苹果总个数 = 苹果总个数．方程左边，第一种方案下每天吃的个数 × 天数 + 剩下的个数，等于右边，第二种方案下每天吃的个数 × 天数 − 所差的个数.

解：设原计划吃 x 天.

$$4x+48=6x-8$$
$$2x=56$$
$$x=28.$$

苹果个数：$4\times28+48=160$（个），

或：$6\times28-8=160$（个）.

答：妈妈买回苹果 160 个，原计划吃 28 天.

分析 2　列方程解等量关系确定为计划吃的天数 = 计划吃的天数.

解：设妈妈共买回苹果 x 个.

$$\frac{x-48}{4}=\frac{x+8}{6}$$
$$4x+32=6x-288$$
$$2x=320$$
$$x=160.$$

$(160-48)\div4=28$（天）．或

$(160+8)\div 6=28$（天）.

答：妈妈买回 160 个苹果，原计划吃 28 天.

【例 4】　甲、乙、丙、丁四人共做零件 270 个. 如果甲多做 10 个，乙少做 10 个，丙做的个数乘以 2，丁做的个数除以 2，那么四人做的零件数恰好相等. 问：丙实际做了多少个？（这是设间接未知数的例题）

分析　根据"那么四个人做的零件数恰好相等"，把这个零件相等的数设为 x，从而得出：

甲 $+10=$ 乙 $-10=$ 丙 $\times 2=$ 丁 $\div 2=x$.

根据这个等式又可以推出：甲 $+10=x$，（甲 $=x-10$）；

乙 $-10=x$，（乙 $=x+10$）；

丙 $\times 2=x$，（丙 $=\frac{x}{2}$）；

丁 $\div 2=x$，（丁 $=2x$）.

又根据甲、乙、丙、丁四人共做零件 270 个，可以得到一个方程，它的左边表示零件的总个数，右边也表示零件的总个数.

解：设变换后每人做的零件数为 x 个.

$$x-10+x+10+2x+\frac{x}{2}=270$$

$$2x+2x+x+4x=540$$

$$9x=540$$

$$x=60.$$

$\because$　丙 $\times 2=60$，　　$\therefore$　丙 $=30$.

答：丙实际做零件 30 个.

【例 5】　某图书馆原有科技书，文艺书共 630 本，其中科技书占 20%. 后来又买进一些科技书，这时科技

书占总书数的 30%．买进科技书多少本？

分析 依题意，文艺书的本数没有变．如果设买进科技书 x 本，那么，原来的本数 + x 本 = 增加后的总本数．文艺书占增加后总本数的 70%，相当于原有书总数的 80%，所以，增加后总本数 × 70% = 原来总本数 × 80%，即原先的文艺书本数 = 后来的文艺书本数．

解：设买进科技书 x 本．

$$(630+x)\times(1-30\%)=630\times(1-20\%)$$

$$441+70\%x=504$$

$$70\%x=63$$

$$x=90.$$

答：买进科技书 90 本．

【例 6】 一块长方形的地，长和宽的比是 5:3，长比宽多 24 米，这块地的面积是多少平方米？

分析 要想求这块地的面积，必须先求出长和宽各是多少米．已知条件中给出长和宽的比是 5:3，又知道长比宽多 24 米．如果把宽设为 x 米，则长为 $(x+24)$ 米，这样确定方程左边表示长与宽的比等于右边长与宽的比，再列出方程．

解：设长方形的宽是 x 米，长是 $(x+24)$ 米．

$$\frac{x+24}{x}=\frac{5}{3}$$

$$5x=3x+72$$

$$2x=72$$

$$x=36.$$

$x+24=36+24=60$，　　$60\times36=2160$（平方米）．

答：这块地的面积是 2160 平方米．

【例 7】 某县农机厂金工车间有 77 个工人. 已知每个工人平均每天可以加工甲种零件 5 个或乙种零件 4 个,或丙种零件 3 个。但加工 3 个甲种零件,1 个乙种零件和 9 个丙种零件才恰好配成一套. 问:应安排生产甲、乙、丙种零件各多少人时,才能使生产的三种零件恰好配套?

分析 如果直接设生产甲、乙、丙三种零件的人数分别为 x 人、y 人、z 人,根据共有 77 人的条件可以列出方程 $x+y+z=77$,但解起来比较麻烦.

如果仔细分析题意,会发现除了上面提到的加工甲、乙、丙三种零件的人数这三个未知数外,还有甲、乙、丙三种零件的各自的总件数. 而题目中又有关于甲、乙、丙三种零件之间装配时的内在联系,这个内在联系可以用比例关系表示,而乙种零件件数又在中间起媒介作用. 所以如用间接未知数,设乙种零件总数为 x 个,为了配套,甲种、丙种零件件数总数分别为 $3x$ 个和 $9x$ 个,再根据生产某种零件人数=生产这种零件的个数÷工人劳动效率,可以分别求出生产甲、乙、丙种零件需安排的人数,从而找出等量关系,即按均衡生产推算的总人数=总人数,列出方程.

解:设加工乙种零件 x 个,则加工甲种零件 $3x$ 个,加工丙种零件 $9x$ 个.

加工乙种零件需安排 $\frac{x}{4}$ 人,加工甲种零件需安排 $\frac{3x}{5}$ 人,加工丙种零件需安排 $\frac{9x}{3}$ 人.

$$\frac{3}{5}x+\frac{x}{4}+\frac{9x}{3}=77$$

$$12x+5x+60x=1540$$

$$77x=1540,$$

$$x=20.$$

$$\frac{3x}{5}=\frac{3}{5}\times 20=12,$$

$$\frac{x}{4}=\frac{1}{4}\times 20=5,$$

$$\frac{9x}{3}=3\times 20=60.$$

答：应安排加工甲、乙、丙三种零件工人人数分别为 12 人、5 人和 60 人.

习 题 十

1. 妈妈带一些钱去买布. 买 2 米布后还剩下 1.80 元；如果买同样的布 4 米则差 2.40 元. 问：妈妈带了多少钱？

2. 第一车间工人人数是第二车间工人人数的 3 倍. 如果从第一车间调 20 名工人去第二车间，则两个车间人数相等. 求原来两个车间各有工人多少名？

3. 两个水池共贮水 40 吨，甲池注进 4 吨，乙池放出 8 吨，甲池水的吨数与乙池水的吨数相等，两个水池原来各贮水多少吨？

4. 两堆煤，甲堆煤有 4.5 吨，乙堆煤有 6 吨，甲堆煤每天用去 0.36 吨，乙堆煤每天用去 0.51 吨. 几天后两堆煤剩下吨数相等？

5. 小龙、小虎、小方和小圆四个孩子共有 45 个球，但不知道每个人各有几个球，如果变动一下，小龙的球减少 2 个，小虎的球增加 2 个，小方的球增加一倍，小圆的球减少一半，那么四个人球的个数就一样多了. 求

原来每个人各有几个球？

6．有一批旅游者需用轿车接送．轿车有甲、乙两种，用 3 辆甲种轿车，4 辆乙种轿车（恰满载）需跑 5 趟；如果用 5 辆甲种轿车和 3 辆乙种轿车（恰满载）只需跑 4 趟．请问哪种轿车坐的乘客多？

习题十解答

1．思路 1：

解：设每米布 x 元．　则 $2x+1.80=4x-2.40$，解出 $x=2.10$．

$2.10\times2+1.80=6$（元）

答：妈妈带了 6 元钱．

思路 2：

解：设妈妈共带 y 元．　则 $\frac{y-1.80}{2}=\frac{y+2.40}{4}$，

解出 $y=6$

答：妈妈带了 6 元钱．

2．解：设第二车间原有 x 人，则第一车间原有 $3x$ 人．

$3x-20=x+20$，

$x=20$．

$3x=20\times3=60$，

答：第一车间原有 60 人，第二车间原有 20 人．

3．提示：根据甲池注进 4 吨，乙池放出 8 吨，甲池水的吨数与乙池水的吨数相等，得出甲 + 4 = 乙 − 8，所以甲池水 = 乙池水 − 12．

解：设乙池水原有 x 吨，则甲池水原有（$x-12$）吨．

$x+x-12=40$，

$x=26$，

$x-12=26-12=14$.

答：甲池水原有 14 吨，乙池水原有 26 吨.

4. 解：设 x 天后两堆煤剩下的相等.

$4.5-0.36x=6-0.51x$，

$x=10$.

答：10 天后两堆煤剩下吨数相等.

5. 提示：依题意得出小龙的球的个数 $-2=$ 小虎的球的个数 $+2=$ 小方的球的个数 $\times 2=$ 小圆的球的个数 $\div 2=x$

解：设四个人的球数在变动后的个数为 x.

$$x+2+x-2+\frac{x}{2}+2x=45,$$

$$x=10.$$

小龙：$x+2=10+2=12$，

小虎：$x-2=10-2=8$，

小方：$x\div 2=10\div 2=5$，

小圆：$2x=10\times 2=20$.

答：小龙、小虎、小方、小圆原有球的个数依次为 12 个、8 个、5 个和 20 个.

6. 解：设甲种轿车每辆乘坐 x 人，乙种轿车每辆乘坐 y 人.

$5(3x+4y)=4(5x+3y)$，

$5x=8y$，

$x=\frac{8}{5}y$.

这说明甲种轿车每辆乘坐的人数是乙种轿车的 $1\frac{3}{5}$ 倍，所以甲种轿车乘坐的乘客多.

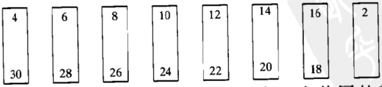
质，如果两个整数 a、b，它们除以自然数 m 的余数相同，那么它们的差 $a-b$ 是 m 的倍数. 根据这个性质，本题只需证明这 8 个自然数中有 2 个自然数，它们除以 7 的余数相同. 我们可以把所有自然数按被 7 除所得的 7 种不同的余数 0、1、2、3、4、5、6 分成七类. 也就是 7 个抽屉. 任取 8 个自然数，根据抽屉原理，必有两个数在同一个抽屉中，也就是它们除以 7 的余数相同，因此这两个数的差一定是 7 的倍数.

把所有整数按照除以某个自然数 m 的余数分为 m 类，叫做 m 的剩余类或同余类，用〔0〕，〔1〕，〔2〕，…，〔$m-1$〕表示. 每一个类含有无穷多个数，例如〔1〕中含有 1，$m+1$，$2m+1$，$3m+1$，…. 在研究与整除有关的问题时，常用剩余类作为抽屉. 根据抽屉原理，可以证明：任意 $n+1$ 个自然数中，总有两个自然数的差是 n 的倍数.

在有些问题中，“抽屉”和“苹果”不是很明显的，需要精心制造“抽屉”和“苹果”. 如何制造“抽屉”和“苹果”可能是很困难的，一方面需要认真地分析题目中的条件和问题，另一方面需要多做一些题积累经验.

【例 4】　从 2、4、6、…、30 这 15 个偶数中，任取 9 个数，证明其中一定有两个数之和是 34.

分析与解答　我们用题目中的 15 个偶数制造 8 个抽屉：



凡是抽屉中有两个数的，都具有一个共同的特点：

12 个“抽屉”）.

应用抽屉原理要注意识别“抽屉”和“苹果”，苹果的数目一定要大于抽屉的个数.

【例 1】 有 5 个小朋友，每人都从装有许多黑白围棋子的布袋中任意摸出 3 枚棋子. 请你证明，这 5 个人中至少有两个小朋友摸出的棋子的颜色的配组是一样的.

分析与解答 首先要确定 3 枚棋子的颜色可以有多少种不同的情况，可以有：3 黑，2 黑 1 白，1 黑 2 白，3 白共 4 种配组情况，看作 4 个抽屉. 把每人的 3 枚棋作为一组当作一个苹果，因此共有 5 个苹果. 把每人所拿 3 枚棋子按其颜色配组情况放入相应的抽屉. 由于有 5 个苹果，比抽屉个数多，所以根据抽屉原理，至少有两个苹果在同一个抽屉里，也就是他们所拿棋子的颜色配组是一样的.

【例 2】 一副扑克牌（去掉两张王牌），每人随意摸两张牌，至少有多少人才能保证他们当中一定有两人所摸两张牌的花色情况是相同的?

分析与解答 扑克牌中有方块、梅花、黑桃、红桃 4 种花色，2 张牌的花色可以有：2 张方块，2 张梅花，2 张红桃，2 张黑桃，1 张方块 1 张梅花，1 张方块 1 张黑桃，1 张方块 1 张红桃，1 张梅花 1 张黑桃，1 张梅花 1 张红桃，1 张黑桃 1 张红桃共计 10 种情况. 把这 10 种花色配组看作 10 个抽屉，只要苹果的个数比抽屉的个数多 1 个就可以有题目所要的结果. 所以至少有 11 个人.

【例 3】 证明：任取 8 个自然数，必有两个数的差是 7 的倍数.

分析与解答 在与整除有关的问题中有这样的性

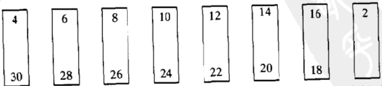
质，如果两个整数 a、b，它们除以自然数 m 的余数相同，那么它们的差 $a-b$ 是 m 的倍数．根据这个性质，本题只需证明这 8 个自然数中有 2 个自然数，它们除以 7 的余数相同．我们可以把所有自然数按被 7 除所得的 7 种不同的余数 0、1、2、3、4、5、6 分成七类．也就是 7 个抽屉．任取 8 个自然数，根据抽屉原理，必有两个数在同一个抽屉中，也就是它们除以 7 的余数相同，因此这两个数的差一定是 7 的倍数．

把所有整数按照除以某个自然数 m 的余数分为 m 类，叫做 m 的剩余类或同余类，用〔0〕，〔1〕，〔2〕，…，〔$m-1$〕表示．每一个类含有无穷多个数，例如〔1〕中含有 1，$m+1$，$2m+1$，$3m+1$，…．在研究与整除有关的问题时，常用剩余类作为抽屉．根据抽屉原理，可以证明：任意 $n+1$ 个自然数中，总有两个自然数的差是 n 的倍数．

在有些问题中，“抽屉”和“苹果”不是很明显的，需要精心制造“抽屉”和“苹果”．如何制造“抽屉”和“苹果”可能是很困难的，一方面需要认真地分析题目中的条件和问题，另一方面需要多做一些题积累经验．

【例 4】　从 2、4、6、…、30 这 15 个偶数中，任取 9 个数，证明其中一定有两个数之和是 34．

分析与解答　我们用题目中的 15 个偶数制造 8 个抽屉：



凡是抽屉中有两个数的，都具有一个共同的特点：

这两个数的和是 34.

现从题目中的 15 个偶数中任取 9 个数，由抽屉原理（因为抽屉只有 8 个），必有两个数在同一个抽屉中．由制造的抽屉的特点，这两个数的和是 34.

【例 5】 从 1、2、3、4、…、19、20 这 20 个自然数中，至少任选几个数，就可以保证其中一定包括两个数，它们的差是 12.

分析与解答 在这 20 个自然数中，差是 12 的有以下 8 对：

{20，8}，{19，7}，{18，6}，{17，5}，{16，4}，{15，3}，{14，2}，{13，1}.

另外还有 4 个不能配对的数 {9}， {10}， {11}，{12}，共制成 12 个抽屉（每个括号看成一个抽屉）．只要有两个数取自同一个抽屉，那么它们的差就等于 12，根据抽屉原理至少任选 13 个数，即可办到（取 12 个数：从 12 个抽屉中各取一个数（例如取 1，2，3，…，12），那么这 12 个数中任意两个数的差必不等于 12）.

【例 6】 从 1 到 20 这 20 个数中，任取 11 个数，必有两个数，其中一个数是另一个数的倍数.

分析与解答 根据题目所要求证的问题，应考虑按照同一抽屉中，任意两数都具有倍数关系的原则制造抽屉．把这 20 个数按奇数及其倍数分成以下十组，看成 10 个抽屉（显然，它们具有上述性质）：

{1，2，4，8，16}， {3，6，12}， {5，10，20}，{7，14}，{9，18}，{11}，{13}，{15}，{17}，{19}.

从这 10 个数组的 20 个数中任取 11 个数，根据抽屉原理，至少有两个数取自同一个抽屉．由于凡在同一抽

屉中的两个数都具有倍数关系，所以这两个数中，其中一个数一定是另一个数的倍数.

【例 7】　证明：在任取的 5 个自然数中，必有 3 个数，它们的和是 3 的倍数.

分析与解答　按照被 3 除所得的余数，把全体自然数分成 3 个剩余类，即构成 3 个抽屉. 如果任选的 5 个自然数中，至少有 3 个数在同一个抽屉，那么这 3 个数除以 3 得到相同的余数 r，所以它们的和一定是 3 的倍数（$3r$ 被 3 整除）.

如果每个抽屉至多有 2 个选定的数，那么 5 个数在 3 个抽屉中的分配必为 1 个，2 个，2 个，即 3 个抽屉中都有选定的数. 在每个抽屉中各取 1 个数，那么这 3 个数除以 3 得到的余数分别为 0、1、2. 因此，它们的和也一定能被 3 整除（$0+1+2$ 被 3 整除）.

【例 8】　某校校庆，来了 n 位校友，彼此认识的握手问候. 请你证明无论什么情况，在这 n 个校友中至少有两人握手的次数一样多.

分析与解答　共有 n 位校友，每个人握手的次数最少是 0 次，即这个人与其他校友都没有握过手；最多有 $n-1$ 次，即这个人与每位到会校友都握了手. 校友人数与握手次数的不同情况（0，1，2，…，$n-1$）数都是 n，还无法用抽屉原理.

然而，如果有一个校友握手的次数是 0 次，那么握手次数最多的不能多于 $n-2$ 次；如果有一个校友握手的次数是 $n-1$ 次，那么握手次数最少的不能少于 1 次. 不管是前一种状态 0、1、2、…、$n-2$，还是后一种状态 1、2、3、…、$n-1$，握手次数都只有 $n-1$ 种情况. 把

这 $n-1$ 种情况看成 $n-1$ 个抽屉，到会的 n 个校友每人按照其握手的次数归入相应的“抽屉”，根据抽屉原理，至少有两个人属于同一抽屉，则这两个人握手的次数一样多.

习题十一

1. 某校的小学生年龄最小的 6 岁，最大的 13 岁，从这个学校中任选几位同学就一定保证其中有两位同学的年龄相同？

2. 中午食堂有 5 种不同的菜和 4 种不同的主食，每人只能买一种菜和一种主食，请你证明某班在食堂买饭的 21 名学生中，一定至少有两名学生所买的菜和主食是一样的.

3. 证明：任取 6 个自然数，必有两个数的差是 5 的倍数.

4. 为了欢迎外宾来校参观，学校准备了红色、黄色、绿色的小旗，每个同学都左右两手各拿一面彩旗列队迎接外宾. 至少有多少位同学才能保证其中至少有两个人不但所拿小旗颜色一样，而且（左、右）顺序也相同？

5. 从 10 至 20 这 11 个自然数中，任取 7 个数，证明其中一定有两个数之和是 29.

6. 从 1、2、3、…、20 这 20 个数中，任选 12 个数，证明其中一定包括两个数，它们的差是 11.

7. 20 名小围棋手进行单循环比赛（即每个人都要和其他任何人比赛一次），证明：在比赛中的任何时候统计每人已经赛过的场次都至少有两位小棋手比赛过相同的

场次.

8. 从整数 1、2、3、…、199、200 中任选 101 个数，求证在选出的这些自然数中至少有两个数，其中的一个是另一个的倍数.

习题十一解答

1. 从 6 岁到 13 岁共有 8 种不同的年龄，根据抽屉原理，任选 9 名同学就一定保证其中有两位同学的年龄相同.

2. 共有 $4\times5=20$（种）不同的买饭菜的方式，看作 20 个抽屉，21 名同学按照买饭菜的方式进入相应的抽屉，根据抽屉原理，至少有两人属于同一抽屉，即他们所买的菜和主食是一样的.

3. 把自然数按照除以 5 的余数分成 5 个剩余类，即 5 个抽屉. 任取 6 个自然数，根据抽屉原理，至少有两个数属于同一剩余类，即这两个数除以 5 的余数相同，因此它们的差是 5 的倍数.

4. 持两面彩旗的方式共有以下 9 种：
红红、黄黄、绿绿、红黄、黄红、红绿、绿红、黄绿、绿黄. 把这 9 种持旗方式看作 9 个抽屉，根据抽屉原理可得出，至少要有 10 个同学，才能保证他们当中至少有两人不但拿小旗的颜色一样而且顺序相同.

5. 将这 11 个自然数分成下列 6 组：
$\{10, 19\}$，$\{11, 18\}$，$\{12, 17\}$，$\{13, 16\}$，$\{14, 15\}$，$\{20\}$，从中任取 7 个数，根据抽屉原理，一定有两个数取自同一数组，则这两个数的和是 29.

6．把这 20 个数分成下列 11 个组．

{1，12}，{2，13}，{3，14}，… {9，20}，{10}，{11}．

其中前 9 组中的两数差为 11．任取 12 个数，其中必有两个数取自同一数组，则它们的差是 11．

7．如果有一个人赛过 0 次（即他还未与任何人赛过），那么最多的只能赛过 18 次；如果有人赛过 19 次（即他已与每个人都赛过了），那么最少的只能赛过 1 次．无论怎样，都只有 19 种情况，根据抽屉原理，20 名棋手一定有两人赛过的场次相同．

8．把这 200 个数分类如下：

① 1，　1×2，　1×2^2，　1×2^3，　…，　1×2^7，

② 3，　3×2，　3×2^2，　3×2^3，　…，　3×2^6，

③ 5，　5×2，　5×2^2，　5×2^3，　…，　5×2^5，

…

㊿ 99，99×2，

(51) 101，

(52) 103，

…

(100) 199，

以上共分为 100 类，即 100 个抽屉，显然在同一类中的数若不少于两个，那么这类中的任意两个数都有倍数关系．从中任取 101 个数，根据抽屉原理，一定至少有两个数取自同一类，因此其中一个数是另一个数的倍数．

第12讲　抽屉原理的一般表述

我们知道，把 3 个苹果随意放进两个抽屉里，至少有一个抽屉里有两上或两个以上的苹果. 如果把 5 个苹果放进两个抽屉里，上述结果当然还能成立. 能不能有更强一点的结果呢？我们发现把 5 个苹果往两个抽屉里放，即使每个抽屉都放 2 个还剩 1 个苹果，这个苹果无论放到哪个抽屉里都会出现有一个抽屉里有 3 个苹果. 同样，如果苹果个数变为 7 个，那么就可以保证有一个抽屉里至少有 4 个苹果了.

这里有什么规律呢？

	苹果总数		抽屉个数	商	余数
①	3 个	÷	2	=1 个…1 个	
②	5 个	÷	2	=2 个…1 个	
③	7 个	÷	2	=3 个…1 个	

先将苹果平均分到各个抽屉里，如果至少还余 1 个苹果，那么多余的苹果无论再放人哪个抽屉中都可以保证至少有一个抽屉里有（商 + 1）个（或更多的）苹果.

这样，可得到下述加强的抽屉原理：

把多于 $m \times n$ 个苹果随意放进 n 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里有 $(m+1)$ 个或 $(m+1)$ 个以上的苹果.

【例 1】　①求证：任意 25 个人中，至少有 3 个人的属相相同. ②要想保证至少有 5 个人的属相相同，但不能

保证有 6 个人属相相同，那么人的总数应在什么范围内？

分析与解答 ① 把 12 种属相看作 12 个抽屉.

因为 $25\div12=2\cdots1$,

所以，根据抽屉原理，至少有 3 个人的属相相同.

② 要保证有 5 个人的属相相同，总人数最少为：

$4\times12+1=49$（人）.

不能保证有 6 个人属相相同的最多人数为：

$5\times12=60$（人）.

所以，总人数应在 49 人到 60 人的范围内.

【例 2】 放体育用品的仓库里有许多足球、排球和篮球. 有 66 名同学来仓库拿球，要求每人至少拿 1 个球，至多拿 2 个球. 问：至少有多少名同学所拿的球种类是完全一样的？

分析与解答 拿球的配组方式有以下 9 种：

{足}，{排}，{篮}，{足，足}，{排，排}，{篮，篮}，{足，排}，{足，篮}，{排，篮}.

把这 9 种配组方式看作 9 个抽屉.

因为 $66\div9=7\cdots3$,

所以至少有 $7+1=8$（名）同学所拿的球的种类是完全一样的.

【例 3】 一副扑克牌，共 54 张，问：至少从中摸出多少张牌才能保证①至少有 5 张牌的花色相同；②四种花色的牌都有；③至少有 3 张牌是红桃.

分析与解答 一副扑克牌有四种花色，每种花色各 13 张，另外还有两张王牌.

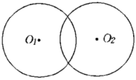
① 为了“保证”5 张牌花色相同，我们应从最“坏”的情况去分析，即先摸出了两张王牌. 把四种花色看作 4 个

抽屉，要想有 5 张牌属于同一抽屉，只需再摸出 $4\times4+1=17$（张），也就是共摸出 19 张牌．即至少摸出 19 张牌，才能保证其中有 5 张牌的花色相同．

② 因为每种花色有 13 张牌．若考虑最“坏”的情况，即摸出了 2 张王牌和三种花色的所有牌共计 $13\times3+2=41$（张），这时，只需再摸一张即一共 42 张牌，就保证四种花色的牌都有了．即至少摸出 42 张牌才能保证四种花色的牌都有。

③ 最坏的情形是先摸出了 2 张王牌和方块、黑桃、梅花三种花色所有牌共计 41 张，只剩红桃牌．这时只需再摸 3 张，就保证有 3 张牌是红桃了．即至少摸出 44 张牌，才能保证其中至少有 3 张红桃牌．

【例 4】 平面上给定 17 个点，如果任意三个点中总有两个点之间的距离小于 1，证明：在这 17 个点中必有 9 个点可以落在同一半径为 1 的圆内．

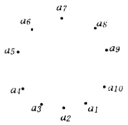


分析与解答 如果 17 个点中，任意两点之间的距离都小于 1，那么，以这 17 个点中任意一点为圆心，以 1 为半径作一个圆，这 17 个点必然全落在这个圆内．如果这 17 个点中，有两点之间距离不小于 1（即大于 1 或等于 1），设这两点为 O_1、O_2，分别以 O_1、O_2 为圆心，1 为半径作两个圆（如图）．把这两个圆看作两个抽屉，由于任意三点中总有两个点之间的距离小于 1，因此其他 15 个点中的每一点，到 O_1、O_2 的距离必有一个小于 1．也就是说这些点必落在某一个圆中．根据抽屉原理必有一个圆至少包含这 15 个点中的 8 个点．由于圆心是 17 个点中的一点，因此这个圆至少包含 17 个

点中的 9 个点.

【例 5】 把 1、2、3、…、10 这十个数按任意顺序排成一圈，求证在这一圈数中一定有相邻的三个数之和不小于 17.

分析与解答 把这一圈从某一个数开始按顺时针方向分别记为 a_1、a_2、a_3、…、a_{10}（见图）. 相邻的三个数为一组，有 $a_1a_2a_3$、$a_2a_3a_4$、$a_3a_4a_5$、…、$a_9a_{10}a_1$、$a_{10}a_1a_2$ 共 10 组.



这十组数的和的总和为

$$(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_3+a_4)+\cdots+(a_{10}+a_1+a_2)$$
$$=3(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$$
$$=3\times55=165=16\times10+5.$$

根据抽屉原理这十组数中至少有一组数的和不小于 17.

这道题还可以用下面的方法证明：

在 10 个数中一定有一个数是 1，设 $a_{10}=1$，除去 a_{10} 之外，把 a_1、a_2、…、a_9 这 9 个数按顺序分为三组 $a_1a_2a_3$、$a_4a_5a_6$、$a_7a_8a_9$. 下面证明这三组中至少有一组数之和不小于 17.

因为这三组数之和的总和为

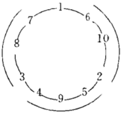
$$(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)$$
$$=a_1+a_2+\cdots+a_9$$
$$=2+3+\cdots+10$$
$$=54=3\times16+6.$$

根据抽屉原理这三组数中至少有一组数之和不小于 17.

第二种证法中去掉了最小数 1，其实若去掉 2、3、4 也可以的，因为 $54=3\times17+3$，所以用第二种证法还可

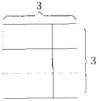
以得出至少有一组数的和不小于 18 的结论，而第一种证法却不能得出这个结论.

此外，由于 $54=3\times18$，因此即使第二种证法也不能由抽屉原理得出三组数中至少有一组数的和不小于 19 的结论. 事实上，如右图中所示，划了线的三组数的和都是 18（并且其他任何三个相邻数之和都小于 18）.



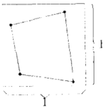
【例 6】　在边长为 3 米的正方形内，任意放入 28 个点，求证：必有 4 个点，以它们为顶点的四边形的面积不超过 1 平方米.

分析与解答　根据题目的结论，考虑把这个大正方形分割成面积为 1 平方米的 9 个小正方形（如右图）.



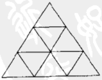
因为 $28=3\times9+1$，

所以根据抽屉原理，至少有 4 个点落在同一个边长为 1 米的小正方形内（或边上）(图)，这 4 个点所连成的四边形的面积总小于或等于小正方形的面积，即以这 4 个点为顶点的四边形的面积不超过 1 平方米.



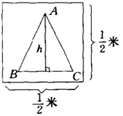
【例 7】　在边长为 1 米的正方形内，任意放入 9 个点. 求证：至少有 3 个点，以这三个点为顶点的三角形面积不大于 $\frac{1}{8}$ 平方米.

分析与解答　把边长为 1 米的正方形取各边的中点，把对边中点相连将它分成四个边长为 $\frac{1}{2}$ 米的小正方形（如右图）.

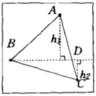


把这四个小正方形看成 4 个抽屉，把 9 个点随意放入 4 个抽屉. 根据抽屉原理，有一个抽屉中至少有 3 个点.

现在证明以在边长为$\frac{1}{2}$米的小正方形内的这三个点为顶点的三角形的面积不大于小正方形面积的一半. 设 A、B、C 三点在同一个小正方形内. 如果△ABC 中的某一条边 BC 与小正方形的边平行（如图），则



$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times h\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$米$\times\frac{1}{2}$米$=\frac{1}{8}$平方米. 如果△$ABC$ 的三边均与小正方形的边不平行（如图）. 则可过其中一点 B 作 BD 与小正方形边平行，它将△ABC 分成两个三角形：△ABD 与△BCD. 则



$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}\times BD\times h_1+\frac{1}{2}\times BD\times h_2$$

$$=\frac{1}{2}\times BD\times(h_1+h_2)\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\text{米}\times\frac{1}{2}\text{米}$$

$$=\frac{1}{8}\text{平方米}.$$

由以上证明可知，至少有 3 个点，以这三个点为顶点的三角形面积不大于$\frac{1}{8}$平方米.

习题十二

1. “幼苗杯”数学竞赛获奖的 87 名学生来自 12 所小学，证明：至少有 8 名学生来自同一所学校.

2. 在一米长的线段中任意放入 7 个点，证明：不论

怎样放，至少有两点之间的距离小于 17 厘米.

3. 52 张扑克牌有红桃、黑桃、方块、梅花 4 种花色各 13 张，问：

① 至少从中取出多少张牌，才能保证有花色相同的牌至少 2 张.

② 至少从中取出几张牌，才能保证有花色相同的牌至少 5 张.

③ 至少从中取出几张牌，才能保证有 4 种花色的牌.

④ 至少从中取出几张牌，才能保证至少有 2 张梅花牌和 3 张红桃.

⑤ 至少从中取出几张牌，才能保证至少有 2 张牌的数码（或字母）相同.

4. 学校图书馆里有 A、B、C、D 四类书，规定每个同学最多可以借 2 本书，在借书的 85 名同学中，可以保证至少几个人所借书的类型是完全一样的?

5. 把 1 到 30 这 30 个自然数摆成一个圆圈，则一定有三个相邻的数，它们的和不小于 47.

6. 在一个边长为 1 米的正三角形内随意放置 10 个点. 证明：至少有 2 个点之间的距离不超过$\frac{1}{3}$米.

习题十二解答

1. 把 12 所小学看作 12 抽屉，87 名获奖学生是哪所小学的就进入相应的抽屉.

$\because$　$87 = 12 \times 7 + 3$,

$\therefore$　根据抽屉原理，至少有 8 名学生来自同一所小学.

2．1米等于100厘米，把这条线段平均分成6段，每段长为$\frac{100}{6}$厘米＜17厘米．把7个点任意放入这6段中，根据抽屉原理，至少有两个点落在同一段中．则这两个点之间的距离小于17厘米．

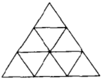
3．① 5张；　② 17张；　③40张；

④ 43张；　⑤ 14张．

4．将借书的类型A、B、C、D、AA、BB、CC、DD、AB、AC、AD、BC、BD、CD共14种看作14个抽屉．因为$85=14\times6+1$，所以至少有7个人所借书的类型是一样的．

5．将这30个数从某数开始按顺时针方向顺次记为a_1、a_2、…、a_{30}．按顺序写成以下10组：$a_1a_2a_3$、$a_4a_5a_6$、…、$a_{28}a_{29}a_{30}$，这10组数的和的总和为：$a_1+a_2+\cdots+a_{30}=1+2+3+\cdots+30=465=10\times46+5$．根据抽屉原理，至少有一组数的和不小于47．

6．把正三角形的每条边都三等分并如图连结各点将这个正三角形分割成9个边长为$\frac{1}{3}$米的小正三角形．根据抽屉原理10个点中至少有2个点落在同一个小三角形内（也可以在边上）．在同一个小正三角形内的两点间的距离一定不超过它的边长$\frac{1}{3}$米．



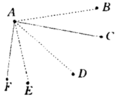
第13讲 染色中的抽屉原理

根据抽屉原理可以解决许多有趣的问题，关键在于根据不同的问题制造抽屉. 如研究整除问题时常用剩余类当作抽屉，研究长度和面积时用图形制造抽屉等等. 在这一讲中将研究如何用颜色当作抽屉来解决一些问题.

【例1】 平面上有 A、B、C、D、E、F 六个点，其中没有三点共线，每两点之间任意选用红线或蓝线连接，求证：不管怎样连接，至少存在一个三边同色的三角形.

分析与解答 连彩线的方式很多，如果一一画图验证结论，显然是不可取的. 这个问题如果利用抽屉原理去解决，就不是难事了.

我们用虚线表示红色，用实线表示蓝色. 从任意一点比如点 A 出发，要向 B、C、D、E、F 连 5 条线段. 因为只有两种颜色，所以根据抽屉原理，至少有 3 条线段同色. 不妨设 AB、AD、AE 三线同红色（如右图）. 如果 B、D、E 这三点之间所连的三条线段中有一条是红色的，则出现一个三边为红色的三角形. 如果这三点之间所连线段都不是红色，那么就都是蓝色的，这样，三角形 BDE 就是一个蓝色的三角形. 因此，不管如何连彩线，总可以找到一个三边同色的三角形.



如果我们把上面例题中的点换成人，把红蓝两种颜

色连线换成人与人之间的关系，又可以解决某些实际问题．如：证明在任意的 6 个人之间，或者有 3 个人互相认识，或者有 3 人互相都不认识．

我们只需把互相认识的两人用红线连接，互相不认识用蓝线连接，那么所要证明的结论就变成证明存在一个红色或蓝色的三角形了．

【例 2】 从同一个小学毕业的同学之间的关系可以分为三个等级：关系密切、一般关系、毫无关系．请你证明在这个学校的 17 名校友中．至少有三个人，他们之间的关系是同一个等级的．

分析与解答 把 17 人看成平面上 17 个点；用红、蓝、白三种颜色的连线表示同学之间三种不同等级关系．那么这个实际问题就转化为：证明用红、蓝、白三种颜色的线段连接平面上的 17 个点（没有三点共线），一定存在一个同色的三角形．

因为一个点要与其他 16 个点连线，只有三种颜色，所以根据抽屉原理，从一点至少引出 6 条同色的线段．不妨设点 A 与 B、C、D、E、F、G 六点是用白色线段连接的．如果 B、C、D、E、F、G 这六点之间有一条白线连线，那么就会出现一个三边为白色的三角形．否则，这六个点只能用红、蓝两种颜色连接了．根据例 1 的证明可得，这六个点之间必有一个红色边或蓝色边的三角形存在．

从例 2 的证明看出，它的论证方法与例 1 是相似的，只不过比例 1 多用了一次抽屉原理．

【例 3】 用黑、白两种颜色把一个 2×5（即 2 行 5 列）的长方形中的每个小方格都随意染一种颜色．证明：

必有两列，它们的涂色方式完全相同.

分析与解答　因为每列只有两格，而这两格的染法只有（右图）四种，将这 4 种染色方式当作 4 个抽屉，题中所有的方格共有 5 列，根据抽屉原理，至少有两列的染色方式完全相同.

白	白	黑	黑
白	黑	白	黑

【例 4】　如果有一个 $3\times n$ 的方格阵列，每一列的三个方格都任意用红、黄、蓝、绿四色之三染成三种不同颜色，问 n 至少是多少时，才能保证至少有 3 列的染色方式完全相同.

分析与解答　每一列都从 4 种颜色中选出三种分别染上这列中的三个小格，染色的方式共有 $4\times3\times2=24$（种）. 若要保证至少有 3 列的染色方式完全相同，那么 n 至少是 $24\times2+1=49$.

下面研究另一类长方形阵列小格的染色的问题.

【例 5】　对一块 3 行 7 列的长方形阵列中的小方格的每一格任意染成黑色或白色，求证：在这个长方形中，一定有一个由小方格组成的长方形，它的四个角上的小方格同色.

证法 1：每一列的三个格用黑、白两种颜色染色. 所有可能的染法只有如下图中的八种

白	白	白	黑	黑	黑	白	黑
白	白	黑	白	黑	白	黑	黑
白	黑	白	白	白	黑	黑	黑
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)

如果在所染色的 3 行 7 列阵列中某一列是第（1）种

方式，即三格均为白色，则其余 6 列中只要再有第（1）（2）（3）（4）种方式之一（即该列中至少有两个白格），那么显然存在一个四角格都是白色的长方形．若第（1）、（2）、（3）、（4）种方式均未出现，那么其余 6 列就只能是（5）、（6）、（7）、（8）这四种方式，根据抽屉原理，其中至少有两列染色方式完全一样．又（5）～（8）中每一列至少有两格染黑色，所以一定存在一个长方形，它的四角格颜色都是黑色．

同理可知，如果有一列是第（8）种方式，即三格均为黑色，那么也存在四角同色的长方形．

如果在 7 列中（1）、（8）两种方式都未出现，则只有（2）、（3）、（4）、（5）、（6）、（7）这六种方式染这 7 列，根据抽屉原理，至少有两列染色方式完全一样，所以仍然存在四角同色的长方形．

证法 2：第一行有 7 个小方格，用黑白两种颜色去染，根据抽屉原理，至少有四个方格所染颜色相同，不妨设第一行有 4 个黑方格．再看第二行，如果在第一行的四个黑方格下面的四格中有两格是黑色，则结论显然成立．否则第二行这四个格中至少有 3 个白色方格．

再看第三行．根据抽屉原理，在第三行的位于第二行的 3 个白格下面的 3 个格中必至少有两格同色．如果有两格为白色，则与第二行构成四角白色的长方形；如果没有两格白色，那么必有两格为黑色，则与第一行构成四角黑色的长方形．

【例 6】 用黑、白两种颜色将一个 5×5 的长方形中的小方格随意染色．求证：在这个长方形中一定有一个由小方格组成的长方形，它的四个角上的小方格同色．

分析与解答　第一行中的 5 个小方格用黑、白两种颜色去染，根据抽屉原理，至少有 3 个小方格同色．不妨设第一行的前 3 个为白格．现在考虑位于这 3 个白格下面的那个 3×4 的长方形（如右图），用黑、白两种颜色去染这个 3×4 的长方形，有以下两种情况：

白	白	白

① 若在某一行的 3 个方格中出现两个白格，则它们与上方第一行相应的两个白格可组成四角同为白色的长方形．

② 若在 4×3 的长方形的任意一行的 3 个小方格中都不含两个白格，也就是每一行的 3 个小方格所涂的颜色只有一白二黑或三黑，则只有下面(1)、(2)、(3)、(4) 共 4 种可能．如果 (4) 出现在某一行中，那么不管其他三行为 (1)、(2)、(3)、(4) 中的哪种情况，必有一个四角为黑色小方格的长方形．如果 (4) 未出现，则在这四行中只能出现(1)、(2)、(3) 这 3 种情况，由抽屉原理可知，必有两行染色方式完全相同，显然这两行中的 4 个黑色小方格可构成四角同黑的长方形．

白	黑	黑	(1)
黑	白	黑	(2)
黑	黑	白	(3)
黑	黑	黑	(4)

习题十三

1．一天，颐和园知春亭中有 6 位游客．请证明：他们之中必有三名互相认识或者互相不认识．

2．用红、黑两种颜色将一个 2×9 的长方形中的小方格随意染色，每个小方格染一种颜色，证明：至少有 3

列小方格中染的颜色完全相同.

3. 用红、白、黑三种颜色给一个 $3\times n$ 的长方形中的每一个小方格随意染上一种颜色. n 至少为多少时，才能保证至少有两列染色方式完全一样？

习题十三解答

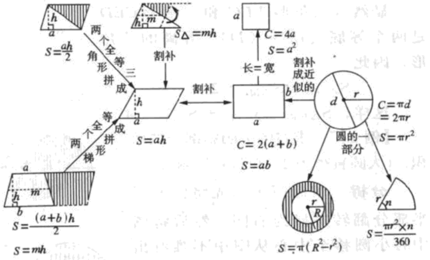
1. 把六位游客看作平面上的六个点（任意三点不共线），互相认识的用红线连接，不认识的用蓝线连接，按例 1 的证法即可得出结论.

2. 2×9 的长方形有 9 列，每列有两个小方格，用红、黑两色染色，共有 4 种不同的方式，看作 4 个抽屉，因为 $9=4\times 2+1$，所以根据抽屉原理，至少有 3 列染色方式相同.

3. 每一列有 3 个小方格，每个小方格都有红、白、黑三种染色方法，则各列染色的方式有 $3\times 3\times 3=27$（种）. 根据抽屉原理，至少有 28 列才能保证至少有两列染色方式完全一样，因此 n 的最小值为 28.

第14讲 面积计算

在小学阶段学习的各种平面图形之间有着密切的联系．我们把平面图形之间的转化方法及它们的面积、周长公式归纳如下图：

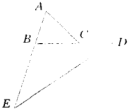


计算图形的面积要用面积公式，对于一些复杂的图形有意识地运用运动变化的观点，将平面图形简单地变动位置，可以化繁为简，化难为易，从而获得最佳解法．

【例 1】 已知三角形 ABC 的面积为 1，$BE=2AB$，$BC=CD$，求三角形 BDE 的面积？（下页图）

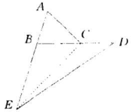
分析 利用已给的线段间的比例关系、已给的三角形的面积以及三角形的面积公式，设法把三角形 BDE 划

分成一些与三角形 ABC 的面积成相应比例的三角形．这样，三角形 BDE 的面积就能求得了．



解：见右图，连结 CE．对于三角形 ABC 与三角形 BEC，分别把 AB 和 BE 看成底，那么它们的高相等．此外，$BE=2AB$．根据三角形面积公式 $S=\frac{1}{2}ah$ 可知，

$$S_{\triangle BEC}=2S_{\triangle ABC}=2.$$

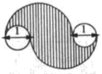


显然，三角形 BEC 和三角形 CED 是两个等底（$BC=CD$）、等高的三角形，因此

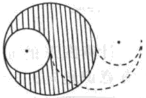
$$S_{\triangle CED}=S_{\triangle BEC}=2.$$

这样，$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BEC}+S_{\triangle CED}=4$．

【例 2】 求右图中阴影部分的面积．(大圆直径为 2，单位：厘米)．



分析 解题时可以先将图形下半部分翻转拼接为右图．然后将图中的小圆移至中心从图中不难看出求原图中阴影部分的面积就是求一个圆环的面积．



解：大圆半径：$2\div2=1$（厘米）

小圆半径：$1\div2=0.5$（厘米）

阴影面积：$3.14\times(1^2-0.5^2)$

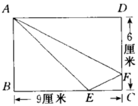
$=2.355$（平方厘米）

答：阴影部分的面积是 2.355 平方厘米．

【例 3】 如下图．在图中三角形 ABE、ADF 和四

边形 $AECF$ 的面积相等，求三角形 AEF 的面积.

分析　三角形 AEF 的面积等于四边形 $AECF$ 的面积减去三角形 ECF 的面积. 因为长方形 $ABCD$ 的面积等于三角形 ABE、ADF 和四边形 $AECF$ 的面积和，而这三者的面积又相等，所以四边形 $AECF$ 的面积等于长方形面积的$\frac{1}{3}$. 由于长方形 $ABCD$ 的长、宽分别为 9 厘米和 6 厘米，因此很容易求出它的面积. 所以解题关键在于求出三角形 ECF 的面积.



根据三角形面积公式 $S=\frac{1}{2}ah$，已知三角形 ABE 的面积等于长方形面积的$\frac{1}{3}$，又知道 $AB=6$ 厘米，可以求出 BE 的长度. 知道 BE 的长度就可以求出 EC 的长度. 同理可以求出 FC 的长度. 这样三角形 ECF 的面积可以求出，使问题得解.

解：长方形 $ABCD$ 的面积：$9\times6=54$（平方厘米）；

四边形 $AECF$ 及三角形 ABE、AFD 的面积相等，是：

$54\times\frac{1}{3}=18$（平方厘米）；

EC 的长度：$9-18\times2\div6=3$（厘米）；

FC 的长度：$6-18\times2\div9=2$（厘米）；

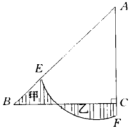
三角形 AEF 的面积：

$18-3\times2\div2=15$（平方厘米）.

答：三角形 AEF 的面积是 15 平方厘米.

【例 4】　如下页图. 等腰直角三角形 ABC 的腰为

10厘米；以 A 为圆心，EF 为圆弧，组成扇形 AEF；阴影部分甲与乙的面积相等．求扇形所在的圆面积．



分析 $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\therefore$ $AC=BC$，$\angle A=\angle B=45°$．$\because$ $S_{甲}=S_{乙}$，即 $S_{\triangle ABC}$ 的面积等于以 AE 为半径，圆心角是 $45°$ 的扇形面积．根据已知条件，可求出三角形 ABC 的面积从而可求出圆面积．

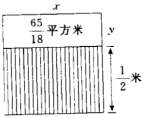
解：三角形 ABC 的面积：$\dfrac{10\times10}{2}=50$（平方厘米）；

周角是 $45°$ 圆心角的几倍？$360\times45=8$；

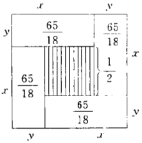
圆面积：$50\times8=400$（平方厘米）．

答：扇形所在的圆面积是400平方厘米．

【例5】 如右图．从一个正方形的木板上锯下宽为 $\dfrac{1}{2}$ 米的一块长方形木条以后，剩下的面积是 $\dfrac{65}{18}$ 平方米．问锯下木条的面积是多少平方米？



分析 利用一种称之为"弦图"的求面积的方法．用"弦图"计算面积最主要的是掌握"弦图"的特点．其一：大正方形边长 = 长方形长 x + 长方形宽 y．其二：小正方形的边长 = 长方形的长 x − 长方形的宽 y．解题时先把四个面积为 $\dfrac{65}{18}$ 的长方形（即题中锯下一木条后剩下的那个长方形）拼成一个正方形，如



上图．由于每个长方形的长比宽长$\frac{1}{2}$米，所以中间小正方形边长是$\frac{1}{2}$米，从而可求出拼成后正方形的总面积，进而确定正方形的边长．

解：拼成后大正方形的面积：

$\frac{65}{18}\times 4+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{529}{36}$（平方米）．

大正方形的边长：

$\because\quad \frac{529}{36}=\left(\frac{23}{6}\right)^2$．

$\therefore$　大正方形的边长为$\frac{23}{6}$米．

长方形的长（即长方形木条的长）：

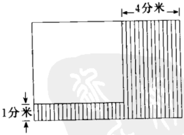
$\because$　长＋宽$=\frac{23}{6}$（米），　　长－宽$=\frac{1}{2}$（米），

$\therefore$　长$=\left(\frac{23}{6}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\frac{13}{6}$（米）．

锯下木条的面积：$\frac{13}{6}\times\frac{1}{2}=1\frac{1}{12}$（平方米）．

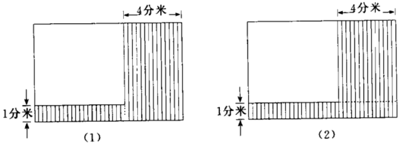
答：锯下木条的面积是$1\frac{1}{12}$平方米．

【例 6】　一块长方形钢板，长截下 4 分米，宽截下 1 分米后，成了一块正方形钢板，如右图，面积比原来减少了 49 平方米．原来长方形钢板的面积是多少平方米？



分析　初看起来，图中长方形长和宽，正方形的边长都不知道，无法求出长方形的面积，能否用特殊的方

法思考呢？审题后发现长方形的长、宽和面积都和正方形有关系．图中阴影部分，如果添一条“辅助线”，如下页图（1）或下页图（2），把它分解成两个长方形．以下页图（2）为例．记正方形的边长为 x 分米．带阴影的小长方形长为（$x+4$）分米，宽为 1 分米，带阴影的大长方形长为 x 分米，宽为 4 分米．“面积比原来（长方形）减少了 49 平方米”，也就是大长方形阴影部分面积＋小长方形阴影部分面积＝阴影部分总面积＝49 平方分米，用方程解．



(1)　　(2)

解：设正方形边长为 x 分米．

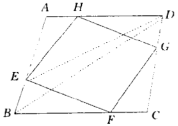
$$(x+4)\times 1+4x=49,$$
$$x+4+4x=49,$$
$$5x=45,$$
$$x=9.$$

$9\times 9+49=130$（平方分米）

答：长方形钢板面积为 130 平方分米．

【例 7】　$ABCD$ 为任意四边形，其中 $AE=\frac{2}{3}AB$，$BF=\frac{2}{3}BC$，$CG=\frac{2}{3}CD$，$DH=\frac{2}{3}DA$，连结 E、F、C、H．求四边形 $EFGH$ 的面积与四边形 $ABCD$ 的面积之比

（如右图）.



解：连结 ED 和 BD. 得知

$S_{\triangle AEH}=\frac{1}{3}S_{\triangle AED}$,

$S_{\triangle AED}=\frac{2}{3}S_{\triangle ADB}$，所以

$S_{\triangle AEH}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABD}$,

同理 $S_{\triangle CGF}=\frac{2}{9}S_{\triangle BCD}$,

因此 $S_{\triangle AEH}+S_{\triangle CGF}=\frac{2}{9}\left(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}\right)=\frac{2}{9}S_{\square ABCD}$.

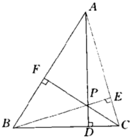
同理 $S_{\triangle BFE}+S_{\triangle DHG}=\frac{2}{9}S_{\square ABCD}$,

所以 $S_{\triangle AEH}+S_{\triangle CGF}+S_{\triangle BFE}+S_{\triangle DHG}=\frac{4}{9}S_{\square ABCD}$.

所以 $S_{\square EFGH}=\left(1-\frac{4}{9}\right)S_{\square ABCD}=\frac{5}{9}S_{\square ABCD}$.

即四边形 $EFGH$ 的面积:四边形 $ABCD$ 面积 $=5:9$.

【例 8】 如右图，已知三角形 ABC 的三条高必定交于一点，如记成 P 点，请你讲明 $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$ 为什么成立？



分析与解答　从右图中可以看出 $\triangle PBC$ 和 $\triangle ABC$ 是同底的两个三角形，它们的面积之比等于它们对应高的比，所以 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PD}{AD}$. 同理可得：

$\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PE}{BE}$,　　　$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PF}{CF}$.

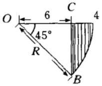
所以$\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}$.

又∵ $S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}+S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}$,

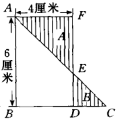
因此$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1$.

习题十四

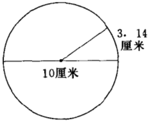
1．右图是一个圆心角为45°的扇形，其中直角三角形 BOC 的直角边为6厘米，求阴影部分面积.



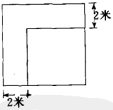
2．在右图中，阴影部分 A 的面积比阴影部分 B 的面积大10.5平方厘米，求线段 BC 的长度？



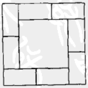
3．一个直径为10厘米的圆，如左图．圆内有一个扇形，扇形的弧长为3.14厘米，求扇形的面积.



4．右图中，大正方形面积比小正方形面积多24平方米，求小正方形的面积是多少？

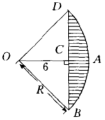


5．用同样的长方形条砖，在一丛花的周围镶成一个正方形边框，如右图．边框的周长为264厘米．里边小正方形的面积为900平方厘米，问每块长方形条砖的长和宽各是多少厘米？



习题十四解答

1．提示：针对本题特点，选用先扩大再缩小的方法解题．把原图作为一个整体扩大一倍，使其成为圆心角是 90°的扇形，使问题得解．（见右图）



解：大三角形面积：

$$\frac{(6+6)\times 6}{2}=36\text{（平方厘米）}.$$

同一个三角形面积还可以以 R 分别为底和高，所以这个三角形面积为：$R^2\div 2=36$，

$$R^2=72.$$

大扇形面积：

$$\frac{1}{4}\times 3.14\times 72=56.52\text{（平方厘米）}.$$

所求阴影面积：

$(56.52-36)\div 2=10.26$（平方厘米）．

答：所求阴影面积是 10.26 平方厘米．

2．提示：用等积代换解题．

长方形面积：$4\times 6=24$（平方厘米），

三角形 ABC 面积：$24-10.5=13.5$（平方厘米），

BC 边长：$13.5\times 2\div 6=4.5$（厘米）．

答：BC 边长 4.5 厘米．

3．圆周长：$3.14\times 10=31.4$（厘米），

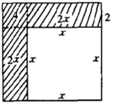
弧长是周长的几分之几：$\dfrac{3.14}{31.4}=\dfrac{1}{10}$，

扇形圆心角：$360\times\dfrac{1}{10}=36$（度）．

圆面积：$\dfrac{3.14\times\left(\dfrac{10}{2}\right)^2}{360}\times 36=7.85$（平方厘米）.

答：圆面积是 7.85 平方厘米.

4．解：设小正方形边长为 x 米.



$2x+2x+4=24$,

$4x=20$,

$x=5$.

$5\times5=25$（平方米）.

答：小正方形面积为 25 平方米.

5．大正方形边长：$264\div4=66$（厘米），

小正方形边长：$\because 900=30^2$,

$\therefore$ 小正方形边长为 30 厘米.

大正方形与小正方形边长的差正好是长方形的宽的两倍，

$\therefore$ 长方形宽：$(66-30)\div2=18$（厘米）.

长方形长：$(66-18)\div2=24$（厘米）.

答：长方形的长是 24 厘米，宽 18 厘米.

第15讲　综合题选讲

小学数学竞赛综合题，主要包括以下几个方面：

① 逻辑关系较复杂的问题；

② 数与形相结合的问题；

③ 较复杂的应用题；

④ 较灵活的组合、搭配问题；

⑤ 与“最多”、“最少”有关的问题.

解答小学数学竞赛的综合题，首先要能熟练、正确解答有关的基本题，同时要认真读题，准确理解题意，在分析题目条件，设计解题程序上下功夫.

【例 1】　一个正方体的八个顶点处分别标上 1、2、3、4、5、6、7、8. 再把各棱两端上所标的二数之和写在这条棱的中点，问：在棱的中点最少能标出几种数值？

分析　对于 1、2、3、4、5、6、7、8 这些数中两两之和，有下列情形：

有 4 种形成 9 的和：$1+8=2+7=3+6=4+5$；

有 3 种形成 8 的和：$1+7=2+6=3+5$；

有 3 种形成 10 的和：$2+8=3+7=4+6$；

有 3 种形成 7 的和：$1+6=2+5=3+4$；

有 3 种形成 11 的和：$3+8=4+7=5+6$；

有 2 种形成 6 的和：$1+5=2+4$；

有 2 种形成 5 的和：$1+4=2+3$；

有 2 种形成 12 的和：$4+8=5+7$；

有2种形成13的和：$5+8=6+7$；
此外还有 $1+2=3$，$1+3=4$，$6+8=14$，$7+8=15$ 各一种.

首先指出棱的中点处不可能仅出现3种数，理由是：3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15中的数，如果只用其中3个数（标在棱的中点处），那么这三个数不能写成共12种不同形式的（取自于1、2、…、8之中的两数）和，而正方体棱数有12个.

再说明，棱的中点处不可能只标有4种不同数值，为证明这一点，可以分下列情况说明.

如果在12条棱上有3个“7”、3个“8”、3个“10”、3个“11”，那么在正方体顶点处要出现4次“6”进行运算. 这是不可能. 因为每个顶点处的数只参加3次加法运算.

如果在12条棱上有3个“9”，此外，必定还有7、8、10、11中的某三个数字（各三次），那么棱上数之和只能是

$(9+7+8+10)\times3=102$,

$(9+8+10+11)\times3=114$,

$(9+7+10+11)\times3=111$,

$(9+7+8+11)\times3=105$.

它们都与棱上所有数之和应当是 $(1+2+\cdots+8)\times3=108$ 矛盾. 这说明棱上的数不可能是3个“9”以及7、8、10、11中某3个各出现3次.

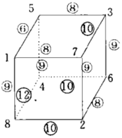
如果在12条棱的中点出现4个“9”以及另外三种数，那么另外三种数应各出现3、3、2次. 出现3次的只能是7、8、10、11中的两个. 出现两次的则是5、6、

12、13 中的一个或者是 7、8、10、11 中未被用了 3 次的两个中的一个．设出现两次的棱的中点数为 a，出现 3 次的为 b 或 c，则因为

$$4\times9+3\times(b+c)+2a=108,$$

所以 $b+c$ 必须为偶数．在 7、8、10、11 中取两数 b、c，使其和为偶数，只有 7、11 及 8、10 这两种可能．无论哪种情形，都有 $b+c=18$，因此 $2a=108-36-3\times18=18$，$a=9$．与 12 条棱有 4 个 9 矛盾．这说明上述情况不能出现．

综上所述，棱中点不可能仅有四种不同数．



棱中点可以有五种不同数值，这可由右图看出：棱中点共出现 4 个“9”、3 个“10”、3 个“8”、1 个“6”、1 个“12”．

这说明棱的中点最少能标出 5 种不同数值．

【例 2】　一组互不相同的自然数，其中最小的是 1，最大的是 25，除去 1 之外，这组数中的任一个数或者等于这组数中某一个数的 2 倍，或者等于另外两个数之和．在满足要求的所有可能的数组中，寻找出使得组内各数之和最大及最小的数组，并求这组数之和的最大值、最小值．

分析　很自然猜想并容易验证数组 1，2，3，…，24，25 符合题目要求，显然这个数组的和是最大的，这个最大的和是 $1+2+3+\cdots+24+25=325$．

困难在于搜寻最小的数组．

把数组中的数由小到大排起来，容易看出：

1后边的数一定是2；2后边可以是3，也可以是4；3后边可能是4、5、6；4后边可能是5、6、8．把它们列出来就是

1，2，3，4，…，25；

1，2，3，5，…，25；

1，2，3，6，…，25；

1，2，4，5，…，25；

1，2，4，6，…，25；

1，2，4，8，…，25.

25是奇数，它只能是另外两个数之和，容易验证在上述数列的“…”处不能只加入一个数，也就是说，在上述六种数列的每个“…”中，至少要再加入两个数．而且，还推知后加入的数中至少有两个数，这两个数的和不小于25．理由是，如果后加入的任意两个数之和都小于25，那么就不可能得到最后的25这个数．

根据以上理由，我们应当先考虑1，2，3，4，…，25这一列数．看看是否能只加入两个数，且加入的两个数之和是25.

$$25=5+20=6+19=7+18=8+17=9+16$$
$$=10+15=11+14=12+13.$$

在1，2，3，4，…，25中的“…”处可加入5，但是不能有20（20不是1、2、3、4、5中任何一数的两倍，也不是其中任何两数之和）；可加入6但不能在6后写19；可加入7，但不能在7后写18，可加入8，但不能在8后写17．另一方面，紧接1，2，3，4之后不可加入9、10、11、12．这表明1，2，3，4，…，25中的“…”处

仅加入两个数，且这两个数之和是 25 是办不到的.

接着考察 1，2，3，5，…，25：是否可以在“…”中仅加两个数，得到符合题意的数组.

容易看出 1，2，3，5，10，15，25 是符合题意的一组数. 因为在“…”中加入的两个数，不论怎么加，它们的和的最小值是 25，现在加入 10 和 15，其和恰是最小值 25. 所以这数组的和最小. 因此，所求的最小和是

$1+2+3+5+10+15+25=61.$

【例 3】　观察下面的减法算式

□□□□－□□□－□□＝□.

其中□□□□表示四位数，□□□表示三位数，□□表示两位数，□表示一位数. 问：这样的正确算式共有几种？

分析　换成加法算式，就是要回答共有多少种形如

□□□＋□□＋□＝□□□□

的正确算式？可以从两方面考虑：

① 如果□□□＋□□是个三位数. 那么这个和再加上一个一位数应该是四位数，容易看出

$991+9=1000$,

$992+9=1001$,　　$992+8=1000$,

$993+9=1002$,　　$993+8=1001$,　　$993+7=1000$,

…

$999+9=1008$,　　$999+8=1007$,　$\cdots 999+1=1000$,

这些和都是四位数，另一方面，

$991=892+99=893+98=894+97=\cdots=981+10$;

$992=893+99=894+98=895+97=\cdots=982+10$;

…

$999=900+99=901+98=902+97=\cdots=989+10$.

可见，由一个三位数与一个两位数之和形成的符合题意的三位数是 991、992、…、999．此时符合题意的算式共有

$90\times(1+2+\cdots+9)=4050$（种）.

② 如果□□□＋□□是个四位数，那么这个四位数一定是“1□□□”形的数.

容易看出：满足上述限定条件的最小的三位数是 901．这时 $901+99=1000$ 是个最小的四位数.

$902+99$，$902+98$　是四位数；

$903+99$，$903+98$，$903+97$ 是四位数；

…

$990+99$，$990+98$，$990+97$，…，$990+10$ 是四位数，

$991+99$，$991+98$，$991+97$，…，$991+10$ 是四位数，

…

$999+99$，$999+98$，$999+97$，…，$999+10$ 是四位数.

可见，使□□□＋□□是四位数的算式有

$1+2+3+\cdots+90+90\times 9=4905$（种）.

注意到每一个形如□□□＋□□是个四位数的算式中，再加上 1、2、3、…、9 后仍然是四位数，因此当：□□□＋□□是四位数时，不同的算式

□□□□－□□□－□□＝□共有

$4905\times 9=44145$（种）.

把①，②两种情况结合起来知共有

$44145+4050=48195$ 种合乎题目要求的算式.

说明：这三个例题虽然涉及的具体内容不同，但是有一个共同特性是都要分成几类较简单的情形，逐一回答较简单的情形的问题，最后解决原来提出来的问题，这种解题方法叫做“分情况解决问题”. 通过用分情况的方法解题，可以提高同学们思维的条理性，培养分析问题的好习惯.

【例 4】　桌上放着 100 个已经涂了色的小球. 其中有红球、白球、黄球. 允许你对它们改色，办法是：取出两个不同色的球，把它们涂上与它们颜色都不同的另一种颜色（例如你取出一个白球一个黄球，就把它们都改涂为红色），然后放回桌上，这叫“一次操作”，问：经过有限次操作后，你能否把所有球都改为同一种颜色？说明你的理由.

分析　100 不是 3 的倍数，设原有红球、白球、黄球各 x、y、z 个. 那么 x、y、z 不都是 3 的倍数，也不可能出现这样的情形：x、y、z 三个数被 3 除后的余数互不相同（否则 $x+y+z=100$ 就应该是 3 的倍数）. 可见，x、y、z 中有两个被 3 除的余数相同，另一个被 3 除的余数与它们不同.

设 y、z 被 3 除之后的余数相同，x 被 3 除后的余数与它们不同.

如果 $y=z$，那么可以用一白一黄变两个红球的方式经过有限步骤把所有的球都变为红色.

如果 $y\neq z$. 比如说 $y<z$，$z-y$ 必是 3 的倍数. 那么可以先进行“1 白 1 黄变 2 红”的改色，直到把白球用

完，这时桌上的球只有2种：红球和黄球．而此时黄球数目 $z-y$ 是3的倍数．把黄球3个一组进行分组，黄球被分成若干组，取出一组（3个）黄球和1个红球，对这一组（4个球）进行改色，办法是：

先用1红1黄变2白，这时4个球是2白、2黄．再把2白2黄变为4红．于是每3个黄球加1个红球都可变为4个红球．因为黄球的组数是有限的，而红球越改越多所以经过有限步改色后，总可使桌上的球全变为红色．

说明：题目中的100并不是本质的数，也可以改为101，103，或不是3的倍数的其他数字．证法一样．另一方面，最后变成的颜色决定于原来三种球中，哪色球被3除所得的余数是单独的，例如当红色球被3除的余数与白球、黄球数目被3除的余数不同，而白球、黄球数被3除后余数相同时，最后就全变为红色．

习题十五

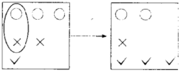
1．有红球3个，白球2个，黄球1个．每次可取两个异色球，把它们改为另一种颜色（如例4中一样），问：能否经过有限次改色，最后使全部球同色？

2．如上题条件，如果改色时，每次取两个球（不一定异色），可把两个球改成与两球的原色都不同的同一种颜色，问：能否经过有限次改色，使全部球同色？

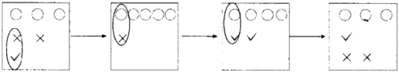
3．把1，2，…，91分成7组，每组13个数字，使各组中的数之和都相等，能否办到？说明理由．

习题十五解答

1. 不能．　用“○”表示一个红球，用“×”表示一个白球，用“√”表示一个黄球．下面的改色没有用处．因为



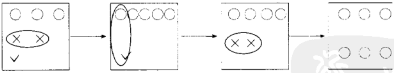
三种球数目仍分别是 1、2、3．如果按下列方式改色则又回到“1、2、3”的情形，可见，上述改色方式也不能使



所有球同色．如第一次先取○和√改为××，最后仍回到 1 个○，2 个√，3 个×××，也失败了．

综上所述，不能使所有球同色．

2. 可以．　只要按下列方式改色即可：



3. 能．　先把 22，23，…，91 这 70 个数分为如下 7 组：

22，35，36，49，50，63，64，77，78，91；

23，34，37，48，51，62，65，76，79，90；

24，33，38，47，52，61，66，75，80，89；
25，32，39，46，53，60，67，74，81，88；
26，31，40，45，54，59，68，73，82，87；
27，30，41，44，55，58，69，72，83，86；
28，29，42，43，56，57，70，71，84，85.

容易看出，每组 10 个数，这 10 个数之和都相等（事实上，每组的 10 个数按顺序可分成 5 小组，每小组的两个数之和分别为 57、85、113、141 和 169）. 再分 1、2、…、21. 可按下列方式分：

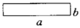
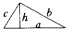
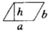
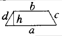
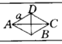
组别	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
	1	2	3	4	5	6	7
	11	14	10	13	9	12	8
	21	17	20	16	19	15	18

这样，每小组的 3 个数之和都等于 33. 把每一小组中的 3 个数并入前面已分成的 7 个组中，则每组 13 个数，各组之和相等.

下册

第1讲　不规则图形面积的计算（一）

我们曾经学过的三角形、长方形、正方形、平行四边形、梯形、菱形、圆和扇形等图形，一般称为基本图形或规则图形．我们的面积及周长都有相应的公式直接计算．如下表：

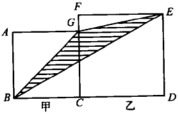
名称	图形	周长公式	面积公式
长方形		周长 $=2(a+b)$	面积 $=ab$
正方形		周长 $=4a$	面积 $=a^2$
三角形		周长 $=a+b+c$	面积 $=\frac{1}{2}ah$
平行四边形		周长 $=2(a+b)$	面积 $=ah$
梯形		周长 $=a+b+c+d$	面积 $=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$
菱形		周长 $=4a$	面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot BD$
圆		周长 $=2\pi r$	面积 $=\pi r^2$
扇形		弧长 $=\frac{n\pi r}{180}$ 周长 $=2r+$ 弧长	面积 $=\frac{n}{360}\pi r^2$

实际问题中，有些图形不是以基本图形的形状出现，

而是由一些基本图形组合、拼凑成的，它们的面积及周长无法应用公式直接计算．一般我们称这样的图形为不规则图形．

那么，不规则图形的面积及周长怎样去计算呢？我们可以针对这些图形通过实施割补、剪拼等方法将它们转化为基本图形的和、差关系，问题就能解决了．

【例 1】 如右图，甲、乙两图形都是正方形，它们的边长分别是 10 厘米和 12 厘米．求阴影部分的面积．



解： 阴影部分的面积等于甲、乙两个正方形面积之和减去三个“空白”三角形（$\triangle ABG$、$\triangle BDE$、$\triangle EFG$）的面积之和．

因为 $S_{\triangle ABG}=\dfrac{1}{2}\times 10\times 10=50$；

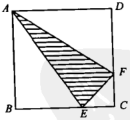
$S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}(10+12)\times 12=132$；

$S_{\triangle EFG}=\dfrac{1}{2}(12-10)\times 12=12$．

又因为 $S_{甲}+S_{乙}=12\times 12+10\times 10=244$，

所以阴影部分面积 $=244-(50+132+12)=50$（平方厘米）．

【例 2】 如右图，正方形 $ABCD$ 的边长为 6 厘米，$\triangle ABE$、$\triangle ADF$ 与四边形 $AECF$ 的面积彼此相等，求三角形 AEF 的面积．



解： 因为 $\triangle ABE$、$\triangle ADF$ 与四边形 $AECF$ 的面积彼此相等，所以四边形 $AECF$ 的面积与 $\triangle ABE$、$\triangle ADF$

的面积都等于正方形 $ABCD$ 面积的三分之一．也就是：

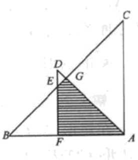
$S_{\text{四边形}AECF} = S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADF} = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 = 12.$

在 $\triangle ABE$ 中，因为 $AB = 6$．所以 $BE = 4$，同理 $DF = 4$，因此 $CE = CF = 2$，

$\therefore$　$\triangle ECF$ 的面积为 $2 \times 2 \div 2 = 2$.

所以 $S_{\triangle AEF} = S_{\text{四边形}AECF} - S_{\triangle ECF} = 12 - 2 = 10$（平方厘米）.

【例 3】　两块等腰直角三角形的三角板，直角边分别是 10 厘米和 6 厘米．如右图那样重合．求重合部分（阴影部分）的面积.



解：在等腰直角三角形 ABC 中

$\because$　$AB = 10$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50.$

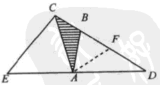
又 $\because$　$S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 50 = 25$，

$\because$　$EF = BF = AB - AF = 10 - 6 = 4$，

$\therefore$　$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$，

$\therefore$　阴影部分面积 $= S_{\triangle ABG} - S_{\triangle BEF} = 25 - 8 = 17$（平方厘米）.

【例 4】　如右图，A 为 $\triangle CDE$ 的 DE 边上中点，$BC = \frac{1}{3} CD$，若 $\triangle ABC$（阴影部分）面积为 5 平方厘米．求 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACE$ 的面积.



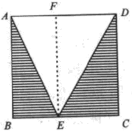
解：取 BD 中点 F，连结 AF．因为 $\triangle ADF$、

$\triangle ABF$ 和 $\triangle ABC$ 等底、等高，所以它们的面积相等，都等于 5 平方厘米.

所以 $\triangle ACD$ 的面积等于 15 平方厘米，$\triangle ABD$ 的面积等于 10 平方厘米.

又由于 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ACD$ 等底、等高，所以 $\triangle ACE$ 的面积是 15 平方厘米.

【例 5】 如下页右上图，在正方形 $ABCD$ 中，三角形 ABE 的面积是 8 平方厘米，它是三角形 DEC 的面积的 $\frac{4}{5}$. 求正方形 $ABCD$ 的面积.

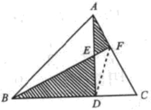


解：过 E 作 BC 的垂线交 AD 于 F.

在矩形 $ABEF$ 中 AE 是对角线，所以 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}=8$. 在矩形 $CDFE$ 中 DE 是对角线，所以 $S_{\triangle ECD}=S_{\triangle EDF}$.

因此，正方形面积 $=8\times2+8\div\frac{4}{5}\times2=36$（平方厘米）.

【例 6】 如右图，已知：$S_{\triangle ABC}=1$，$AE=ED$，$BD=\frac{2}{3}BC$，求阴影部分的面积.



解：连结 DF. $\because$ $AE=ED$，

$\therefore$ $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$；$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BED}$，

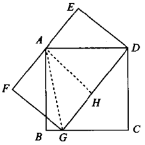
$\therefore$ $S_{阴影}=S_{\triangle ABF}=S_{\triangle BFD}$. $\because$ $BD=\frac{2}{3}BC$，

$\therefore$ $S_{\triangle BFD}=\frac{2}{3}S_{\triangle BCF}=\frac{2}{3}(1-S_{\triangle ABF})$，

$\therefore$ $S_{\triangle ABF}=\frac{2}{3}(1-S_{\triangle ABF})$，$\therefore$ $S_{\triangle ABF}=\frac{2}{5}$.

∴　阴影部分面积为$\frac{2}{5}$.

【例 7】　如右图，正方形 $ABCD$ 的边长是 4 厘米，$CG=3$ 厘米，矩形 $DEFG$ 的长 DG 为 5 厘米，求它的宽 DE 等于多少厘米？



解：连结 AG，自 A 作 AH 垂直于 DG 于 H，在$\triangle ADG$ 中，$AD=4$，$DC=4$（AD 上的高）.

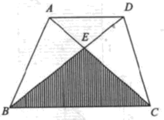
∴　$S_{\triangle AGD}=4\times4\div2=8$，又 $DG=5$，

∴　$S_{\triangle AGD}=AH\times DG\div2$，

∴　$AH=8\times2\div5=3.2$（厘米），

∴　$DE=3.2$（厘米）.

【例 8】　如右图，梯形 $ABCD$ 的面积是 45 平方米，高 6 米，$\triangle AED$ 的面积是 5 平方米，$BC=10$ 米，求阴影部分面积.



解：∵　梯形面积 =（上底 + 下底）× 高 ÷ 2

即　$45=(AD+BC)\times6\div2$，

　　$45=(AD+10)\times6\div2$，

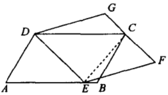
∴　$AD=45\times2\div6-10=5$ 米.

又　$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\times AD\times$高，即　$5=\frac{1}{2}\times5\times$高，

∴　$\triangle ADE$ 的高是 2 米．$\triangle EBC$ 的高等于梯形的高减去 $\triangle ADE$ 的高，即 $6-2=4$ 米，

∴　$S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}\times BC\times4=\frac{1}{2}\times10\times4=20$（平方米）.

【例 9】 如右图，四边形 $ABCD$ 和 $DEFG$ 都是平行四边形，证明它们的面积相等．



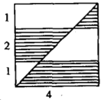
证明：连结 CE，$\square ABCD$ 的面积等于 $\triangle CDE$ 面积的 2 倍，而 $\square DEFG$ 的面积也是 $\triangle CDE$ 面积的 2 倍．

$\therefore$ $\square ABCD$ 的面积与 $\square DEFG$ 的面积相等．

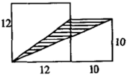
习 题 一

一、填空题（求下列各图中阴影部分的面积）：

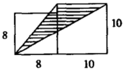
①



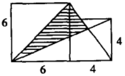
②



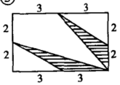
③



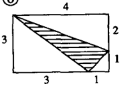
④



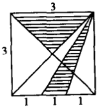
⑤



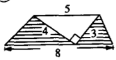
⑥



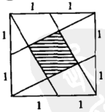
⑦



⑧

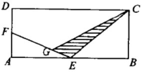


⑨

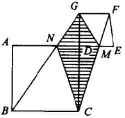


二、解答题：

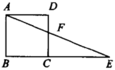
1．如右图，$ABCD$ 为长方形，$AB=10$ 厘米，$BC=6$ 厘米，E、F 分别为 AB、AD 中点，且 $FG=2GE$．求阴影部分面积．



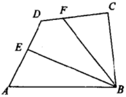
2．如右图，正方形 $ABCD$ 与正方形 $DEFG$ 的边长分别为 12 厘米和 6 厘米．求四边形 $CMGN$（阴影部分）的面积．



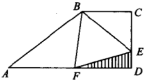
3．如右图，正方形 $ABCD$ 的边长为 5 厘米，$\triangle CEF$ 的面积比 $\triangle ADF$ 的面积大 5 平方厘米．求 CE 的长．



4．如右图，已知 $CF=2DF$，$DE=EA$，三角形 BCF 的面积为 2，四边形 $BEDF$ 的面积为 4．求三角形 ABE 的面积．

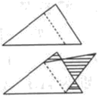


5．如右图，直角梯形 $ABCD$ 的上底 $BC=10$ 厘米，下底 $AD=14$ 厘米，高 $CD=5$ 厘米．又三角形 ABF、三角形 BCE 和四边形 $BEDF$ 的面积相等．求三角形 DEF 的面积．

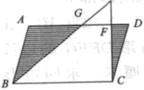


6．如右图，四个一样大的长方形和一个小的正方形拼成一个大正方形，其中大、小正方形的面积分别是 64 平方米和 9 平方米．求长方形的长、宽各是多少？

7. 如右图，有一三角形纸片沿虚线折叠得到右下图，它的面积与原三角形面积之比为2:3，已知阴影部分的面积为5平方厘米．求原三角形面积．



8. 如右图，▱$ABCD$ 的边长 $BC=10$，直角三角形 BCE 的直角边 EC 长8，已知阴影部分的面积比 $\triangle EFG$ 的面积大10．求 CF 的长．



习题一解答

一、填空题：

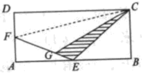
① 8；　② 50；　③ 48.4；

④ $14\frac{4}{19}$；　⑤ 6；　⑥ 3；

⑦ $3\frac{3}{4}$；　⑧ 9.6；　⑨ $\frac{4}{5}$．

二、解答题：

1. 7.5平方厘米．连结 CF，可知：$S_{\triangle CEG}=\frac{1}{3}S_{\triangle CEF}$．如右图，



由于 $S_{\triangle CEF}=S_{长方形ABCD}-S_{\triangle AEF}$

$-S_{\triangle BCE}-S_{\triangle CDF}$

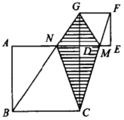
$=60-37.5$

$=22.5$（平方厘米），

所以 $S_{\triangle CEG}=\frac{1}{3}S_{\triangle CEF}$

$=\frac{1}{3}\times 22.5=7.5$（平方厘米）．

2．72 平方厘米．如右图，



在$\triangle BCG$ 中，$S_{\triangle CNG}=S_{\triangle BCG}-S_{\triangle BCN}$

$=\frac{1}{2}\times\ (12+6)\ \times 12-\frac{1}{2}\times 12\times 12$

$=108-72=36$（平方厘米）．

在$\triangle CFG$ 中，$S_{\triangle CMG}=S_{\triangle CFG}-S_{\triangle MFG}$

$=54-18=36$（平方厘米）．

$\therefore\quad S_{四边形CMGN}=S_{\triangle CNG}+S_{\triangle CMG}$

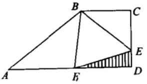
$=36+36=72$（平方厘米）．

3．$CE=7$ 厘米．

提示：$\triangle ABE$ 的面积等于 $5\times 5+5=30$ 也等于$\frac{1}{2}$（$5\times BE$）．可求出 $BE=12$．所以 $CE=BE-5=7$ 厘米．

4．3．提示：加辅助线 BD

5．3 平方厘米．如右图，



$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{3}$梯形面积

$=\frac{1}{3}\times(10+14)\times 5\div 2$

$=\frac{1}{3}\times 60=20$，

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BC\times CE$．

$\therefore\quad CE=4$，$DE=CD-CE=5-4=1$．

同理 $AF=8$，$DF=AD-AF=14-8=6$，

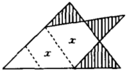
$\therefore\quad S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DF\times DE=\frac{1}{2}\times 6\times 1$

$=3$（平方厘米）．

6．如右图，大正方形边长等于长方形的长与宽的和．中间小正方形的边长等于长方形的长与宽的差．而大、小正方形的

边长分别是 8 米和 3 米，所以长方形的宽为$(8-3)\div2=2.5$（米），长方形的长为$8-2.5=5.5$（米）.

7. 15 平方厘米. 解：如右图，设折叠后重合部分的面积为 x 平方厘米，则：原三角形面积为$(2x+5)$平方厘米，依题意：$\dfrac{x+5}{2x+5}=\dfrac{2}{3}$，解得 $x=5$. 所以原三角形的面积为 $2\times5+5=15$ 平方厘米.



8. 如右图，解：设 $CF=x$ 厘米.

则 $S_{\square ABCD}=10x$，

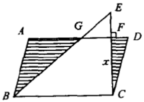
又 $S_{\triangle BCE}=\dfrac{1}{2}\times10\times8=40$，

$\therefore$ 阴影部分面积是：

$10x-40+S_{\triangle GEF}$

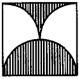
由题意：$S_{\triangle GEF}+10=$阴影部分面积，

$\therefore$ $10x-40=10$，$x=5$（厘米）.

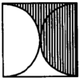


第2讲　不规则图形面积的计算（二）

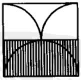
不规则图形的另外一种情况，就是由圆、扇形、弓形与三角形、正方形、长方形等规则图形组合而成的，这是一类更为复杂的不规则图形，为了计算它的面积，常常要变动图形的位置或对图形进行适当的分割、拼补、旋转等手段使之转化为规则图形的和、差关系，同时还常要和“容斥原理”（即：集合 A 与集合 B 之间有：$S_{A\cup B}=S_A+S_B-S_{A\cap B}$）合并使用才能解决.



【例 1】　如右图，在一个正方形内，以正方形的三条边为直径向内作三个半圆．求阴影部分的面积.



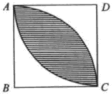
解法 1：把上图靠下边的半圆换成（面积与它相等）右边的半圆，得到右图．这时，右图中阴影部分与不含阴影部分的大小形状完全一样，因此它们的面积相等．所以上图中阴影部分的面积等于正方形面积的一半.



解法 2：将上半个“弧边三角形”从中间切开，分别补贴在下半圆的上侧边上，如右图所示．阴影部分的面积是正方形面积的一半.

解法 3：将下面的半圆从中间切开，分

别贴补在上面弧边三角形的两侧，如右图所示．阴影部分的面积是正方形的一半．



【例 2】 如右图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4 厘米，分别以 B、D 为圆心以 4 厘米为半径在正方形内画圆，求阴影部分面积．

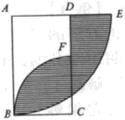
解：由容斥原理

$$S_{阴影}=S_{扇形ACB}+S_{扇形ACD}-S_{正方形ABCD}$$

$$=\frac{\pi}{4}\times AB^2\times 2-AB^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\times 4^2\times 2-4^2$$

$$=16\times\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\approx 16\times\frac{3.14-2}{2}=9.12\text{ 平方厘米}.$$



【例 3】 如右图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$ 厘米，$BC=4$ 厘米，扇形 ABE 半径 $AE=6$ 厘米，扇形 CBF 的半径 $CB=4$ 厘米，求阴影部分的面积．

解：$S_{阴影}=S_{扇形ABE}+S_{扇形CBF}$

$-S_{矩形ABCD}$

$$=\frac{1}{4}\times\pi\times 6^2+\frac{1}{4}\times\pi\times 4^2-6\times 4$$

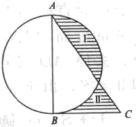
$$=\frac{1}{4}\times\pi(36+16)-24$$

$=13\pi-24=15$（平方厘米）（取 $\pi=3$）．

【例 4】 如右图，直角三角形 ABC 中，AB 是圆的直径，且 $AB=20$ 厘米，如果阴影（Ⅰ）的面积比阴影（Ⅱ）的面积大 7 平方厘米，求 BC 长．

分析 已知阴影（Ⅰ）比阴影（Ⅱ）的面积大 7 平

方厘米，就是半圆面积比三角形 ABC 面积大 7 平方厘米；又知半圆直径 $AB=20$ 厘米，可以求出圆面积．半圆面积减去 7 平方厘米，就可求出三角形 ABC 的面积，进而求出三角形的底 BC 的长．

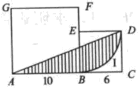


解：BC 的长 $=\left[3.14\times\left(\dfrac{20}{2}\right)^2\div2-7\right]\times2\div20$

$=(157-7)\times2\div20$

$=15$（厘米）．

【例 5】 如右图，两个正方形边长分别是 10 厘米和 6 厘米，求阴影部分的面积．



分析 阴影部分的面积，等于底为 16、高为 6 的直角三角形面积与图中（Ⅰ）的面积之差．而图中（Ⅰ）的面积等于边长为 6 的正方形面积减去 $\frac{1}{4}$ 的以 6 为半径的圆的面积．

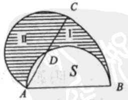
解：$S_{阴影}=S_{三角形ACD}-(S_{正方形BCDE}-S_{扇形EBD})$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(10+6\right)\times6-\left(6\times6-\dfrac{1}{4}\times\pi\times6^2\right)$

$=48-9$（取 $\pi=3$）

$=39$（平方厘米）．

【例 6】 如右图，将直径 AB 为 3 的半圆绕 A 逆时针旋转 $60°$，此时 AB 到达 AC 的位置，求阴影部分的面积（取 $\pi=3$）．



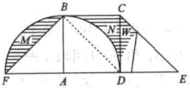
解：整个阴影部分被线段 CD 分为Ⅰ和Ⅱ两部分，以 AB 为直径的半圆被弦 AD 分成两部分，设其中 AD 右侧的部分面积为 S，由于弓形 AD 是两个半圆的公共部分，去掉 AD 弓形后，两个半圆的剩余部分面积相等．即Ⅱ $=S$，由于：

$$\text{Ⅰ}+S=60^\circ\text{圆心角扇形}ABC\text{面积}=\pi\times3^2\div6=\frac{9}{2},$$

$\therefore\quad \text{Ⅰ}+\text{Ⅱ}=\frac{9}{2}.$

$\therefore\quad$ 阴影部分面积是$\frac{9}{2}$.

【例7】 如下图，$ABCD$ 是正方形，且 $FA=AD=DE=1$，求阴影部分的面积．



解：阴影 M 的面积＋阴影 N 的面积＝$\triangle BCD$ 的面积$=\frac{1}{2}$，

阴影 W 的面积＝（正方形面积$-\frac{1}{4}\times$圆面积）$\times\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}\times(1\times1-\frac{1}{4}\times\pi\times1^2)$$

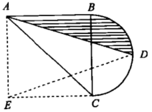
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\ (\text{取}\ \pi=3).$$

$\therefore\quad$ 阴影部分的总面积$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

【例8】 如下页右上图，ABC 是等腰直角三角形，D 是半圆周上的中点，BC 是半圆的直径，且 $AB=BC=10$，

求阴影部分面积（π 取 3.14）.

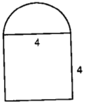
解：$\because$　三角形 ABC 是等腰直角三角形，以 AC 为对角线再作一个全等的等腰直角三角形 ACE，则 $ABCE$ 为正方形（利用对称性质）.



$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{阴影} &= (S_{正方形ABCE}+S_{半圆}-S_{\triangle ADE})\div 2\\ &=(10\times10+\pi\times5^2\div2-\frac{1}{2}\times10\times15)\div2\\ &=(100+39.25-75)\div2\\ &=64.25\div2\\ &=32.125.\end{aligned}$$

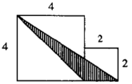
总结：对于不规则图形面积的计算问题一般将它转化为若干基本规则图形的组合，分析整体与部分的和、差关系，问题便得到解决．常用的基本方法有：

一、相加法：这种方法是将不规则图形分解转化成几个基本规则图形，分别计算它们的面积，然后相加求出整个图形的面积．例如，右图中，要求整个图形的面积，只要先求出上面半圆的面积，再求出下面正方形的面积，然后把它们相加就可以了．



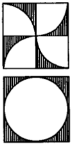
二、相减法：这种方法是将所求的不规则图形的面积看成是若干个基本规则图形的面积之差．例如，右图，若求阴影部分的面积，只需先求出正方形面积再减去里面圆的面积即可．

三、直接求法：这种方法是根据已知条件，从整体出发直接求出不规则图形面积．如右图，欲求阴影部分的面积，通过分析发现它就是一个底是2、高是4的三角形，其面积直接可求为：

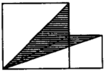


$\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.

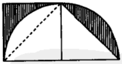
四、重新组合法：这种方法是将不规则图形拆开，根据具体情况和计算上的需要，重新组合成一个新的图形，设法求出这个新图形面积即可．例如，欲求右图中阴影部分面积，可以把它拆开使阴影部分分布在正方形的4个角处，这时采用相减法就可求出其面积了．



五、辅助线法：这种方法是根据具体情况在图形中添一条或若干条辅助线，使不规则图形转化成若干个基本规则图形，然后再采用相加、相减法解决即可．如右图，求两个正方形中阴影部分的面积．此题虽然可以用相减法解决，但不如添加一条辅助线后用直接法作更简便．



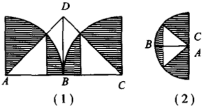
六、割补法：这种方法是把原图形的一部分切割下来补在图形中的另一部分使之成为基本规则图形，从而使问题得到解决．例如，如右图，欲求阴影部分的面积，只需把右边弓形切割下来补在左边，这样整个阴影部分面积恰是正方形面积的一半．



七、平移法：这种方法是将图形中某一部分切割下来平行移动到

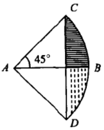
一恰当位置，使之组合成一个新的基本规则图形，便于求出面积．例如，如上页最后一图，欲求阴影部分面积，可先沿中间切开把左边正方形内的阴影部分平行移到右边正方形内，这样整个阴影部分恰是一个正方形．

八、旋转法：这种方法是将图形中某一部分切割下来之后，使之沿某一点或某一轴旋转一定角度贴补在另一图形的一侧，从而组合成一个新的基本规则的图形，便于求出面积．例如，欲求上图（1）中阴影部分的面积，可将左半图形绕 B 点逆时针方向旋转 $180°$，使 A 与 C 重合，从而构成如右图（2）的样子，此时阴影部分的面积可以看成半圆面积减去中间等腰直角三角形的面积．



（1）　　（2）

九、对称添补法：这种方法是作出原图形的对称图形，从而得到一个新的基本规则图形．原来图形面积就是这个新图形面积的一半．例如，欲求右图中阴影部分的面积，沿 AB 在原图下方作关于 AB 为对称轴的对称扇形 ABD．弓形 CBD 的面积的一半就是所求阴影部分的面积．

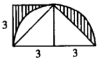


十、重叠法：这种方法是将所求的图形看成是两个或两个以上图形的重叠部分，然后运用“容斥原理”（$S_{A\cup B}=S_A+S_B-S_{A\cap B}$）解决．例如，欲求右图中阴影部分的面积，可先求两个扇形面积的和，减去正方形面积，因为阴影部分的面积恰好是两个扇形重叠的部分．

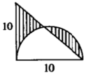
习 题 二

一、填空题（根据图中所给的数据求阴影部分面积）

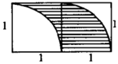
①



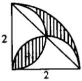
②



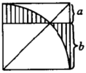
③



④

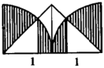


⑤

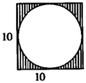


⑥

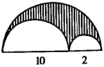
⑦



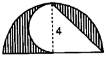
⑧



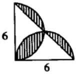
⑨



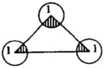
⑩



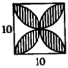
⑪



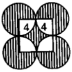
⑫



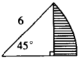
⑬

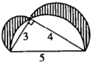


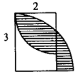
⑭

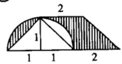


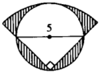
⑮

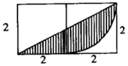
⑯


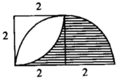
⑰


⑱


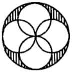
⑲


⑳


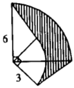
㉑


㉒


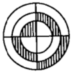
二、解答题：



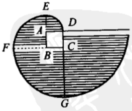
1．如右图，大圆的直径为 4 厘米，求阴影部分的面积。



2．如右图，大扇形半径是 6 厘米，小扇形半径是 3 厘米．求阴影部分的面积．



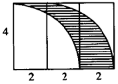
3．如左图，三个同心圆的半径分别是 2、6、10，求图中阴影部分占大圆面积的百分之几？



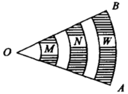
4．如右图，正方形 ABCD 边长为 1 厘米，依次以 A、B、C、D 为圆心，以 AD、BE、CF、DG 为半径画出扇形，求阴影部分的面积．

5．如下图（a），求阴影部分的面积．

6．如下图（b），把 OA 分成 6 个等分，以 O 为圆心画出六个扇形，已知最小的扇形面积是 10 平方厘米，求阴影部分的面积．



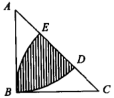
（a）



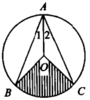
（b）

7．如下图（a），$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，直角边 $AB=2$ 厘米，BE、BD 分别为以 C、A 为圆心，BC、AB 为半径所作的弧．求阴影部分面积．

8．如下图（b），已知半径 $OA=OB=OC=9$ 厘米，$\angle 1=\angle 2=15°$，求阴影部分的面积．



（a）



（b）

习题二解答

一、填空题：

1．阴影部分等于正方形面积的一半,即 4.5(平方单位).

2．阴影部分等于三角形面积的一半,即 25(平方单位).

3．阴影部分等于一个小正方形的面积,即 1(平方单位).

4. 阴影部分等于$\frac{1}{4}$圆的面积减去三角形面积，即 $\pi-2$（平方单位）.

5. 阴影部分等于长是 b、宽是 a 的矩形面积，即 ab（平方单位）.

6. 阴影部分等于半径为 2 的圆面积的$\frac{1}{4}$减去直角边是 2 的等腰直角三角形的面积，即$\frac{1}{4}\times\pi\times2^2-2\times2\div2=\pi-2$（平方单位）.

7. 阴影部分面积等于半圆面积减去等腰直角三角形的面积，即$\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}$(平方单位).

8. 阴影部分面积等于正方形面积减去圆面积，即 $100-25\pi$（平方单位）.

9. 阴影部分面积等于大半圆面积减去中和小两个半圆面积，即 $18\pi-\frac{25}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=5\pi$(平方单位).

10. 阴影部分面积等于大半圆面积减去小半圆面积再减去一个直角三角形面积，即$\frac{1}{2}\times16\pi-(2\pi+4\times4\div2)=6\pi-8$(平方单位).

11. 阴影部分面积等于两个半圆面积之和减去等腰直角三角形面积，即 $\pi\times3^2-\frac{1}{2}\times6\times6=9\pi-18$（平方单位）.

12. 阴影部分面积等于半圆面积，即$\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=\frac{1}{2}\pi$（平方单位）.

13. 阴影部分面积等于 4 个半圆面积减去正方形面积，即 $4\times\frac{1}{2}\times\pi\times5^2-10\times10=50\pi-100$（平方单位）.

14. 阴影部分面积等于 2 个圆面积加上一个正方形面

积，即 $2\times\pi\times4^2+8^2=32\pi+64$（平方单位）.

15. $\frac{1}{4}$个大圆面积减去半个小圆面积，即$\frac{\pi}{2}$（平方单位）.

16. 阴影部分面积等于$\frac{1}{4}$个圆面积与以 6 为直角边的等腰直角三角形面积差的一半，即 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\times\pi\times6^2-\frac{1}{2}\times6^2\right)=9\times\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$（平方单位）.

17. 阴影部分面积等于小半圆面积加中半圆面积减大半圆面积再加直角三角形面积，即$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{4}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times3\times4=6$（平方单位）.

18. 阴影部分面积等于$\frac{1}{4}$个以 2 为半径圆的面积加$\frac{1}{4}$个以 3 为半径圆的面积减长方形面积，即$\frac{13\pi}{4}-6$（平方单位）.

19. 将左边阴影部分割补到右边，所以阴影部分就是这个平行四边形面积，即 2（平方单位）.

20. 扇形面积减去半个圆面积再减去三角形面积等于圆外阴影部分面积，半圆面积减去三角形面积等于圆内阴影部分面积. 上述两个结果的和是$\frac{25\pi-50}{4}$（平方单位），即为所求阴影部分的面积. 或者用圆内两个弓形从下半圆割下，补贴于圆内上半圆两侧. 阴影面积等于$\frac{1}{4}$大圆面积减去对角线长为 5 的正方形面积$=\frac{1}{4}\times\pi\times5^2-4$

$\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}(\pi-2)$（平方单位）.

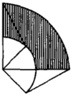
21.π（平方单位）. 阴影面积是以 2 为半径圆面积的$\frac{1}{4}$.

22.4（平方单位）. 阴影面积是以 2 为边长的正方形面积.

二、解答题：

1. 先求大圆面积：即 $3.14\times\left(\frac{4}{2}\right)^2=12.56$，再求 4 个小圆面积，即：$3.14\times(4\div2\div2)^2\times4=12.56$. 再求 4 个小圆重叠部分的面积，即：$\left[\frac{1}{4}\times3.14\times(4\div2\div2)^2-(4\div2\div2)^2\times\frac{1}{2}\right]\times8=2.28$. 最后大圆面积减去 4 个小圆面积与 4 个小圆重叠部分面积差，即 $12.56-(12.56-2.28)=2.28$ 平方厘米，即为所求阴影部分面积.

2. 如右图，把阴影部分下端的一块割下，补在上面的空白部分，这样阴影部分面积等于半径为 6 厘米的圆面积的$\frac{1}{4}$减去半径为 3 厘米圆面积的$\frac{1}{4}$所得的差，即：

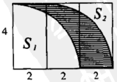


$$\frac{1}{4}\times3.14\times6^2-\frac{1}{4}\times3.14\times3^2=21.195\text{（平方厘米）}.$$

3. 33%.

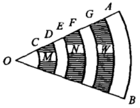
4. 7.5π 平方厘米.

5. 如右图，阴影部分面积 = 矩形面积 $-(S_1+S_2)$. 把 S_2 向左平移 2 个单位，则与 S_1拼成一个边长为 4 的正方形.



∴ 阴影部分面积 $=4\times6-4\times4=8$（平方单位）.

6. 如右图，$OD=2\times OC$，以 OD 为半径的扇形面积是以 OC 为半径的扇形面积的 $2^2=4$ 倍，阴影 M 的面积是以 OC 为半径的扇形面积的 $4-1=3$ 倍，面积为 $10\times3=30$. $OE=3\times OC$，$OF=4\times OC$，以 OE、OF 为半径的扇形，分别是以 OC 为半径的扇形面积的 $3^2=9$ 倍、$4^2=16$ 倍，阴影 N 的面积为：$10\times(4^2-3^2)=70$. $OG=5\times OC$，$OA=6\times OC$，以 OG、OA 为半径的扇形面积，分别是以 OC 为半径的扇形面积的 $5^2=25$ 倍、$6^2=36$ 倍，阴影 W 的面积是以 OC 为半径的扇形面积的 $6^2-5^2=11$ 倍，阴影 W 的面积为 $10\times11=110$，所以阴影部分的总面积为 $30+70+110=210$（平方厘米）.



7. 两个扇形面积是 $3.14\times2\times2\times\frac{45}{360}\times2=3.14$ 平方厘米，$\triangle ABC$ 的面积是 $2\times2\div2=2$ 平方厘米，所以阴影部分面积是：$3.14-2=1.14$ 平方厘米.

8. 解：∵ $OA=OB$，在等腰三角形 $\triangle AOB$ 中，$\angle1=\angle2=15^\circ$，

∴ $\angle AOB=180^\circ-2\times15^\circ=150^\circ$. 同理 $\angle AOC=150^\circ$，

$$\begin{aligned}\therefore\ \angle BOC&=360^\circ-\angle AOB-\angle AOC\\&=360^\circ-(150^\circ+150^\circ)\\&=60^\circ,\end{aligned}$$

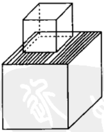
∴ 阴影部分面积是圆面积的 $\frac{1}{6}$，

即 $\frac{1}{6}\times\pi\times r^2=\frac{1}{6}\times3.14\times9^2=42.39$ 平方厘米.

第3讲　巧求表面积

我们已经学习了长方体和正方体，知道长方体或正方体六个面面积的总和叫做长方体或正方体的表面积. 如果长方体的长用 a 表示、宽用 b 表示、高用 h 表示，那么，长方体的表面积 $=(ab+ah+bh)\times 2$. 如果正方体的棱长用 a 表示，则正方体的表面积 $=6a^2$. 对于由几个长方体或正方体组合而成的几何形体，或者是一个长方体或正方体组合而面的几何形体，它们的表面积又如何求呢？涉及立体图形的问题，往往可考查同学们的看图能力和空间想象能力. 小学阶段遇到的立体图形主要是长方体和正方体，这些图形的特点都是可以从六个方向去看，特别是求表面积时，就是上下、左右和前后六个方向（有时只考虑上、左、前三个方向）的平面图形的面积的总和. 有了这个原则，在解决类似问题时就十分方便了.

【例 1】　在一个棱长为 5 分米的正方体上放一个棱长为 4 分米的小正方体（右图），求这个立体图形的表面积.



分析　我们把上面的小正方体想象成是可以向下"压缩"的，"压缩"后我们发现：小正方体的上面与大正方体上面中的阴影部分合在一起，正好是大正方体的上面. 这样这个立体

图形的表面积就可以分成这样两部分：

上下方向：大正方体的两个底面，

侧面：$\begin{cases}\text{小正方体的四个侧面，}\\ \text{大正方体的四个侧面.}\end{cases}$

解：上下方向：$5\times5\times2=50$（平方分米）；

侧面：$5\times5\times4=100$（平方分米），

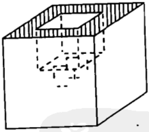
$4\times4\times4=64$（平方分米）.

这个立体图形的表面积为：

$50+100+64=214$（平方分米）.

答：这个立体图形的表面积为 214 平方分米.

【例 2】 下图是一个棱长为 2 厘米的正方体，在正方体上表面的正中，向下挖一个棱长为 1 厘米的正方体小洞，接着在小洞的底面正中向下挖一个棱长为$\frac{1}{2}$厘米的正方体小洞，第三个正方体小洞的挖法与前两个相同，棱长为$\frac{1}{4}$厘米，那么最后得到的立体图形的表面积是多少平方厘米？



分析 这道题的难点是洞里的表面积不易求．在小洞里，平行于上下表面的所有面的面积和等于边长为 1 厘米的正方形的面积，这个边长为 1 厘米的正方形再与图中阴影部分的面积合在一起正好是边长为 2 厘米的正方体的上表面的面积．这个立体图形的表面积分成两部分：

上下方向：2 个边长为 2 厘米的正方形的面积，

$$\text{侧面：}\begin{cases}\text{边长为 2 厘米的 4 个正方形的面积和，}\\ \text{边长为 1 厘米的 4 个正方形的面积和，}\\ \text{边长为}\dfrac{1}{2}\text{厘米的 4 个正方形的面积和，}\\ \text{边长为}\dfrac{1}{4}\text{厘米的 4 个正方形的面积和.}\end{cases}$$

解：平行于上下表面的各面面积之和：

$2\times2\times2=8$（平方厘米）；

侧面：$2\times2\times4=16$（平方厘米），

$1\times1\times4=4$（平方厘米），

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4=1$（平方厘米），

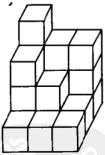
$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times4=\frac{1}{4}$（平方厘米）.

这个立体图形的表面积为：

$8+16+4+1+\frac{1}{4}=29\frac{1}{4}$（平方厘米）.

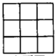
答：这个立体图形的表面积为 $29\frac{1}{4}$平方厘米.

【例 3】　把 19 个棱长为 1 厘米的正方体重叠在一起，按右图中的方式拼成一个立体图形. 求这个立体图形的表面积.

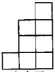


分析　从上下、左右、前后看时的平面图形分别由下面三图表示.

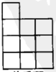
因此，这个立体图形的表面积为：



上下面



左右面



前后面

2 个上面 + 2 个左面 + 2 个前面.

解：上面的面积为：9 平方厘米，

左面的面积为：8 平方厘米，

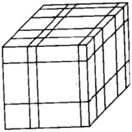
前面的面积为：10 平方厘米.

因此，这个立体图形的表面积为：

$(9+8+10)\times 2=54$（平方厘米）.

答：这个立体图形的表面积为 54 平方厘米.

【例 4】 一个正方体形状的木块，棱长为 1 米，沿着水平方向将它锯成 3 片，每片又按任意尺寸锯成 4 条，每条又按任意尺寸锯成 5 小块，共得到大大小小的长方体 60 块，如下图. 问这 60 块长方体表面积的和是多少平方米？



分析 原来的正方体有六个外表面，每个面的面积是 $1\times 1=1$（平方米），无论后来锯成多少块，这六个外表面的 6 平方米总是被计入后来的小木块的表面积的. 再考虑每锯一刀，就会得到两个 1 平方米的表面，现在一共锯了：$2+3+4=9$（刀），一共得到 18 平方米的表面. 因此，总的表面积为：$6+(2+3+4)\times 2=24$（平方米）.

解：每锯一刀，就会得到两个 1 平方米的表面，

$1\times 2=2$（平方米）

一共锯了：$2+3+4=9$（刀），

得到：$2\times 9=18$（平方米）的表面.

因此，这大大小小的 60 块长方体的表面积的和为：

$6+18=24$（平方米）.

答：这 60 块长方体表面积的和为 24 平方米.

【例 5】 有一些棱长是 1 厘米的正方体，共 1993 个，要拼成一个大长方体，问表面积最小是多少？

解：因为 1993 是一个质数，所以这 1993 个正方体只能摆成长 1993 厘米、宽 1 厘米、高 1 厘米的长方体，因此这个长方体的表面积为：

$1993\times1\times4+1\times1\times2=7974$（平方厘米）.

答：摆成的大长方体表面积最小是 7974 平方厘米.

【例 6】 用 12 个长 5 厘米、宽 4 厘米、高 3 厘米的长方体码放成一个表面积最小的长方体. 码放后得到的这个长方体的表面积是多少？

分析 用这 12 个长方体可以码放出许多种不同的长方体，当然得到的表面积就不会相同. 我们可以把所有不同情况下的长方体的表面积都计算出来，再选出最小值，但这样做，会浪费很多时间，情况还不一定考虑得周全，因此，要考虑有没有巧妙的方法. 先重申一下基本原理：

在体积固定的所有长方体中，只有各棱长相等的立方体，其各棱长之和为最小，其表面积也最小.

因为所给长方体的长、宽、高都已确定，而且已知是 12 个长方体，所以拼成的这个大长方体的体积就已固定（$3\times4\times5\times12=720$ 立方厘米）. 因为这个大长方体的体积不是一个立方数，因而不可能使各棱长都相等，但我们可以使长方体的长、宽、高这三个数尽可能地接近，这样使其各棱长之和为最小，这个大长方体的表面积也最小.

解：一方面 $12=2^2\times3$，另一方面，长、宽、高应尽量接

近，观察到720（立方厘米）＝8（厘米）×9（厘米）×10（厘米），并且有 5×2＝10（厘米），4×2＝8（厘米），3×3＝9（厘米）.

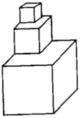
拼成的大长方体的长、宽、高分别为 10 厘米、8 厘米、9 厘米，这时长方体的表面积为：

（10×9＋10×8＋9×8）×2＝484（平方厘米）.

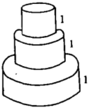
答：码放后得到的这个长方体的表面积为 484 平方厘米.

习　题　三

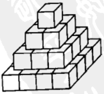
1．如右图所示，由三个正方体木块粘合而成的模型，它们的棱长分别为 1 米、2 米、4 米，要在表面涂刷油漆，如果大正方体的下面不涂油漆，则模型涂刷油漆的面积是多少平方米？



2．将高都是 1 米，底面半径分别是 1.5 米、1 米和 0.5 米的三个圆柱体如右图所示组成一个物体，求这个物体的表面积（π 取为 3.14）.



3．小明小制作时把 6 个棱长分别为 1、2、3、4、5、6（单位：分米）的正方体按由大到小的顺序码放成一个宝塔，并且把重合部分用胶固定粘牢，再把所有外露的部分涂上油漆，交给老师．所有涂上油漆部分的面积是多少平方分米？



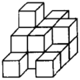
4．有 30 个棱长为 1 米的正方体，在地面上摆成如右图的形式，求这个立体图

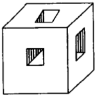
形的表面积是多少平方米?

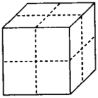
5. 下面 (a) 中的一些积木是由 16 块棱长为 2 厘米的正方体堆成的，它的表面积是多少平方厘米?

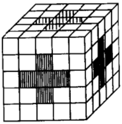
6. 一个正方体的棱长为 4 厘米，在它的前、后、左、右、上、下各面中心各挖去一个棱长为 1 厘米的正方体做成一种玩具，求这个玩具的表面积. 如果把本题的条件“4 厘米”改换为“3 厘米”，那么这个玩具的表面积是多少? (图 (b)).

7. 下图 (c) 中是一个表面被涂上红色的棱长为 10 厘米的正方体木块，如果把它沿着虚线切成 8 个正方体，这些小正方体中没有被涂上红色的所有表面的面积和是多少平方厘米?


(a)


(b)


(c)



8. 有一个棱长为 5 厘米的正方体木块，从它的每一个面看都有一个穿透“十字形”的孔 (如左图阴影部分)，如果将其全部浸入黄漆后取出，晒干后，再切成棱长为 1 厘米的小正方体，这些小正方体未被染上黄漆的面积总和是多少?

习题三解答

1．解：$4\times4+(1\times1+2\times2+4\times4)\times4$

$=100$（平方米）．

答：模型涂刷油漆的面积是100平方米．

2．解：$\pi\times1.5^2\times2+2\pi\times(0.5+1+1.5)\times1$

$=32.97$（平方米）．

答：这个物体的表面积为32.97平方米．

3．解：$6^2\times2+(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\times4$

$=436$（平方分米）．

答：涂上油漆部分的面积是436平方分米．

4．解：$4^2\times2+(1^2+1\times2+1\times3+1\times4)\times4$

$=72$（平方米）．

答：这个立体图形的表面积为72平方米．

5．解：上下方向：$2^2\times9\times2=72$（平方厘米），
前后方向：$2^2\times7\times2=56$（平方厘米），
左右方向：$2^2\times9\times2=72$（平方厘米），
（计算左右方向面积时，请注意底层前部凹进去的二个侧面）．表面积为：$72+56+72=200$（平方厘米）．

答：立体图形的表面积为200平方厘米．

6．解：由于本题所给出的正方体棱长为4厘米，从六个面的中心位置各挖去一个棱长为1厘米的正方体，这样得到的玩具中心部分是实体．

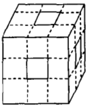
原正方体的表面积为：$4^2\times6=96$（平方厘米）．
在它的六个面各挖去一个棱长为1厘米的正方体后增加的面积为：$1^2\times4\times6=24$（平方厘米），

这个玩具的表面积为：96＋24＝120（平方厘米）.

答：这个玩具的表面积为 120 平方厘米.

如果把本题的条件“4 厘米”改换成“3 厘米”，那么解法就要发生变化，因为挖去六个小正方体后，大正方体的中心部分即与其主体脱离，这时得到的新玩具是镂空的.

把这个玩具分成 20 部分，8 个“角”和12 条“梁”，如右图.



每个“角”为棱长 1 厘米的小正方体，它外露部分的面积为：$1^2\times3=3$（平方厘米），则 8 个“角”外露部分的面积为：$3\times8=24$（平方厘米）.

每条“梁”为棱长 1 厘米的小正方体，它外露部分的面积为：$1^2\times4=4$（平方厘米），则 12 条“梁”外露部分的面积为：

$4\times12=48$（平方厘米）.

这个玩具的表面积为：24＋48＝72（平方厘米）.

答：这个玩具的表面积为 72 平方厘米.

7．解：$10^2\times(3\times2)=600$（平方厘米）

答：这些小正方体中没有被涂上红色的所有表面的面积和为 600 平方厘米.

8．解：①先求切成棱长为 1 厘米的小正方体后，所有这些小正方体的表面积：

把这个几何体分成 20 部分，8 个“角”和 12 条“梁”. 每个“角”有 8 个小正方体，则 8 个“角”共有 $8\times8=64$ 个小正方体.

每条“梁”有 1 个小正方体，则 12 条“梁”共有

$1\times12=12$个小正方体.

所以共有小正方体：$64+12=76$（个），这些小正方体的表面积和为：$1^2\times6\times76=456$（平方厘米）.

② 再求被染上黄漆的面积总和：

8个“角”被染上黄漆的面的个数：

$(4\times6-3)\times8=168$（个）.

12条“梁”被染上黄漆的面的个数：$4\times12=48$（个）.

被染上黄漆的面积总和为：

$1^2\times(168+48)=216$（平方厘米）.

③ 最后求未被染上黄漆的面积总和：

$456-216=240$（平方厘米）.

答：这些小正方体未被染上黄漆的面积总和为240平方厘米.

第4讲 最大公约数和最小公倍数

本讲重点解决与最大公约数和最小公倍数有关的另一类问题——有关两个自然数．它们的最大公约数、最小公倍数之间的相互关系的问题．

定理1　两个自然数分别除以它们的最大公约数，所得的商互质．即如果$(a,b)=d$,那么$(a\div d,b\div d)=1$.

证明：设 $a\div d=a_1$，$b\div d=b_1$，那么 $a=a_1d$，$b=b_1d$．

假设 $(a_1,\ b_1)\neq 1$，可设 $(a_1,\ b_1)=m\ (m>1)$，于是有 $a_1=a_2m$，$b_1=b_2m$．（a_2，b_2 是整数）

所以 $a=a_1d=a_2md$，$b=b_1d=b_2md$．

那么 md 是 a、b 的公约数．

又∵　$m>1$，∵$md>d$．

这就与 d 是 a、b 的最大公约数相矛盾．因此，$(a_1,b_1)\neq 1$ 的假设是不正确的．所以只能是$(a_1,b_1)=1$，也就是$(a\div d,b\div d)=1$．

定理2　两个数的最小公倍数与最大公约数的乘积等于这两个数的乘积．（证明略）

定理3　两个数的公约数一定是这两个数的最大公约数的约数．（证明略）

下面我们就应用这些知识来解决一些具体的问题．

【例1】　甲数是36，甲、乙两数的最大公约数是4，

最小公倍数是288，求乙数.

解法1：由甲数×乙数＝甲、乙两数的最大公约数×两数的最小公倍数，可得

$36\times$乙数$=4\times288$，

乙数$=4\times288\div36$，

解出　乙数$=32$.

答：乙数是32.

解法2：因为甲、乙两数的最大公约数为4，则甲数$=4\times9$，设乙数$=4\times b_1$，且$(b_1, 9)=1$.

因为甲、乙两数的最小公倍数是288，

则　$288=4\times9\times b_1$，

$b_1=288\div36$，

解出　$b_1=8$.

所以，乙数$=4\times8=32$.

答：乙数是32.

【例2】　已知两数的最大公约数是21，最小公倍数是126，求这两个数的和是多少？

解：要求这两个数的和，我们可先求出这两个数各是多少. 设这两个数为a、b，$a<b$.

因为这两个数的最大公约数是21，故设$a=21a_1$，$b=21b_1$，且$(a_1, b_1)=1$.

因为这两个数的最小公倍数是126，

所以　$126=21\times a_1\times b_1$，

于是　$a_1\times b_1=6$，

解出　$\begin{cases}a_1=1\\b_1=6,\end{cases}$　　$\begin{cases}a_1=2\\b_1=3.\end{cases}$

则 $\begin{cases} a=21\times1=21 \\ b=21\times6=126, \end{cases}$ $\begin{cases} a=21\times2=42 \\ b=21\times3=63. \end{cases}$

因此，这两个数的和为 $21+126=147$，或 $42+63=105$.

答：这两个数的和为 147 或 105.

【例 3】　已知两个自然数的和是 50，它们的最大公约数是 5，求这两个自然数.

解：设这两个自然数分别为 a 与 b，$a<b$. 因为这两个自然数的最大公约数是 5，故设 $a=5a_1$，$b=5b_1$，且 $(a_1,b_1)=1$，$a_1<b_1$.

因为　$a+b=50$，　　所以有 $5a_1+5b_1=50$，

$a_1+b_1=10$.

满足 $(a_1, b_1)=1$，$a_1<b_1$ 的解有：

$\begin{cases} a_1=1 \\ b_1=9, \end{cases}$ $\begin{cases} a_1=3 \\ b_1=7. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} a=5\times1=5 \\ b=5\times9=45 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=5\times3=15 \\ b=5\times7=35 \end{cases}$

答：这两个数为 5 与 45 或 15 与 35.

【例 4】　已知两个自然数的积为 240，最小公倍数为 60，求这两个数.

解：设这两个数为 a 与 b，$a<b$，且设 $(a, b)=d$，$a=da_1$，$b=db_1$，其中 $(a_1, b_1)=1$.

因为两个自然数的积 = 两数的最大公约数 × 两数的最小公倍数，

所以　$240=d\times60$，

解出　$d=4$，

所以　$a=4a_1$，$b=4b_1$.

因为 a 与 b 的最小公倍数为 60，

所以　$4\times a_1\times b_1=60$,

于是有　$a_1\times b_1=15$.

解出 $\begin{cases}a_1=1\\b_1=15,\end{cases}$ $\begin{cases}a_1=3\\b_1=5.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a=4\times1=4\\b=4\times15=60\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\times3=12\\b=4\times5=20.\end{cases}$

答：这两个数为 4 与 60 或 12 与 20.

【例 5】　已知两个自然数的和为 54，它们的最小公倍数与最大公约数的差为 114，求这两个自然数.

解：设这两个自然数分别为 a 与 b，$a<b$，$(a,b)=d$，$a=da_1$，$b=db_1$，其中 $(a_1, b_1)=1$.

因为 $a+b=54$，所以 $da_1+db_1=54$.

于是有 $d\times(a_1+b_1)=54$，因此，d 是 54 的约数.

又因为这两个数的最小公倍数与最大公约数的差为 114，

所以　$da_1b_1-d=114$,

于是有　$d\times(a_1b_1-1)=114$,

因此，d 是 114 的约数.

故 d 为 54 与 114 的公约数.

由于 $(54, 114)=6$，6 的约数有：1、2、3、6，根据定理 3，d 可能取 1、2、3、6 这四个值.

如果 $d=1$，由 $d\times(a_1+b_1)=54$，有 $a_1+b_1=54$；又由 $d\times(a_1b_1-1)=114$，有 $a_1b_1=115$.

$115=1\times115=5\times23$，但是 $1+115=116\neq54$，$5+23=28\neq54$，所以 $d\neq1$.

如果 $d=2$，由 $d\times(a_1+b_1)=54$，有 $a_1+b_1=27$；又由 $d\times(a_1b_1-1)=114$，有 $a_1b_1=58$.

$58=1\times58=2\times29$，但是 $1+58=59\neq27$，$2+29=31\neq27$，所以 $d\neq2$.

如果 $d=3$，由 $d\times(a_1+b_1)=54$，有 $a_1+b_1=18$；又由 $d\times(a_1b_1-1)=114$，有 $a_1b_1=39$.

$39=1\times39=3\times13$，但是 $1+39=40\neq18$，$3+13=16\neq18$，所以 $d\neq3$.

如果 $d=6$，由 $d\times(a_1+b_1)=54$，有 $a_1+b_1=9$；又由 $d\times(a_1b_1-1)=114$，有 $a_1b_1=20$.

20 表示成两个互质数的乘积有两种形式：$20=1\times20=4\times5$，虽然 $1+20=21\neq9$，但是有 $4+5=9$，所以取 $d=6$ 是合适的，并有 $a_1=4$，$b_1=5$.

$a=6\times4=24$，$b=6\times5=30$.

答：这两个数为 24 和 30.

【例 6】 已知两个自然数的差为 4，它们的最大公约数与最小公倍数的积为 252，求这两个自然数.

解：设这两个自然数分别为 a 与 b，且 $a>b$，$a=da_1$，$b=db_1$，$(a_1,\ b_1)=1$.

因为 $a-b=4$，所以 $da_1-db_1=4$，于是有 $d\times(a_1-b_1)=4$，因此 d 为 4 的约数.

因为这两个自然数的最大公约数与最小公倍数的积为 252，所以 $d\times da_1b_1=252$，于是有 $d^2\times a_1b_1=(2\times3)^2\times7$，因此 d 为 2×3 的约数.

故 d 为 4 与 2×3 的公约数.

由于 $(4,\ 2\times3)=2$，2 的约数有 1 和 2 两个，所以 d 可能取 1、2 这两个值.

如果 $d=1$，由 $d\times(a_1-b_1)=4$，有 $a_1-b_1=4$；又由 $d^2\times a_1b_1=252$，有 $a_1b_1=252$.

252 表示成两个互质数的乘积有 4 种形式：$252=1\times252=4\times63=7\times36=9\times28$，但是 $252-1=251\neq4$，$63-4=59\neq4$，$36-7=29\neq4$，$28-9=19\neq4$，所以 $d\neq1$.

如果 $d=2$，由 $d\times(a_1-b_1)=4$，有 $a_1-b_1=2$；又由 $d^2\times a_1b_1=252$，有 $a_1b_1=63$.

63 表示为两个互质数的乘积有两种形式：$63=1\times63=7\times9$，但 $63-1=62\neq2$，而 $9-7=2$，且 $(9,7)=1$，所以 $d=2$，并且 $a_1=9$，$b_1=7$.

因此 $a=2\times9=18$，$b=2\times7=14$.

答：这两个数为 18 和 14.

在例 2～例 5 的解答中之所以可以在假设中排除 $a=b$ 这种情形（在各例中都只假设了 $a<b$），分别是由于：例 2 和例 5，若 $a=b$，则 $(a,b)=[a,b]=a$，与条件 $(a,b)\neq[a,b]$ 矛盾；例 3，若 $a=b$，则 $a=b=(a,b)=5$，因此 $a+b=10\neq50$，与条件矛盾；例 4，$a\times b=240$ 不是平方数.

从例题的解答中可以看出，在处理涉及两数的最大公约数或者最小公倍数的很多问题中，经常用到的基本关系是：若两数为 a、b，那么 $a=a_1d$，$b=b_1d$，其中 $d=(a,b)$，$(a_1,b_1)=1$，因此 $[a,b]=da_1b_1$，有时为了确定起见，可设 $a\leqslant b$. 对于很多情形，可以排除 $a=b$ 的情形（如上述所示），而只假设 $a<b$.

习　题　四

1. 已知某数与 24 的最大公约数为 4，最小公倍数为 168，求此数.

2. 已知两个自然数的最大公约数为 4，最小公倍数为 120，求这两个数.

3. 已知两个自然数的和为 165，它们的最大公约数为 15，求这两个数.

4. 已知两个自然数的差为 48，它们的最小公倍数为 60，求这两个数.

5. 已知两个自然数的差为 30，它们的最小公倍数与最大公约数的差为 450，求这两个自然数.

6. 已知两个自然数的平方和为 900，它们的最大公约数与最小公倍数的乘积为 432，求这两个自然数.

习题四解答

1. 此数为 28.

2. 这两个数为 4 与 120，或 8 与 60，或 12 与 40，或 20 与 24.

3. 所求的两个数为 15 与 150，或 30 与 135，或 45 与 120，或 60 与 105，或 75 与 90.

4. 所求的两个数为 60 与 12.

5. 所求的两个数为 41 与 11，或 65 与 35.

6. 解：设所求的两个自然数为 a、b，且 $a<b$，$a=da_1$，$b=db_1$，$(a_1, b_1)=1$，$a_1<b_1$.

由所给的条件得到

$$d^2\times(a_1^2+b_1^2)=900,\ d^2a_1b_1=432.$$

两式相除得

$$\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1b_1}=\frac{900}{432}=\frac{25}{12}.$$

所以 $12\times(a_1^2+b_1^2)=25a_1b_1$.

由于 $(12,25)=1$,

所以 $(a_1^2+b_1^2)\mid 25$, $a_1b_1\mid 12$.

因此 $a_1=3$, $b_1=4$.

代入 $d^2\times(a_1^2+b_1^2)=900$,

得 $d=6$.

所以 $a=18$, $b=24$.

经检验，18、24 为所求.

答：这两个自然数为 18 与 24.

第5讲 同余的概念和性质

你会解答下面的问题吗？

问题1：今天是星期日，再过15天就是“六·一”儿童节了，问“六·一”儿童节是星期几？

这个问题并不难答．因为，一个星期有7天，而$15\div7=2\cdots1$，即$15=7\times2+1$，所以“六·一”儿童节是星期一．

问题2：1993年的元旦是星期五，1994年的元旦是星期几？

这个问题也难不倒我们．因为，1993年有365天，而$365=7\times52+1$，所以1994年的元旦应该是星期六．

问题1、2的实质是求用7去除某一总的天数后所得的余数．在日常生活中，时常要注意两个整数用某一固定的自然数去除，所得的余数问题．这样就产生了“同余”的概念．如问题1、2中的15与365除以7后，余数都是1，那么我们就说15与365对于模7同余．

同余定义：若两个整数a、b被自然数m除有相同的余数，那么称a、b对于模m同余，用式子表示为：

$$a\equiv b\pmod{m}. \qquad (*)$$

上式可读作：

a同余于b，模m．

同余式（*）意味着（我们假设$a\geqslant b$）：

$a-b=mk$，k是整数，即$m\mid(a-b)$．

例如：①$15\equiv 365 \pmod 7$，因为 $365-15=350=7\times 50$.

②$56\equiv 20 \pmod 9$，因为 $56-20=36=9\times 4$.

③$90\equiv 0 \pmod{10}$，因为 $90-0=90=10\times 9$.

由例③我们得到启发，a 可被 m 整除，可用同余式表示为：$a\equiv 0 \pmod m$.

例如，表示 a 是一个偶数，可以写

$a\equiv 0 \pmod 2$

表示 b 是一个奇数，可以写

$b\equiv 1 \pmod 2$

补充定义：若 $m\nmid(a-b)$，就说 a、b 对模 m 不同余，用式子表示是：

$a\not\equiv b \pmod m$

我们书写同余式的方式，使我们想起等式，而事实上，同余式与等式在其性质上相似. 同余式有如下一些性质（其中 a、b、c、d 是整数，而 m 是自然数）.

性质 1：$a\equiv a \pmod m$，（反身性）

这个性质很显然，因为 $a-a=0=m\cdot 0$.

性质 2：若 $a\equiv b \pmod m$，那么 $b\equiv a \pmod m$，（对称性）.

性质 3：若 $a\equiv b \pmod m$，$b\equiv c \pmod m$，那么 $a\equiv c \pmod m$，（传递性）.

性质 4：若 $a\equiv b \pmod m$，$c\equiv d \pmod m$，那么 $a\pm c\equiv b\pm d \pmod m$，（可加减性）.

性质 5：若 $a\equiv b \pmod m$，$c\equiv d \pmod m$，那么 $ac\equiv bd \pmod m$（可乘性）.

性质 6：若 $a\equiv b \pmod m$，那么 $a^n\equiv b^n \pmod m$，（其中 n 为自然数）.

性质 7：若 $ac\equiv bc \pmod m$，$(c,m)=1$，那么 $a\equiv b \pmod m$，（记号 (c,m) 表示 c 与 m 的最大公约数）.

注意同余式性质 7 的条件 $(c,m)=1$，否则像普通等式一样，两边约去，就是错的.

例如　$6\equiv 10 \pmod 4$，而 $3\not\equiv 5 \pmod 4$，因为 $(2,4)\neq 1$.

请你自己举些例子验证上面的性质.

同余是研究自然数的性质的基本概念，是可除性的符号语言.

【例 1】　判定 288 和 214 对于模 37 是否同余，74 与 20 呢？

解：$\because$　$288-214=74=37\times 2$.

$\therefore$　$288\equiv 214 \pmod{37}$.

$\because$　$74-20=54$，　　而 $37\nmid 54$，

$\therefore$　$74\not\equiv 20 \pmod{37}$.

【例 2】　求乘积 $418\times 814\times 1616$ 除以 13 所得的余数.

分析　若先求乘积，再求余数，计算量太大. 利用同余的性质可以使"大数化小"，减少计算量.

解：$\because$　$418\equiv 2 \pmod{13}$，

$814\equiv 8 \pmod{13}$，　　$1616\equiv 4 \pmod{13}$，

$\therefore$　根据同余的性质 5 可得：

$418\times 814\times 1616\equiv 2\times 8\times 4\equiv 64\equiv 12 \pmod{13}$.

答：乘积 $418\times 814\times 1616$ 除以 13 余数是 12.

【例 3】　求 143^{89} 除以 7 的余数.

分析　同余的性质能使"大数化小"，凡求大数的余

数问题首先考虑用同余的性质化大为小．这道题先把底数在同余意义下变小，然后从低次幂入手，重复平方，找找有什么规律．

解法 1：∵　$143 \equiv 3 \pmod 7$

∴　$143^{89} \equiv 3^{89} \pmod 7$

∵　$89 = 64 + 16 + 8 + 1$

而 $3^2 \equiv 2 \pmod 7$，

$3^4 \equiv 4 \pmod 7$，

$3^8 \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7$，

$3^{16} \equiv 4 \pmod 7$，

$3^{32} \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7$，

$3^{64} \equiv 4 \pmod 7$．

∵　$3^{89} \equiv 3^{64} \cdot 3^{16} \cdot 3^8 \cdot 3 \equiv 4 \times 4 \times 2 \times 3 \equiv 5 \pmod 7$，

∴　$143^{89} \equiv 5 \pmod 7$．

答：143^{89}除以 7 的余数是 5．

解法 2：证得 $143^{89} \equiv 3^{89} \pmod 7$ 后，

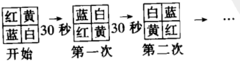
$3^6 \equiv 3^2 \times 3^4 \equiv 2 \times 4 \equiv 1 \pmod 7$，

∴　$3^{84} \equiv (3^6)^{14} \equiv 1 \pmod 7$．

∴　$3^{89} \equiv 3^{84} \cdot 3^4 \cdot 3 \equiv 1 \times 4 \times 3 \equiv 5 \pmod 7$．

∴　$143^{89} \equiv 5 \pmod 7$．

【例 4】　四盏灯如图所示组成舞台彩灯，且每 30 秒钟灯的颜色改变一次，第一次上下两灯互换颜色，第二次左右两灯互换颜色，第三次又上下两灯互换颜色，…，这样一直进行下去．请问开灯 1 小时四盏灯的颜色如何排列？



分析与解答　经观察试验我们可以发现，每经过 4 次互换，四盏灯的颜色排列重复一次，而 1 小时 = 60 分钟 = 120 × 30 秒，所以这道题实质是求 120 除以 4 的余数，因为 $120\equiv0 \pmod 4$，所以开灯 1 小时四盏灯的颜色排列刚好同一开始一样.

【例 5】　设自然数 $N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$，其中 a_0、a_1、a_2、…，a_n 分别是个位，十位，…上的数码，再设 $M=a_0+a_1+\cdots+a_n$，求证：$N\equiv M \pmod 9$.

分析　首先把整数 N 改写成关于 10 的幂的形式，然后利用 $10\equiv1 \pmod 9$.

证明：∵　$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$

$$=a_n\times1\overbrace{00\cdots0}^{n个0}+a_{n-1}\times1\overbrace{00\cdots0}^{n-1个0}+\cdots+\overbrace{a_1\times10}^{1个0}+a_0$$

$$=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$$

又∵　$1\equiv1 \pmod 9$，

$10\equiv1 \pmod 9$，

$10^2\equiv1 \pmod 9$，

…

$10^n\equiv1 \pmod 9$，

上面这些同余式两边分别同乘以 a_0、a_1、a_2、…、a_n，再相加得：

$$a_0+a_1\times10+a_2\times10^2+\cdots+a_n\times10^n$$
$$\equiv a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n \pmod 9,$$

即　$N\equiv M \pmod 9$.

这道例题证明了十进制数的一个特有的性质：

任何一个整数模 9 同余于它的各数位上数字之和.

以后我们求一个整数被 9 除的余数，只要先计算这个整数各数位上数字之和，再求这个和被 9 除的余数即可.

例如，求 1827496 被 9 除的余数，只要先求（$1+8+2+7+4+9+6$），再求和被 9 除的余数.

再观察一下上面求和式. 我们可以发现，和不一定要求出. 因为和式中 $1+8$，$2+7$，9 被 9 除都余 0，求余数时可不予考虑. 这样只需求 $4+6$ 被 9 除的余数. 因此，1827496 被 9 除余数是 1.

有人时常利用十进制数的这个特性检验几个数相加、相减、相乘的结果对不对，这种检查方法叫：弃九法.

弃九法最经常地是用于乘法. 我们来看一个例子.

用弃九法检验乘式 $5483\times9117=49888511$ 是否正确？

因为 $5483\equiv5+4+8+3\equiv11\equiv2 \pmod 9$，

$9117\equiv9+1+1+7\equiv0 \pmod 9$，

所以 $5483\times9117\equiv2\times0\equiv0 \pmod 9$.

但是 $49888511\equiv4+9+8+8+8+5+1+1$

$\equiv8 \pmod 9$，

所以 $5483\times9117\neq49888511$，即乘积不正确.

要注意的是弃九法只能知道原题错误或有可能正确，但不能保证一定正确.

例如，$9875\equiv9+8+7+5\equiv2 \pmod 9$，

$4873\equiv4+8+7+3\equiv4 \pmod 9$，

$32475689\equiv3+2+4+7+5+6+8+9$

$\equiv8 \pmod 9$，

这时，$9875\times4873\equiv2\times4\equiv32475689\pmod 9$.

但观察个位数字立刻可以判定 $9875\times4873\neq32475689$. 因为末位数字 5 和 3 相乘不可能等于 9.

弃九法也可以用来检验除法和乘方的结果.

【例 6】 用弃九法检验下面的计算是否正确：

$23372458\div7312=3544$.

解：把除式转化为：

$3544\times7312=23372458$.

$\because$ $3544\equiv3+5+4+4\equiv7\pmod 9$,

$7312\equiv7+3+1+2\equiv4\pmod 9$,

$\therefore$ $3544\times7312\equiv7\times4\equiv1\pmod 9$,

但 $23372458\equiv2+3+3+8\equiv7\pmod 9$.

而 $1\not\equiv7\pmod 9$

$\therefore$ $3544\times7312\neq23372458$,

即 $23372458\div7312\neq3544$.

【例 7】 求自然数 $2^{100}+3^{101}+4^{102}$ 的个位数字.

分析 求自然数的个位数字即是求这个自然数除以 10 的余数问题.

解：$\because$ $2^{100}\equiv2^{4\times25}\equiv6^{25}\equiv6\pmod{10}$,

$3^{101}\equiv3^{4\times25}\cdot3^1\equiv1^{25}\cdot3^1\equiv3\pmod{10}$,

$4^{102}\equiv(2^2)^{100}\cdot4^2\equiv6\cdot6\equiv6\pmod{10}$,

$\therefore$ $2^{100}+3^{101}+4^{102}\equiv6+3+6\equiv5\pmod{10}$,

即自然数 $2^{100}+3^{101}+4^{102}$ 的个位数字是 5.

习 题 五

1. 验证对于任意整数 a、b，式子

$a\equiv b(\bmod 1)$成立，并说出它的含义.

2. 已知自然数 a、b、c，其中 $c\geqslant 3$，a 除以 c 余 1，b 除以 c 余 2，则 ab 除以 c 余多少？

3. 1993 年的六月一日是星期二，这一年的十月一日是星期几？

4. 求 $3333^{5555}+5555^{3333}$ 被 7 除的余数.

5. 所有自然数如下图排列. 问 300 位于哪个字母下面？

A	B	C	D	E	F	G
1		2		3		4
	7		6		5	
8		9		10		11
	14		13		12	
15		16		…		

6. 数$\overbrace{11\cdots1}^{1993个1}$，被 13 除余多少？（提示：先试除，可知 $13|111111$，而 $1993\equiv1\ (\bmod 6)$）.

7. 用弃九法检验下面运算是否正确：

①$845\times372=315340$；

②$12345\times67891=838114385$；

③$1144192613\div28997=39459$.

8. 求 1993^{100}的个位数字.

习题五解答

1. 例：$\because 1 \mid a-b$，$2\equiv 3 \pmod 1$，$7\equiv 15 \pmod 1$，式子 $a\equiv b \pmod 1$ 的含义是：任意整数 a、b 对模 1 同余．整数是模 1 的同余类．

2. 解：$\because$　$a\equiv 1 \pmod c$，$b\equiv 2 \pmod c$，

　　$\therefore$　$ab=2 \pmod c$

　　即　ab 除以 c 余 2．

3. 1993 年的十月一日是星期五．

4. 解：$\because$　$3333\equiv 1 \pmod 7$，

　　$\therefore$　$3333^{5555}\equiv 1 \pmod 7$．

　又 $\because$　$5555\equiv 4 \pmod 7$，

　　$\therefore$　$5555^{3333}=4^{3333} \pmod 7$．

而　$4^3\equiv 1 \pmod 7$，

$\therefore$　$4^{3333}\equiv (4^3)^{1111}\equiv 1 \pmod 7$，

$\therefore$　$3333^{5555}+5555^{3333}\equiv 1+1\equiv 2 \pmod 7$，

即　$3333^{5555}+5555^{3333}$ 被 7 除余 2．

5. 解：$\because$　$300\equiv 6 \pmod 7$，

　　$\therefore$　300 与 6 在同一列，在 D 下面．

6. 答：余 1．

7. ① 不正确；

　② 不正确；

　③ 不正确．

8. 1．

第6讲 不定方程解应用题

大家已学过简单的列方程解应用题，一般都是未知数个数与方程的个数一样多，例如中国古代著名的“鸡兔同笼”问题.

如果方程（组）中未知数的个数多于方程的个数，此方程（组）称为不定方程（组）.

小学阶段主要是涉及整系数不定方程的整数解. 试看一些例.

【例 1】 有三张扑克牌，牌的数字互不相同，并且都在 10 以内. 把三张牌洗好后，分别发给甲、乙、丙三人. 每人记下自己牌的数字，再重新洗牌、发牌、记数. 这样反复几次后，三人各自记录的数字和分别为 13、15、23. 请问这三张牌的数字是什么?

分析 设三张牌为 x、y、z $(x>y>z)$. 再设共发牌 n 轮（每轮发 3 张）. 记作 $x+y+z=S$.

$n \cdot S=13+15+23=51$.

由于 n 和 S 都是整数，$51=3\times17$. 只有 $n=3$，$S=17$. 现在转变为不定方程：$x>y>z$ 且 $10>x>y>z\geqslant1$ 的条件下：

$x+y+z=17$

求整数解.

由于 x、y、z 均为整数，其最大整数 $x>\frac{1}{3}\times17=$

$5+\frac{2}{3}$，即 $x \geqslant 6$. x 可能值为 6、7、8、9.

第一种情况，$x=6>y>z$，而 $y+z=17-6=11$，而此时 $y+z$ 最多为 $5+4$. 所以 $x \neq 6$.

第二种情况，$x=7>y>z$，$y+z=17-7=10$，只有 $y=6$，$z=4$. 但是丙三次牌数字和为 23，而 23 显然不可能表示为 $\{7, 6, 4\}$ 中任意三个（可以重复的，下同）数之和.

∴　第二种情况 $x=7$ 亦被排除.

第三种情况，$x=8>y>z$，$y+z=17-8=9$，(y, z) 可能情况有 $(7, 2)$；$(6, 3)$；$(5, 4)$.

而 13（甲三次牌数字和）不能表示为 $\{8, 7, 2\}$ 中任意三个数之和，23 不能表示为 $\{8, 6, 3\}$ 和 $\{8, 5, 4\}$ 中任意三个数之和，故 $x=8$ 亦被排除.

第四种情况，$x=9>y>z$，$y+z=17-9=8$，观察知 $y=5, z=3$.（可排除 $\{9, 7, 1\}$ 和 $\{9, 6, 2\}$.）

	第一次	第二次	第三次	行和
甲	5	5	3	13
乙	3	3	9	15
丙	9	9	5	23
列和	17	17	17	51

综上所述，三张牌为 3、5、9.

【例 2】　采购员用一张 1 万元支票去购物. 购单价 590 元的 A 种物若干，又买单价 670 元的 B 种物若干，其中 B 种个数多于 A 种个数，找回了几张 100 元和几张 10 元的（10 元的不超过 9 张）. 如把购 A 种物品和 B 种物品的个数互换，找回的 100 元和 10 元的钞票张数也恰好相反. 问购 A 物几个，B 物几个？

解：设购 A 种物 x 个，购 B 种物为 $x+y$ 个，并设第一次购物找回 r 张 100 元，s 张 10 元，则

$$\begin{cases} x\times 590+(x+y)\times 670+r\times 100+s\times 10=10000 & (1)\\ (x+y)\times 590+x\times 670+s\times 100+r\times 10=10000 & (2)\end{cases}$$

这是 4 个未知数，2 个方程的不定方程组．解方程时，方程变形的一些法则（方程两边同时乘或除以不为 0 的数，方程不变；方程两边同时加或减一个数，方程不变）仍适用．先将（1）（2）两边约去 10，得

$$\begin{cases} 59x+67x+67y+10r+s=1000 & (3)\\ 59x+59y+67x+10s+r=1000 & (4)\end{cases}$$

由于（3）（4）式的右边都等于 1000，因此它们相等，整理后得 $8y+9r-9s=0$，

再在方程两边同时加上 $9s-9r$，得：

$$8y=9(s-r) \qquad (5)$$

由于 y 是大于 0 的整数，所以 $s-r$ 也是整数 >0．

因此 $8|9\cdot(s-r)$，$9|8y$．

应有 $\begin{cases} y=9\cdot k\\ s-r=8\cdot k,\end{cases}$ k 为大于 0 的整数．

但是 s 是 10 元钱的张数，$s\leqslant 9$，r 是 100 元钱的张数，所以 $k=1$，因此 $y=9$，$s-r=8$．显然 $s=9$，$r=1$．

代回（3）式：得到 $x=3$．

所以：$x=3$，$x+y=3+9=12$，$r=1$，$s=9$．采购员购 A 物 3 件，B 物 12 件，找回 1 张 100 元，9 张 10 元．

这两个例题已综合地体现了不定方程的“风味”．

【例 3】 现有 3 米长和 5 米长钢管各 6 根，安装 31 米长的管道，问怎样接用最省料？

解：设 3 米长用 x 根，5 米长用 y 根，列成不定方程：

$3x+5y=31$. 分两种思路求解

$$x=\frac{31-5y}{3}$$

首先 $y\leqslant 6$，$y=6$，5，4，3，2，1，0，

变形 $x=10-\dfrac{5y-1}{3}$，

试 y 值，使 $5y-1$ 是 3 的倍数，

$\begin{cases}y=5,\\x=2,\end{cases}$ $\begin{cases}y=2,\\x=7,\end{cases}$ 但每种管子各有 6 根

所以有唯一解：$x=2$，
$y=5$.

$$y=\frac{31-3x}{5}$$

首先 $x\leqslant 10$，$x=10$，9，…，1，0.

变形 $y=6-\dfrac{3x-1}{5}$，

管子各 6 根，$\therefore x=6$，…，0.

只有 $x=2$，$\dfrac{3x-1}{5}$ 为整数.

所以有唯一解：$x=2$，
$y=5$.

答：用 3 米长的 2 根，5 米长的 5 根.

用同余的知识解不定方程时，可以表达得简明清楚些.

【例 4】　55 人去游园划船，小船每只坐 4 人，大船每只坐 7 人，问要租大、小船各多少只？

解：列不定方程，设大船 x 只，小船 y 只.

$7x+4y=55$.

变形，解出　$y=\dfrac{55-7x}{4}$，因此 $x\leqslant 7$，且

$55-7x\equiv 0 \pmod 4$；

因此　$7x\equiv 55 \pmod 4\equiv 3 \pmod 4$，

但 $7\equiv 3 \pmod 4$，所以 $x\equiv 1 \pmod 4$，

因此 $x=1$，或 $x=5$.

所以有 $x=1$，$y=12$ 以及 $x=5$，$y=5$ 两组解.

【例 5】 王虎用 100 元买油菜籽、西红柿种子和萝卜籽共 100 包. 油菜籽每包 3 元，西红柿种子每包 4 元，萝卜籽 1 元钱 7 包，问他每种各买了多少包?

解：设买油菜籽 x 包，西红柿种子 y 包，则萝卜籽 $(100-x-y)$ 包，列不定方程：$3x+4y+\dfrac{100-(x+y)}{7}=100$，求整数解，两边同乘以 7，得 $21x+28y+100-x-y=700$，也即 $20x+27y=600$.

解出 $x=\dfrac{600-27y}{20}$.

因此 $y\leqslant 22$. 由于 $600\equiv 0 \pmod{20}$，所以 $27y\equiv 0 \pmod{20}$；但 $(27,20)=1$，所以 $y\equiv 0 \pmod{20}$.

因此 $y=20$，$x=3$，$100-x-y=77$.

答：购油菜籽 3 包，西红柿种子 20 包，萝卜籽 77 包.

【例 6】 100 匹马驮 100 筐物品，一匹大马驮 3 筐，一匹中马驮 2 筐，两匹小马驮 1 筐. 问大、中、小马各多少?

解：设大、中、小马的匹数依次为 x、y、z，由题意，列不定方程为：
$$\begin{cases}x+y+z=100,\\ 3x+2y+\dfrac{z}{2}=100.\end{cases}$$

由第一个方程得 $z=100-x-y$，代入第二个方程，并变形，有 $x=\dfrac{100-3y}{5}$，因此 $y\leqslant 33$. 由于 $5\mid 100$，所以 $5\mid 3y$. $y=0, 5, 10, \cdots, 30$. 相应地可以得到 x 和 z. 但 $(3,5)=1$，所以 $5\mid y$. 因此把结果列出：

中马数 y：	0	5	10	15	20	25	30
大马数 x：	20	17	14	11	8	5	2

小马数 z:	80	78	76	74	72	70	68

以上讲了 6 个例子，解不定方程（组）的一般思路和步骤都体现在其中了．这讲介绍的是最基本的整系数整式不定方程求整数解．总之，它要调用解方程时的常用的方程变形公共原则，又时时巧用未知数是整数这一“约定”．当然还有许多其他技巧．至于其他形式的不定方程，如 $x^2+y^2=25$；奇质数 p，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{p}$ 的整数解，留作以后再探索．

习　题　六

1. 小明问小强：“你养了几只兔和鸡?”小强说：“我养的兔比鸡多，鸡兔共 24 条腿，你猜猜我养了几只兔和鸡?”

2. 李明带 6 元钱到花店买花．如果月季花 1 元钱一盆，茉莉花 8 角钱一盆，要把 6 元钱刚好用完．问能买月季花和茉莉花各多少盆?

3. 甲种铅笔 7 分钱一支，乙种铅笔 3 分钱一支，张明用 6 角钱恰好买两种不同的铅笔共多少支?

4. 李大伯下山去小商店买东西．下午 1 时离开家，先走了一段山路，来到山脚下，又走了一段平路，到了小商店．半小时后，他离开商店沿原路返回家，下午 3 时半到家．已知平地每小时走 4 千米，上山每小时走 3 千米，下山每小时走 6 千米．请问：李大伯去商店买东西走了多少千米的路?

5. 大汽车能容纳 54 人，小汽车能容纳 36 人，现有 378 人，问大、小汽车各要几辆才能使每个人都上车且每个车上无空座?

习题六解答

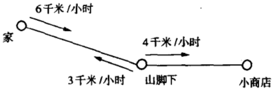
1. 提示：鸡有 2 条腿，兔有 4 条腿.

答：兔有 5 只，鸡有 2 只.

2. 买月季花 2 盆，茉莉花 5 盆或只买 6 盆月季花.

3. 共 16 支或 12 支.

4. 分析



解：设平路有 x 千米，山路有 y 千米. 由题意得：3 小时 30 分钟 − 30 分钟 − 1 小时 = 2 小时，

$$\frac{2x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}=2,$$

经整理得：$x+y=4$，

即　平路段 + 山路段 = 4 千米，

∴　往返路段为 $4\times2=8$（千米）.

5. 共有 4 组解：大车 x 辆，小车 y 辆，$y=10-x-\dfrac{x-1}{2}$，

$x=1，3，5，7$.

∴　只可取 $x=1，3，5，7$.

① 只需 7 辆大车即可.

② 需 5 辆大车，3 辆小车.

③ 需 3 辆大车，6 辆小车.

④ 需 1 辆大车，9 辆小车.

第7讲 从不定方程$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的整数解谈起

对于形如$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的方程，寻找整数 x、y 使之满足方程，称为求不定方程的整数解．这里 n 是取定的一个自然数．对于方程

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \tag{1}$$

显见 $x=y=12$ 是一个整数解．还有没有别的解？如何求解？有人凭直觉能看出一些解来，但数学要求我们有一个成熟的方法去处理同一类问题．

由$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，两边减去$\frac{1}{x}$，得：

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{x}=\frac{1}{y};$$

通分：$\frac{x-6}{6x}=\frac{1}{y}$；因此 $y=\frac{6x}{x-6}$，这里 $x-6$ 大于 0．为了使右端的分数形式更简明，我们不妨把 $x-6$ 看成一个整体，即令 $t=x-6$，那么 $x=t+6$．因此 $y=\frac{6\times(6+t)}{t}=\frac{6\times 6}{t}+6$，由于 y 是整数，上式右边也是整数，所以$\frac{6\times 6}{t}$也必须是整数，这样我们推知：t 是 6^2 的因数（约数）．

由于是求不定方程$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的整数解，这样，原先

“漫无边际”的找两个未知数 x、y 的困难问题，转换成找简单的 6^2 的因子 t 的问题了.

一个完全平方数的因子必然是奇数个，如 6^2 有因子6、1和36，2和18，3和12，4和9.6称为自补的因子.后面的2和18等都称为互补因子，这样，不妨记为：

$t_0=6$，$t_1=1$，$t_1'=36$；$t_2=2$，$t_2'=18$；$t_3=3$，$t_3'=12$；$t_4=4$，$t_4'=9$ 也即 $\frac{6^2}{t_1}=t_1'$；…，$\frac{6^2}{t_4}=t_4'$，

$x=6+t$，$y=\frac{6^2}{t}+6=t'+6$，

$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的所有解表示成$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+t}+\frac{1}{6+t'}$，

这里 t 和 t' 是 $6^2=36$ 的互补因子（当 $t=t'=6$ 时自补因子也包括在内），所以

$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的全部整数解为：

$t_0=t_0'=6$，　$\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$；$\left(\frac{1}{6+6}+\frac{1}{6+6}\right)$

$t_1=1$，$t_1'=36$，　$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$；$\left(\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6+36}\right)$

$t_2=2$，$t_2'=18$，　$\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$；$\left(\frac{1}{6+2}+\frac{1}{6+18}\right)$

$t_3=3$，$t_3'=12$，　$\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$；$\left(\frac{1}{6+3}+\frac{1}{6+12}\right)$

$t_4=4$，$t_4'=9$，　$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$；$\left(\frac{1}{6+4}+\frac{1}{6+9}\right)$

由于 x、y 地位对等，$\frac{1}{x}=\frac{1}{7}$，$\frac{1}{y}=\frac{1}{42}$的解与$\frac{1}{x}=\frac{1}{42}$，$\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$的情况我们都看成一种了.

以上情况推广到一般情况：求不定方程

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \tag{2}$$

的整数解，只要找出 n^2 的全部成组互补因子 t 和 t'，则

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+t}+\frac{1}{n+t'} \tag{3}$$

就可得到全部解.

例如，求不定方程：

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

（即 $n=12$）的整数解，首先分解 $12^2=(2^2\cdot3)^2=2^4\cdot3^2$，它的因子根据分解式的结构特点可以排成一个表.

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
3^0	1	2	4	8	16
3^1	3	6	12	24	48
3^2	9	18	36	72	144

按照互补或自补因子配对有：(1,144),(2,72),(3,48),(4，36)，(6，24)，(8，18)，(16，9)，(12，12).

所以$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$共有 8 种解$\left(\frac{12^2\text{ 的因子个数}+1}{2}=8\right)$：

$\frac{1}{13}+\frac{1}{156}$；　$\frac{1}{14}+\frac{1}{84}$；　$\frac{1}{15}+\frac{1}{60}$；　$\frac{1}{16}+\frac{1}{48}$；

$\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$；　$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$；　$\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$；　$\frac{1}{24}+\frac{1}{24}$.

以上是讨论$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的全部解. 自然会想到如果把上式的$\frac{1}{x}$再分解成两个“单位分数”（分子为 1 分母为整数）的和，那么我们相当于求：

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

的整数解，例如求解

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

可以利用已经求解过的$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的 5 种解，再把其中$\frac{1}{y}$分解成$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，例如$\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$，如此等等.

总之，求解$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$也是有路可循的了. 特别，如 n 是质数，$n=p$，$\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+p^2}$. 除了 $p=2$ 以外，$p+1$ 是合数. 再分裂$\frac{1}{p+1}$，例如，利用 $(p+1)^2$ 有因子 1 和 $(p+1)^2$，因此$\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p+2}+\frac{1}{(p+1)+(p+1)^2}$，

$$\therefore\quad \frac{1}{p}=\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)};\qquad (4)$$

例如，$\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$，

$\frac{1}{5}=\frac{1}{7}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$，

$\frac{1}{7}=\frac{1}{9}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}$.

在这些基本训练基础上，我们很容易把整数 1 分拆为若干个单位分数之和.

分成两部分，唯一方式：$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，

分成三部分，只有 3 种方式：明显的有 $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$，先有 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，再借用$\frac{1}{2}=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+4}=\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+2}$这

两种分解形式（因为 2^2 有互补因子（1，4），（2，2）. 可有

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

并且可断言只有这三种形式．为证明这一论断，先介绍“推广的抽屉原理”（称之为平均值原理更确切）：一个（正）数，分放于几个抽屉中，必有一个抽屉内存放的数大于或等于平均值．(注意，这里的数不局限于整数)

1 分拆为三个单位分数之和，必有一部分$\geqslant\frac{1}{3}$，而$\geqslant\frac{1}{3}$的单位分数只有$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$．不妨设$\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z}$，则$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$或$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$，问题转化成：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad 或 \quad 1=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

对于前一种情况，$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，再用推广的抽屉原理，$\frac{1}{y}$、$\frac{1}{z}$中，不妨设$\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z}$，必有一个$\geqslant\frac{1}{4}$．$\frac{1}{y}$只有$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{3}$两种情况（显然$\frac{1}{y}\neq\frac{1}{2}$）．对于 $y=\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$，分别必有$\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$和$\frac{1}{4}$.归类成$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$和$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$的情况．

对于后一种情况，$1-\frac{1}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，同样用推广的抽屉原理，有$\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$，又$\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$，所以$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$．由$\frac{2}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$得$\frac{1}{z}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，也归类成三种

形式之中．故推断正确．

在某些问题研究中，并不要求马上找出全部解，只要能将一个单位分数分拆为两个单位分数之和即可，这里我们介绍另一种技巧，先看

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}. \tag{5}$$

（我们这里是在讨论单位分数问题时用到（5）式．其实（5）式又可以改变形式写成：

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

它在计算中也有巧妙应用，为保持原问题讨论的连续性，它的具体应用请看习题）．

公式（5）在将整数 1 分裂成若干个单位分数和的求解中，用起来很方便．例如可将 1 分裂为 3 个分母不等的单位分数之和．

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2\times3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

而且，只要不计较分母太大看起来不直观，我们可以把 1 分裂成任意多个单位分数之和，如

$$\begin{aligned}
1&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2} && (2\text{ 项})\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} && (3\text{ 项})\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6} && (4\text{ 项})\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42} && (5\text{ 项})\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42} && (6\text{ 项})\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42} && (7\text{ 项})
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{42} \quad (8\text{ 项})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{56}+\frac{1}{42}$$
（9 项）

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{90}+\frac{1}{72}+\frac{1}{56}+\frac{1}{42}$$
（10 项）.

如果要求你用两种不同的方式把 1 写成 10 个单位分数之和，你不妨在分裂成 9 项时，另选一种方式用公式 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$，如选$\frac{1}{20}=\frac{1}{21}+\frac{1}{420}$，即可.

实际上，公式$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$只是最初讲的$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n+t}+\frac{1}{n+t'}$的特殊情况，只是把 n^2 的互补因子选为 1 和 n^2 而已. 所以基本功在于$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的分解.

上述基本分解还有一种简便一些的算法，它不必分解 n^2 的因子，而只要求分解 n 的所有因子，还以数字 12 为例：$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，把 12（注意不是 12^2）的所有因子由小到大排列：1、2、3、4、6、12，6 个因子任取 2 个配成一个组合，共有 15 种：

(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，6)，(1，12)
(2，3)，(2，4)，(2，6)，(2，12)
(3，4)，(3，6)，(3，12)
(4，6)，(4，12)
(6，12)

对于每一组合 $(a,\ b)$，写成 $1=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$，则有：

$$\frac{1}{12}=\frac{a}{12\ (a+b)}+\frac{b}{12\ (a+b)}$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{12}{a}\right)\ (a+b)}+\frac{1}{\left(\frac{12}{b}\right)\ (a+b)}.$$

例如　(2，3)，$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\times\left(\frac{2}{2+3}+\frac{3}{2+3}\right)$

$$=\frac{1}{\left(\frac{12}{2}\right)\times 5}+\frac{1}{\left(\frac{12}{3}\right)\times 5}$$
$$=\frac{1}{6\times 5}+\frac{1}{4\times 5}=\frac{1}{30}+\frac{1}{20}.$$

所以$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$有 15 种方式. 但这里有重复，如由(1，2)配出的$\frac{1}{12}=\frac{1+2}{12\times\ (1+2)}$和由(2，4)配出的$\frac{1}{12}=\frac{2+4}{12\times\ (2+4)}$是相同的.只要在因子的配组中筛去这种情况即可.

以上讨论相应于不定方程$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. 对于其他分数形式的不定方程，分子不是 1 的，例如

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$

一般同学都可“猜”出$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$，当然还有$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

那么请问是否只有两种方式？答：是. 理由呢？因为由推广的抽屉原理，$\frac{1}{x}$和$\frac{1}{y}$中至少有一个$\geqslant\frac{1}{3}$，$\left(\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)\right)$，也即至少有一个或为$\frac{1}{2}$，或为$\frac{1}{3}$. 从而归于两种形式.

那么难度再增加一些，对不定方程$\frac{2}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$求整数

解呢?

用“灵感来凑”：$\frac{2}{5}=\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{6}{15}=\frac{1+5}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{3}$. 是一种解，最容易的是$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$，那么还有第三种解吗?

用推广的抽屉原理分析:$\frac{2}{5}$分拆成两个部分,当$\frac{1}{x}\neq\frac{1}{y}$时,$\left(\text{不妨设}\frac{1}{x}>\frac{1}{y},\text{也即 } x<y\right)$必有$\frac{1}{x}>\frac{1}{5}$,$\frac{1}{x}$只有 2 种可能$\left(\frac{1}{x}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}\right)$:$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,从而$\frac{1}{y}=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$,或$\frac{1}{y}=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$,合理情况只有在前一种中的$\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$一种，所以

$\frac{2}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的整数解只有$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$及$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$两种.

【例 1】　求不定方程$\frac{13}{15}=\frac{1}{x}+\frac{7}{y}$的整数解.

分析　根据分数运算性质，$\frac{1}{x}+\frac{7}{y}$通分后，分母为最小公倍数〔x，y〕，经约分后分母为 15，所以〔x，y〕为 15，2×15，3×15，…，以下分情况讨论.

①如〔x，y〕$=15$，$x\mid15$，$y\mid15$，又$\frac{7}{y}<1$，y 只能取为 15，此时，$\frac{1}{x}=\frac{13}{15}-\frac{7}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，使$\frac{1}{x}$不是分子为 1 的单位分数，形成矛盾. 所以〔$x$，$y$〕$=15$（因而 $y=15$）的情况应排除.

②如〔x，y〕$=30$，45，60，75，90，…，等情况. 从$\frac{1}{x}=\frac{13}{15}-\frac{7}{y}$来分析，如 y 大于 15，

即 $y>15$，因此$\frac{1}{x}=\frac{13}{15}-\frac{7}{y}>\frac{13}{15}-\frac{7}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，

即$\frac{1}{x}>\frac{2}{5}$，

这样，由于单位分数大于$\frac{2}{5}$的只有$\frac{1}{2}$一种可能情况，因此必须$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，从而$\frac{7}{y}=\frac{13}{15}-\frac{1}{2}=\frac{11}{30}$，$y=\frac{7\times30}{11}$，右端不是整数，矛盾．因而 $y>15$ 也要排除．

③y 是 x 与 y 可能的最小公倍数 30，45，60，…中某一个数的约数；并且 $y>8$（由于$\frac{13}{15}<\frac{7}{8}$），$y<15$．因此 $9\leqslant y\leqslant14$，先试 $y=9$，$\frac{13}{15}-\frac{7}{9}=\frac{39-35}{45}\neq$单位分数，$\therefore$ 排除 $y=9$．同样，也可排除 $y=11$，12，13，14．只有 $y=10$ 一种可能．

当 $y=10$ 时，$\frac{1}{x}=\frac{13}{15}-\frac{7}{10}=\frac{1}{6}$．故

$\frac{13}{15}=\frac{1}{x}+\frac{7}{y}$ 只有一种解 $x=6$，$y=10$．

从上例看出分数形式不定方程求整数解不是很容易的．一些国际一流的数学家也致力于这类问题的研究．如 1950 年，厄尔丢斯（Erd ös）猜想：

对于整数 $n>1$，不定方程$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$有整数解 x、y、z．1964 年中国数学家柯召、孙琦等证明了 $n<4\times10^5=400000$ 时，猜想成立．1965 年有人把 n 推进到 $n<10^7$，1978 年又将 n 推进到了 $n<10^8$．

另有谢平斯基（Sierpinski）猜想：

对每一个 $n>1$，不定方程$\frac{5}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$有整数解．

例如，1984 年中国数学家给出了$\frac{5}{121}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的

全部 21 种解，其中$\frac{5}{121}=\frac{1}{33}+\frac{1}{121}+\frac{1}{363}$就是 21 种之一．有些学者在具体求解时还使用电子计算机来证明．对于大多数小学生来讲，现在功力有限，只能在最简单的情况下一试身手．

【例 2】　求解不定方程$\frac{4}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$　　　（6）

的整数解．

分析　首先应用推广的抽屉原理，不妨先设$x\leqslant y\leqslant z$，$\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$，不小于$\frac{4}{15}$的单位分数只有：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$.

分情况讨论：

① $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，$\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，　　　（7）

② $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$，$\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{7}{15}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.　　　（8）

对于方程（7），再用推广的抽屉原理，有

$\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{3}{20}$，如不要求找出全部解，观察可知：

$\frac{3}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$，$\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{5}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$；有可能还

有对于方程（8），有

$\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{7}{15}\right)=\frac{7}{30}=\frac{1}{\frac{30}{7}}$，$y\leqslant\left[\frac{30}{7}\right]=4$，（这里的记号

$[u]$ 表示不超过 u 的最大整数，如$\left[\frac{30}{7}\right]=4$，$[1.2]=1$，$[0.3]=0$，$[8]=8$ 等等）.

又 $3=x\leqslant y$，这样，$y=3$ 或 $y=4$，代入（8）后知（8）

无解.

如要求（7）的全部解：从 $\frac{1}{y} \geqslant \frac{3}{20}$ 推出 $\frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{\frac{20}{3}}$，$y \leqslant \left[\frac{20}{3}\right]=6$，所以只需对于 $y=2$、3、4、5、6，确定 $\frac{3}{10}-\frac{1}{y}$ 是不是等于单位分数 $\left(\frac{1}{z}\right)$. 容易知道：

当 $y=4$ 时，$\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$，

当 $y=5$ 时，$\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$，

而对于 $y=2$、3、6，$\frac{3}{10}-\frac{1}{y}$ 都不是单位分数，

所以不定方程（6）的全部解为：

$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$，　　$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$.

【例 3】 在算式 $\frac{1}{18}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ 中，求 $x<y<z$ 的整数解.

解：由推广的抽屉原理，$\frac{17}{18}>\frac{1}{x}>\frac{1}{3}\times\frac{17}{18}$，从而

$\frac{18}{17}<x<\frac{3\times18}{17}=3\times\left(1+\frac{1}{17}\right)=3+\frac{3}{17}$.

由于 x 为整数，所以 $2\leqslant x\leqslant 3$. 就 $x=2$，$x=3$ 分别讨论.

情况 1：$x=2$. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{17}{18}-\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$.

再用推广的抽屉原理：$\frac{4}{9}>\frac{1}{y}>\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}$，

从而 $\frac{4}{9}<y<\frac{9}{2}=4+\frac{1}{2}$.

由于 y 是整数，且 $x=2<y$，所以 y 只能取 3 或 4.

有$\frac{1}{z}=\frac{4}{9}-\frac{1}{y}$. 如 $y=3$，$\frac{1}{z}=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，$z=9$，所以 $x=2$，$y=3$，$z=9$ 是一组解.

如 $y=4$，$\frac{1}{z}=\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$，$z$ 不是整数，所以排除 $y=4$.

情况 2：$x=3$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{17}{18}-\frac{1}{3}=\frac{11}{18}$.

再用推广的抽屉原理：$\frac{11}{18}>\frac{1}{y}>\frac{1}{2}\times\frac{11}{18}$，

从而$\frac{18}{11}<y<\frac{36}{11}=3+\frac{3}{11}$.

由于 y 为整数，且 $x=3<y$，因此这样的 y 不存在.

综上分析，不定方程$\frac{1}{18}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ 只有唯一的一组解 $x=2$，$y=3$，$z=9$.

习　题　七

1. 求不定方程$\frac{1}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的全部整数解.

2. 求不定方程$\frac{1}{30}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的整数解中，使 $x+y$ 为最小以及最大的两组解.

3. 应用公式（5）　$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，证明：
$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}=\frac{99}{100}$.

4. 证明：

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{66}+\frac{1}{78}+\frac{1}{91}+\frac{1}{105}+\frac{1}{120}=\frac{7}{8}$.

5．求不定方程$\frac{7}{10}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的整数解，你能求出全部整数解并证明再没有别的解吗？

6．计算

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{98\times99\times100}.$$

习题七解答

1．$\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$.

2．$30^2=2^2\times3^2\times5^2$，为找出它的全部因子，我们这里介绍“字典法则”：

$2^0\cdot3^0\cdot5^0=1$,	$2^0\cdot3^0\cdot5^1=5$,	$2^0\cdot3^0\cdot5^2=25$,
$2^0\cdot3^1\cdot5^0=3$,	$2^0\cdot3^1\cdot5^1=15$,	$2^0\cdot3^1\cdot5^2=75$,
$2^0\cdot3^2\cdot5^0=9$,	$2^0\cdot3^2\cdot5^1=45$,	$2^0\cdot3^2\cdot5^2=225$,
$2^1\cdot3^0\cdot5^0=2$,	$2^1\cdot3^0\cdot5^1=10$,	$2^1\cdot3^0\cdot5^2=50$,
$2^1\cdot3^1\cdot5^0=6$,	$2^1\cdot3^1\cdot5^1=30$,	$2^1\cdot3^1\cdot5^2=150$,
$2^1\cdot3^2\cdot5^0=18$,	$2^1\cdot3^2\cdot5^1=90$,	$2^1\cdot3^2\cdot5^2=450$,
$2^2\cdot3^0\cdot5^0=4$,	$2^2\cdot3^0\cdot5^1=20$,	$2^2\cdot3^0\cdot5^2=100$,
$2^2\cdot3^1\cdot5^0=12$,	$2^2\cdot3^1\cdot5^1=60$,	$2^2\cdot3^1\cdot5^2=300$,
$2^2\cdot3^2\cdot5^0=36$,	$2^2\cdot3^2\cdot5^1=180$,	$2^2\cdot3^2\cdot5^2=900$,

大家都知道英语字典排序规则，先有a部，再看第二个字母的顺序，第二个字母相同时，看第三个字母的顺序，等等．这里因子的幂值正好借用作顺序编号．（当然上题每个因子恰好是2次幂，如别的也一样，如：$2^3\times2^2\times5^1$的因子字典法排序为：

$$\left.\begin{array}{l} 2^0\cdot3^0\cdot5^0,\ 2^0\cdot3^0\cdot5^1, \\ 2^0\cdot3^1\cdot5^0,\ 2^0\cdot3^1\cdot5^1, \\ \underline{2^0\cdot3^2\cdot5^0,\ 2^0\cdot3^2\cdot5^1,} \end{array}\right\}\text{先排 } 2^0 \text{ 的有 6 个}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^1\cdot3^0\cdot5^0,\ 2^1\cdot3^0\cdot5^1, \end{array}\right\}\text{再排 } 2^1 \text{ 的也有 6 个}$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{2^3\cdot3^0\cdot5^0,\ 2^3\cdot3^0\cdot5^1,} \\ 2^3\cdot3^1\cdot5^0,\ 2^3\cdot3^1\cdot5^1, \\ \underline{2^3\cdot3^2\cdot5^0,\ 2^3\cdot3^2\cdot5^1.} \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{最后 } 2^3 \text{ 的也有 6 个,} \\ \text{共有 } 4\times3\times2=24 \text{ 个.)}\end{array}$$

回到本题，30^2 的 27 个因子从小到大按方向“⊋”排序为：

:	1	2	3	4	5	6	9	10	12	15	18	20	25	30
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
:	900	450	300	225	180	150	100	90	75	60	50	45	36	30

其实只要排出 30 以下，另一头用 30^2 的互补因子即可，利用

$$\frac{1}{30}=\frac{1}{30+t}+\frac{1}{30+t'}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

立即知　$x+y=60+t+t'$. 现在问题转化成求 $t+t'$ 的最大最小值问题了. 这里要求小学生会联想和类比，大家知道等积问题的一种结论：面积固定的长方形中，正方形的周长最小. 或者两数乘积不变的情况下，两数相等时和最小.

现在 $t\cdot t'=30^2$ 固定，要 $t+t'$ 最小，当然是 $t=t'=30$，所以 $x+y$ 最小为 120.

那么 $x+y$ 最大，也即 $60+t+t'$ 最大，经前面 t，t' 排成二行的表一看就知为 $60+900+1=961$.

3. 按照公式 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 可得：

$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$， $\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，

$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，…，$\frac{1}{99\times100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$，

因此

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$
$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.$$

4．$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{21}+\frac{1}{28}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，

$\frac{1}{36}+\frac{1}{45}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$，$\frac{1}{55}+\frac{1}{66}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{78}+\frac{1}{91}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$，

$\frac{1}{105}+\frac{1}{120}=\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$，

因此

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{66}+\frac{1}{78}$$
$$+\frac{1}{91}+\frac{1}{105}+\frac{1}{120}$$
$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

5．首先设 $x\leqslant y\leqslant z$，因为显然不会有 $x=y=z$ 的解．由推广的抽屉原理：$\frac{7}{10}>\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{7}{30}$，

$\therefore\quad \frac{10}{7}<x\leqslant\frac{30}{7}=4+\frac{2}{7}$，

又因 x 必须是整数，所以 x 可能的值只有：2、3、4．

① 如 $x_1=2$，$\frac{7}{10}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{5}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，

利用前面知识 5^2 只有两组互补因子（1，25），（5，5），

所以推知（y，z）只有两组解：$\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$，

② 如 $x_2=3$，$\frac{7}{10}-\frac{1}{x_2}=\frac{11}{30}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，

运用推广的抽屉原理．

$\frac{11}{30}>\frac{1}{y}\geqslant\frac{11}{60}$；　$2+\frac{8}{11}=\frac{30}{11}<y\leqslant\frac{60}{11}=5+\frac{5}{11}$，　y 为整数，

∴　y 可能取值为：3、4、5．

如　$y=3$，$\frac{11}{30}-\frac{1}{y}=\frac{11}{30}-\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$，所以$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{z}=\frac{1}{30}$ 是一组解．

如　$y=4$，$\frac{11}{30}-\frac{1}{y}=\frac{11}{30}-\frac{1}{4}=\frac{7}{60}$，$z$ 要求为数，所以要排除 $y=4$．

如　$y=5$，$\frac{11}{30}-\frac{1}{y}=\frac{11}{30}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$，所以$\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$，$\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$ 是一组解．

③如 $x_3=4$，$\frac{7}{10}-\frac{1}{x_3}=\frac{9}{20}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，运用推广的抽屉原理，$\frac{9}{20}>\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{20}\right)$，

$\frac{20}{9}<y\leqslant\frac{40}{9}$，也即 $2+\frac{2}{9}<y\leqslant4+\frac{4}{9}$，

y 为整数，∴　$y=3$、4．

∵　$x\leqslant y$，∴　y 只可能为 4．

如　$y=4$，$\frac{9}{20}-\frac{1}{y}=\frac{9}{20}-\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$，所以$\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{z}=\frac{1}{5}$ 是一组解．

综合情况①②③，所有解为：

$$\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}.$$

6. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{98\cdot99\cdot100}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98\cdot99}-\frac{1}{99\cdot100}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{99\cdot100}\right)$$

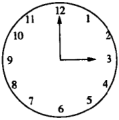
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{19800}$$

$$=\frac{4949}{19800}.$$

第8讲　时钟问题

时钟问题是研究钟面上时针和分针关系的问题．钟面的一周分为 60 格．当分针走 60 格时，时针正好走 5 格．所以时针的速度是分针的 $5\div60=\frac{1}{12}$．分针每走 $60\div\left(1-\frac{5}{60}\right)=65\frac{5}{11}$（分），与时针重合一次．时钟问题变化多端，也存在着不少的学问．这里列出一个基本公式：在初始时刻需追赶的格数 $\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=$ 追及时间（分钟），其中，$1-\frac{1}{12}$ 为分针每分钟比时针多走的格数．

【例 1】　现在是 3 点，什么时候时针与分针第一次重合？



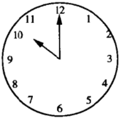
分析　3 点时分针指 12，时针指 3．分针在时针后 $5\times3=15$（个）格．每分钟分针比时针多走 $\left(1-\frac{5}{60}\right)$ 格．要使分针与时针重合，即使分针比时针多走 15 格，需要 $15\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=16\frac{4}{11}$（分钟）．所以，所求的时刻应为 3 点 $16\frac{4}{11}$ 分．

解：$15\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=16\frac{4}{11}$（分钟）

答：所求的时刻应为 3 点 $16\frac{4}{11}$ 分．

【例 2】 在 10 点与 11 点之间，钟面上时针和分针在什么时刻垂直？

分析 分两种情况进行讨论.



①在顺时针方向上分针与时针成 $270°$ 角：

在顺时针方向上当分针与时针成 $270°$ 时，分针落后时针 $60\times(270\div360)=45$（个）格，而在 10 点整时分针落后时针 $5\times10=50$（个）格. 因此，在这段时间内，分针要比时针多走 $50-45=5$（个）格，而每分钟分针比时针多走 $\left(1-\frac{1}{12}\right)$ 个格，因此由基本公式，到达这一时刻所用的时间为：

$$5\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=5\frac{5}{11}\ \text{（分钟）}.$$

②在顺时针方向上分针与时针成 $90°$ 角：

在顺时针方向上当分针与时针成 $90°$ 角时，分针落后时针 $60\times(90\div360)=15$（个）格，而在 10 点整时分针落后时针 $5\times10=50$（个）格，因此在这段时间内，分针要比时针多走 $50-15=35$（个）格，所以到达这一时刻所用的时间为：$35\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=38\frac{2}{11}$（分钟）.

解：①在顺时针方向上当分针与时针成 $270°$ 角时：

$[5\times10-60\times(270\div360)]\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=5\frac{5}{11}$（分钟）.

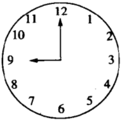
②在顺时针方向上当分针与时针成 $90°$ 角时：

$[5\times10-60\times(90\div360)]\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=38\frac{2}{11}$（分钟）.

答：所求时刻为 10 点 $5\frac{5}{11}$分和 10 点 $38\frac{2}{11}$分.

【例 3】　在 9 点与 10 点之间的什么时刻，分针与时针在一条直线上？

分析　分两种情况进行讨论.



① 分针与时针的夹角为 180°角：

当分针与时针的夹角为 180°角时，分针落后时针 $60\times(180\div360)=30$（个）格，而在 9 点整时，分针落后时针 $5\times9=45$（个）格．因此，在这段时间内分针要比时针多走 $45-30=15$（个）格，而每分钟分针比时针多走$\left(1-\frac{1}{12}\right)$个格，因此，到达这一时刻所用的时间为：$15\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=16\frac{4}{11}$（分钟）.

② 分针与时针的夹角为 0°，即分针与时针重合：

9 点整时，分针落后时针 $5\times9=45$（个）格，而当分针与时针重合时，分针要比时针多走 45 个格，因此到达这一时刻所用的时间为：$45\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=49\frac{1}{11}$（分钟）.

解：① 当分针与时针的夹角为 180°角时：

$[5\times9-60\times(180\div360)]\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=16\frac{4}{11}$（分钟）.

② 当分针与时针的夹角为 0°即分针与时针重合时：

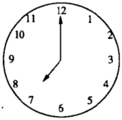
$5\times9\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=49\frac{1}{11}$（分钟）.

答：所求时刻为 9 点 $16\frac{4}{11}$分和 9 点 $49\frac{1}{11}$分.

【例 4】　小明在 7 点与 8 点之间解了一道题，开始

时分针与时针正好成一条直线，解完题时两针正好重合，小明解题的起始时间？小明解题共用了多少时间？

分析 要求小明解题共用了多少时间，必须先求出小明解题开始时是什么时刻，解完题时是什么时刻.



①小明开始解题时的时刻：

因为小明开始解题时，分针与时针正好成一条直线，也就是分针与时针的夹角为 $180°$，此时分针落后时针 $60\times(180\div360)=30$(个)格，而 7 点整时分针落后时针 $5\times7=35$(个)格，因此在这段时间内分针要比时针多走 $35-30=5$(个)格，则这一段时间为：$5\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=5\frac{5}{11}$(分钟). 所以小明开始解题时是 7 点 $5\frac{5}{11}$分.

②小明解题结束时的时刻：

因为小明解题结束时，两针正好重合，那么从 7 点整到这一时刻分针要比时针多走 $5\times7=35$(个)格，因此这一段时间为：$35\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=38\frac{2}{11}$(分钟). 所以小明解题结束时是 7 点 $38\frac{2}{11}$分.

这样小明解题所用的时间就可以求出来了.

解：先求小明开始解题的时刻：

$$[5\times7-60\times(180\div360)]\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=5\frac{5}{11}\text{(分钟)},$$

所以小明开始解题时是 7 点 $5\frac{5}{11}$分.

再求小明结束解题的时刻：

$5\times7\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=38\frac{2}{11}$（分钟），所以小明结束解题时是 7 点 $38\frac{2}{11}$分.

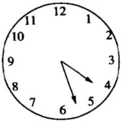
最后求小明解题所用的时间：

7 点 $38\frac{2}{11}$分 − 7 点 $5\frac{5}{11}$分 $=32\frac{8}{11}$（分钟）

答：小明解题共用了 $32\frac{8}{11}$分钟.

【例 5】 一只钟的时针与分针均指在 4 与 6 之间，且钟面上的"5"字恰好在时针与分针的正中央，问这时是什么时刻？

分析　由于现在可以是 4 点多，也可以是 5 点多，所以分两种情况进行讨论：



(a)

① 先设此时是 4 点多：

4 点整时，时针指 4，分针指 12. 从 4 点整到现在"5 在时针与分针的正中央"，分针走的格数多于 25，少于 30，时针走不足 5 格. 由于 5 到分针的格数等于 5 到时针的格数，所以时针与分针在这段时间内共走 30 格. 又由于时针的速度是分针的$\frac{1}{12}$，所以从 4 点整到上图(a)钟面上这种状态共用了：

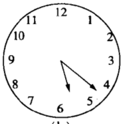
$30\div\left(1+\frac{1}{12}\right)=27\frac{9}{13}$（分钟），

所以这时是 4 点 $27\frac{9}{13}$分.

② 再设此时是 5 点多：

5 点整时，时针指 5，分针指 12. 从 5 点整到现在"5 在时针与分针的正中央"，分针走的格数多于 20 格少于 25

格，时针走的格数不足 5 格，由于 5 到分针的格数等于 5 到时针的格数，所以时针与分针在这段时间内共走 25 格．因此，从 5 点整到图（b）钟面上这种状态共用了 $25\div\left(1+\frac{1}{12}\right)=23\frac{9}{13}$（分钟）．



（b）

所以此时是 5 点 $23\frac{1}{13}$分．

解：① 如果此时是 4 点多，则从 4 点整到上页图（a）钟面上这种状态共用：$30\div\left(1+\frac{1}{12}\right)=27\frac{9}{13}$（分钟）．

② 如果此时是 5 点多，则从 5 点整到上图（b）钟面上这种状态共用：$25\div\left(1+\frac{1}{12}\right)=23\frac{1}{13}$（分钟）．

因此，这时可以是 4 点 $27\frac{9}{13}$分，也可以是 5 点 $23\frac{1}{13}$分．

【例 6】 一只旧钟的分钟和时针每 65 分钟（标准时间的 65 分钟）重合一次．问这只旧钟一天（标准时间 24 小时）慢或快几分钟？

分析 前面已知标准钟每 $65\frac{5}{11}$标准分钟时针、分针重合一次．旧钟每 65 分钟重合一次，显然旧钟快．本题的难点在于从旧钟两针的重合所耗用的 65 标准分钟推算出旧钟时针或分针的旋转速度（每标准分钟旋转多少格），进而推算出旧钟的针 24 标准小时旋转多少格，它与标准钟的针用 24 标准小时所走的格数的差就是旧钟钟面上显示的比标准钟快的时间读数．

设旧钟分针每标准分钟走 x 格．那么，每走 1 格用$\frac{1}{x}$

标准分钟.如用复合单位表示:旧钟分针速度为 x(格/标准分).旧钟分针走 60 格时针走 5 格,时针速度总是分针的$\frac{1}{12}$,所以旧钟时针速度为$\frac{1}{12}x$(格/标准分).每次重合耗用 65 标准分钟,而且两次重合之间分针赶超了时针 60 格,列方程:$60\div\left(x-\frac{1}{12}x\right)=65$.

解此方程,$\frac{60}{65}=\left(1-\frac{1}{12}\right)x$,得 $x=\frac{12\times12}{13\times11}$

标准时间一天有 $60\times24=1440$ 标准分,一天内旧钟分针走的格数为:$\frac{12\times12}{13\times11}\times60\times24$.但是我们只须求出旧钟分针比标准钟分针多走了多少格,即减去 1440 个(标准钟的)格,所以有　$\frac{12\times12}{13\times11}\times60\times24-60\times24$

$$=\left(\frac{12\times12}{13\times11}-1\right)\times60\times24=\frac{144-143}{13\times11}\times60\times24$$

$$=\frac{60\times24}{13\times11}=10\frac{10}{143}\text{(旧钟格)}.$$

但读者一定明白,这 $10\frac{10}{143}$ 只是旧钟上显示的多走的格数,也是旧钟的非标准分钟数.并非标准的分钟数.

解:设这只旧钟的分针用标准时间 1 分钟走 x 格,则旧钟的时针速度为$\frac{1}{12}x$ 格/标准分.

根据旧钟的时针与分针每重合一次耗用 65 标准分钟,列方程得:$60\div\left(x-\frac{1}{12}x\right)=65$,

解出　$x=\frac{144}{13\times11}$,

标准时间一天有 60×24 标准分,标准时间一天内旧钟分针走的格数为:$\frac{144}{13\times11}\times60\times24$ 格.

这只旧钟的分针标准时间一天所走的格数与标准钟分针一天走的格数差为：

$$\frac{144}{13\times 11}\times 60\times 24-60\times 24=10\frac{10}{143}\text{(旧钟格)}.$$

答：这只旧钟在标准时间一天内快 $10\frac{10}{143}$ 分钟（按旧钟上的时间）.

习　题　八

1. 在 6 点和 7 点之间，两针什么时刻重合？

2. 现在是 2 点 15 分，再过几分钟，时针和分针第一次重合？

3. 2 点钟以后，什么时刻分针与时针第一次成直角？

4. 在 7 点与 8 点之间（包含 7 点与 8 点）的什么时刻，两针之间的夹角为 120°？

5. 在 10 点与 11 点之间，两针在什么时刻成一条直线？

6. 一旧钟钟面上的两针每 66 分钟重合一次，这只旧钟在标准时间的一天中快或慢几分钟？

7. 李叔叔下午要到工厂上 3 点的班. 他估计快到上班时间了，到屋里看钟，可是钟早在 12 点 10 分就停了. 他上足发条后忘了拨针，匆匆离家，到工厂一看离上班时间还有 10 分钟. 8 小时工作后夜里 11 点下班，李叔叔回到家里，一看钟才 9 点整. 假定他上班和下班在路上用的时间相同，那么他家的钟停了多长时间？

习题八解答

1. 解：在 6 点整时，分针落后时针 $5\times6=30$（个）格，到分针与时针重合时，分针要比时针多走 30 个格，而每分钟分针比时针多走 $\left(1-\frac{1}{12}\right)$ 个格，所以到达这一时刻所用的时间为：$30\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=32\frac{8}{11}$（分钟）．因此所求的时刻为 6 点$32\frac{8}{11}$分．

答：在 6 点 $32\frac{8}{11}$分时分针与时针重合．

2. 解：在 2 点整时，分针落后时针 $5\times2=10$（个）格，到分针与时针重合时，分针要比时针多走 10 个格，所以到达这一时刻所用的时间为：$10\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=10\frac{10}{11}$（分钟），因为$10\frac{10}{11}<15$，所以 2 点 $10\frac{10}{11}$分不是所求的时刻．现在看 3 点整时，分针落后时针 $5\times3=15$（个）格，到分针与时针重合针时，分针要比时针多走 15 个格，这样到达这一时刻所用的时间为：$15\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=16\frac{4}{11}$（分钟）．所以在 3 点 $16\frac{4}{11}$分时两针第一次重合．所用的时间为：

3 点 $16\frac{4}{11}$分 − 2 点 15 分 $=61\frac{4}{11}$（分钟）．

答：再过 $61\frac{4}{11}$分钟，分针与时针第一次重合．

3. 解：在 2 点整时，分针落后时针 $5\times2=10$（个）格，当分针与时针第一次成直角时，分针超过时针

$60\times(90\div360)=15$（个）格，因此在这段时间内分针要比时针多走 $10+15=25$（个）格，所以到达这一时刻所用的时间为：

$25\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=27\frac{3}{11}$（分钟），所求的时刻为 2 点 $27\frac{3}{11}$ 分.

答：在 2 点 $27\frac{3}{11}$ 分时，分针与时针第一次成直角.

4．解：①当分针落后时针而与时针成 120° 角时：

当分针落后时针而与时针成 120° 角时，分针落后时针 $60\times(120\div360)=20$（个）格，而 7 点整时分针落后时针 $5\times7=35$（个）格，因此在这段时间内分针要比时针多走 $35-20=15$（个）格，所以到达这一时刻所用的时间为：$15\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=16\frac{4}{11}$（分钟）．因此，在 7 点 $16\frac{4}{11}$ 分时，两针之间的夹角为 120°.

②当分针超过时针而与时针成 120° 角时：

当分针超过时针而与时针成 120° 角时，分针超过时针 20 格，而 7 点整时分针落后时针 35 格，因此在这段时间内分针要比时针多走 $35+20=55$（个）格，所以到达这一时刻所用的时间为：$55\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=60$（分钟）．因此，在 7 点 60 分即 8 点整时，两针之间的夹角为 120°.

答：在 7 点 $16\frac{4}{11}$ 分与 8 点整时，两针之间的夹角为 120°.

5．解：①当分针与时针的夹角为 180° 角时：

当分针与时针的夹角为 180° 角时，分针落后时针 $60\times(180\div360)=30$（个）格，而 10 点整时分针落后

时针 $5\times10=50$（个）格，因此在这段时间内分针要比时针多走 $50-30=20$（个）格，所以到达这一时刻所用的时间为：

$20\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=21\frac{9}{11}$（分钟）．因此在 10 点 $21\frac{9}{11}$分时分针与时针在一条直线上．

②当分针与时针的夹角为 $0°$ 即分针与时针重合时：

10 点整时分针落后时针 50 个格，因此当分针与时针重合时分针要比时针多走 50 个格，所以到达这一时刻所用的时间为：$50\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=54\frac{6}{11}$（分钟）．因此在 10 点 $54\frac{6}{11}$分时分针与时针在一条直线上．

答：在 10 点 $21\frac{9}{11}$分与 10 点 $54\frac{6}{11}$分时分针与时针在一条直线上．

6．解：设旧钟在分针用标准时间 1 分钟走 x 格，则旧钟的时针速度为$\frac{1}{12}x$ 格/标准分．

根据旧钟的时针与分针每重合一次耗用 66 标准分钟，列方程得：$60\div\left(x-\frac{1}{12}x\right)=66$，

解出　$x=\frac{120}{121}$．

标准时间一天有 60×24 标准分，标准时间一天内旧钟走的格数为：$\frac{120}{121}\times60\times24$ 格．

则这只旧钟标准时间一天慢：

$60\times24-\frac{120}{121}\times60\times24=11\frac{109}{121}$（旧钟格）．

答：这只旧钟在标准时间一天内慢 $11\frac{109}{121}$分钟（按

旧钟上的时间）.

7. 解法 1：依题意，钟停的时间与上班路上用的时间之和为：14 点 50 分 − 12 点 10 分 = 160（分钟）. 钟停的时间与下班路上用的时间之差为：11 点 − 9 点 = 120（分钟）；因此钟停的时间是：（160 + 120）÷ 2 = 140（分钟）.

答：李叔叔家的钟停了 140 分钟.

解法 2：李叔叔在 12 点 10 分上足发条，到回家时的 9 点钟，共 8 小时 50 分. 这 8 小时 50 分钟扣除早到的 10 分钟及工作的 8 小时，余 40 分钟，这是来回路上用的时间. 因此路上单程要花 40 ÷ 2 = 20（分钟）. 李叔叔到厂的时间是 2 点 50 分，扣除路上的 20 分钟，离家的时间是 2 点 30 分，而他家的钟面上却是 12 点 10 分，中间相差 2 小时 20 分. 这 2 小时 20 分即 140 分钟就是他家钟停了的时间.

答：李叔叔家的钟停了 140 分钟.

第9讲 数学游戏

游戏对策问题因常与智力游戏相结合，因此具有很大的趣味性. 又由于解题方法灵活，技巧性强，所以对开阔解题思路，提高分析问题解决问题的能力是很有益处的.

【例 1】 在一个 3×3 的方格纸中，甲乙两人轮流（甲先）往方格纸中填写 1、3、4、5、6、7、8、9、10 九个数中的一个，数不能重复. 最后甲的得分是不计中间行的上下两行六个数之和，乙的得分是不计中间列的左右两列六个数之和，得分多者为胜. 请你为甲找出一种必胜的策略.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

分析 把题中的九个格标上字母：a、b、c、d、e、f、g、h、i.

甲的得分为：$a+b+c+g+h+i$

$=(a+c+g+i)+(b+h)$；

乙的得分为：$a+d+g+c+f+i$

$=(a+c+g+i)+(d+f)$

要想使甲的得分高于乙的得分，必须且只需使 $b+h>d+f$. 要想使 $b+h>d+f$，甲有两种策略：一是增强自己的实力——使 b、h 格内填的数尽可能地大；二是削弱对方的实力——使 d、f 格内填的数尽可能地小. 下面分两种情况进行讨论：取胜的总策略是“增强自己，削弱对方”两者兼顾.

为了使叙述方便起见，我们分别用（甲 2）和（$a5$）分别表示“甲第二轮”和“在 a 处填数字 5”，其余如（乙 1），（甲 1，$b10$）等含义类同.

一、甲首先使 b、h 处填的数尽可能大. 譬如，（甲 1，$b10$）.

1. 乙为了不输，（乙 1）必须在 h 处填数.（否则，即如（乙 1）不在 h 处填数，（甲 2）在 h 处填余下来的最大数后，无论（乙 2）怎么填，最后总有 $b+h\geqslant 10+8=18>16=9+7\geqslant d+f$，甲胜）. 这样，必须（乙 1，$h1$）.（乙当然在 h 处填最小数）

2.（甲 2）不能在 d 处或 f 处填数.（否则，如（甲 2，dx），x 为任一数，则（乙 2）在 f 处填余下来的最大数后，即有 $d+f\geqslant 3+9=12>11=10+1=b+h$，乙胜）. 当然（甲 2）填 9，譬如（甲 2，$e9$）.（以后，只要甲不填错，即只要把余下数中的最小者填入 d 或 f，就不会输了）

3. 显然，（乙 2，$d8$），乙就不会输了. 因此不分胜负（此时（甲 3）必须（$f3$））.

同样，若（甲 1，$h10$），只要乙应对正确，乙就不会输.

因此，只有

二、甲首先使 d、f 处填的数尽可能小（才有可能必胜）. 譬如，（甲 1，$d1$）.

1. 若（乙 1）不在 f 处填数时，（甲 2）在 f 处填余下来的最小数，则最后必有

$b+h\geqslant 3+5=8>5=1+4\geqslant d+f$，甲胜.

2. 若（乙 1，$f10$）（乙当然在 f 处填最大数），则

（甲 2，$b9$），最后必有

$$b+h \geqslant 9+3=12>11=1+10=d+f，甲胜.$$

因此，只要（甲 1，$d1$），且以后甲每次应对正确，则甲必胜.

解：甲第一轮采用削弱对方策略，把 1 填入 d 格（或 f 格）内，以后无论乙怎样填，甲第二轮“随机应变”，只要把尽可能大的数填入 b 或 h 格内，或者把尽可能小的数填入 f 格（或 d 格）内（在乙没有在 f 或 d 格内填数的情况下），甲都能获胜.

【例 2】　在 4×4 的方格纸上有一粒石子，它放在左下角的方格里. 甲乙二人玩游戏，由甲开始，二人交替地移动这粒石子，每次只能向上、向右或向右上方移动一格，谁把石子移到右上角谁胜. 问甲能取胜吗？如果要取胜，应采取什么办法？

分析　见右图，采用倒推法. 甲要取胜，就必须使乙在移动最后一次石子后，石子落在再移动一次就能移到右上角的那些方格中，即$\ominus_1 \sim \ominus_3$. 而移动一次石子，石子必定落在这三个方格之一的方格只有$\oplus_1$ 和$\oplus_2$，即$\oplus_1$ 和$\oplus_2$ 必须由甲来占领.

$\ominus_4$	$\oplus_4$	$\ominus_1$	
$\ominus_5$	$\ominus_6$	$\ominus_3$	$\ominus_2$
$\ominus_{10}$	$\oplus_3$	$\ominus_7$	$\oplus_2$
	$\ominus_{11}$	$\ominus_8$	$\ominus_9$

这样，如一开始分析的那样，就必须使乙在某一次移动石子后，石子落在再移动一次就能移到$\oplus_1$ 或$\oplus_2$ 的那些方格中，即$\ominus_4 \sim \ominus_9$. 而从哪些方格（除了$\oplus_1$ 和$\oplus_2$ 外）中移动一次石子，石子必定落在$\ominus_1 \sim \ominus_9$ 之一中呢？只有用$\oplus_3$. 因此甲第一次移动石子就必须把石子从左下角移到$\oplus_3$ 中.

这样，所有的格子被分成“胜位”（$\oplus_1 \sim \oplus_3$）和“负位”（$\ominus_1 \sim \ominus_9$）. 自然，上图中的$\ominus_{10}$和$\ominus_{11}$也是负位. 即，谁占据胜位，谁将获胜（若此后他不失误）；谁占负位，谁将
失败（若此后对方不失误）.

解：由以上的分析和上图知，甲要取胜，必须向右上走一格. 然后，乙如果向上走，甲也向上走；乙向右走，甲也向右走；乙向右上走，甲也向右上走. 总之，甲走完第一步以后，乙朝哪个方向走，甲就朝哪个方向走，这样甲就能取胜.

⊕	⊖	⊕	⊖	
⊖	⊖	⊖	⊖	⊖
⊕	⊖	⊕	⊖	⊕
⊖	⊖	⊖	⊖	⊖
●	⊖	⊕	⊖	⊕

如果是 5×5 的方格，甲要取胜，应采取怎样的策略呢？

根据例 2 的分析，我们仍用⊕表示胜位，⊖表示负位，如右图所示. 因此，先移动石子者必输——第一次他只能把石子移动到负位.

【例 3】 甲乙两人玩下面的游戏：有两堆玻璃球，一堆 8 个，另一堆 9 个，甲乙两人轮流从中拿取，每次只能从同一堆中拿，个数（>0）不限. 规定拿到最后一个球的人为输. 问如果甲先拿，他有无必胜的策略？

分析 解这类题的一个常用的方法是从简单的情形讨论起，逐渐找出规律或找出解来.

为了便于叙述，我们用（m，n）表示两堆球，其中一堆有 m 个，另一堆有 n 个.

我们从最简单的情况（1，0）开始讨论.

显然，谁拿过球后两堆球成为（1，0）的状况，则对方必败，因为此时对方只有唯一的一种选择——拿走最后一个球．因此（1，0）是胜位，即谁造成这个局面谁必胜．把这种情形简记为

①（1，0），胜位．

②（a）（n，0），负位，其中 $n>1$；

（对方只需在 n 个球的那堆中拿走 $n-1$ 个，对方就造出（1，0）局面，因而对方胜）．

显然，（b）（1，1），负位；

（c）（n，1），负位，其中 $n>1$．

（对方只需在 n 个球的那堆中的球全拿走，就造出（1，0）局面．）此外，

③（2，2），胜位．（对方拿走1个变（2，1），即②（c）中的情形；拿走2个变（2，0），即②（a）中的情形．对方均负）．因此

④（n，2），负位，其中 $n>2$．

（对方只需在 n 个球的那堆中拿走 $n-2$ 个，对方就占据了胜位（2，2）．）

与③类似，有

⑤（3，3），胜位．（对方一次拿走任意多个后必变为②（a），②（c），④三种负位之一．）　因此

⑥（n，3），负位，其中 $n>3$．

（对方只需在 n 个球的那堆中拿走 $n-3$ 个，对方就占据了胜位（3，3）．）　还有

⑦（4，4），胜位．（对方一次拿走任意多个后必变为②（a），②（c），④，⑥四种负位之一．）　因此

⑧（n，4），负位，其中 $n>4$．

（对方只需在 n 个球的那堆中拿走 $n-4$ 个，对方就占据了胜位（4，4）.）如此等等.

因此，当两堆球的个数相等但不等于1，或只有一堆球，其中只有一个球时，先拿的必输；当个数不相等但不是（1，0），或两堆各有 1 个球时，先拿的必胜（当为（n，0）时，拿走 $n-1$ 个球；当为（n，1）时，拿走 n 个球；否则，从多的一堆中拿走一些，使两堆个数相等）.

解：如果甲先拿，甲有必胜的策略. 甲的具体做法是：从 9 个球的那一堆中拿 1 个，使两堆球数相等，都是 8 个.

此后，乙从一堆中拿球，甲就从另一堆中拿. 如果乙把一堆中的球全拿走，那么甲就比乙少拿一个即可(即就剩下一个球)；如果乙使得一堆球就剩下一个球，那么甲就把另一堆球都拿走；否则，当乙拿几个时，甲也拿同样多的个数. 在前两种情形，因为只剩下一堆球，而且这堆中只有一个球，因此乙必输；在后一种情形两堆球的个数相同，只是比原来少了.

这样，如果每次都是后一种情形，那么甲总能使得乙面临两堆各有 2 个球的局面. 这时，乙只有两种选择：拿 2 个或拿 1 个，然后，甲拿 1 个或拿 2 个，乙也必输.

说明：我们也可用例 2 的分析中的思考方法来解这道题.

5							
4							
3						*	
2							
1							
0							
	0	1	2	3	4	5	6

先如右图画一表格. 其中有“*”的格子表示两堆球的个数分别为 3 和 5. 这个方格记为(3，5)（第四行第六列）. 显然.

(5，3)（第六行第四列）的含义与（3，5）一样（行、列分别为从下到上、从左到右编序）．我们的问题转化为：

在（8，9）格中有一石子（即“有两堆玻璃球，一堆8个，另一堆9个”），甲乙两个轮流移动石子（即“甲乙两人轮流从中拿球”），每次只能向下或向左移动（即“每次只能从一堆中拿”），格数不限（即“个数不限”）．规定把石子移到（0，0）格（即左下角）的人为输（即“规定拿到最后一个球的人为输”）．问如果甲先移（即“甲先拿”），他有无必胜的策略？

8	−	−	−	−	−	−	−	−	+	−
7	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−
6	−	−	−	−	−	−	+	−	−	−
5	−	−	−	−	−	+	−	−	−	−
4	−	−	−	−	+	−	−	−	−	−
3	−	−	−	+	−	−	−	−	−	−
2	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−
1	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
0	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

按照例 2 分析中的思路，我们把解答填在右面的表格里，其中的“+”、“−”分别表示该格为“胜位”和“负位”．如，（1，0）格中的“+”表示谁把石子移动到这一格即会胜．在表格中除了（1，0），（0，1）是胜位外，其余所有的胜位为（n，n），$n=2$，3，4，…．而（8，9）格是负位．因此，开始时石子在（8，9）格中时，如甲先移，甲有必胜的策略，即甲必胜——把石子移到一个标有“+”的格子，即移到（8，8）格中．此时，无论乙怎样移动石子（只要按规定移），他必把石子移到负位．接着，甲又能把石子移到胜位，…．最后，甲必能把石子移到（1，0）格或（0，1）格．因此甲必胜．

请同学们自己推导一下上述填“+”、“−”的过程，并把“移石子”的必胜策略“翻译”成“取玻璃球”的策略．

习 题 九

1. 如果把例 1 中的九个数改为 1、2、3、4、5、6、7、8、10（注意缺少 9），得分少者为胜，甲先填，请你为甲找出一种必胜的策略.

2. 甲乙两人玩轮流从右图中选数的游戏，谁选的数中有三个在同一条直线上（即和为 15），谁就胜. 先选的人有没有必胜的方案？

8	1	6
3	5	7
4	9	2

3. 把例 2 分别改成在 8×8 和 9×9 方格纸上，甲乙两人交替将右上角石子移到左下角，其他规则不变，问谁能有必胜策略？

4. 甲乙两人玩下面的游戏：有三堆玻璃球，A 堆有 29 个，B 堆有 16 个，C 堆有 16 个，甲乙两人依次从中拿取，每次只许从同一堆中拿，至少拿一个，多拿不限，规定拿最后一个者为输. 问如果甲先拿，他有无必胜的策略？

习题九解答

1. 解：为了叙述方便，在右图中标上字母 a、b、c、d、e、f、g、h、i. 此题与例 1 几乎完全一样，只是把 1 改为 10，把 3～10 改为 8～1，把得分多者胜改为得分少者胜. 因此，甲在必胜策略上也相仿，只需把填大

a	b	c
d	e	f
g	h	i

（小）数改为填小（大）数．具体如下（记号见例 1）：

（甲 1，$d10$）．①若（乙 1）不在 f 处填数，则（甲 2）在 f 处填余下来的最大数．甲胜．

②若（乙 1，$f1$）（乙当然在已方 f 处填最小数），则(甲 2,$b2$)．甲胜．

2．解：1、3、7、9 这四个数各有两种可能使三个数在一条直线上，2、4、6、8 各有三种可能，5 有四种可能．

设甲先选．为了取胜，甲自然选 5．乙选 2．有以下几种可能：

①甲选 4，乙必选 6，甲必选 7，乙必选 3．无胜负．（甲选 6 与选 4 类似）．

②甲选 9，乙必选 1，甲选任一已不能获胜．（甲选 7 与选 9 类似）．

③甲选 1，3 是类似的，显然不能获胜．

④甲选 8 也显然不能获胜．

如果甲不先选 5，而先选其他任一数，乙即选 5．显然无胜负．因此先选者无必胜策略．

3．由例 2 知，采用倒推法分析得下图

−	−	−	−	−	−	−	●
+	−	+	−	+	−	+	−
−	−	−	−	−	−	−	−
+	−	+	−	+	−	+	−
−	−	−	−	−	−	−	−
+	−	+	−	+	−	+	−
−	−	−	−	−	−	−	−
	−	+	−	+	−	+	−

+	−	+	−	+	−	+	−	●
−	−	−	−	−	−	−	−	−
+	−	+	−	+	−	+	−	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−
+	−	+	−	+	−	+	−	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−
+	−	+	−	+	−	+	−	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−
	−	+	−	+	−	+	−	+

我们仍然用“+”表示胜位，“-”表示负位.
对于 8×8 的棋盘，先走的人有必胜的策略.
对于 9×9 的棋盘，后走的人有必胜的策略.

4．解：根据例3，当只有两堆球，且两堆球的个数相同且个数不等于1时，先拿的必败．所以甲先取时，甲把A堆中的29个球全部取走，这时留给乙的是两堆球数相同且个数不等于1的局面．然后按照两堆球游戏的策略，甲就能获胜.

第10讲 逻辑推理（一）

由于数学学科的特点，通过数学的学习来培养少年儿童的逻辑推理能力是一种极好的途径．为了使同学们在思考问题时更严密更合理，会有根有据地想问题，而不是凭空猜想，这里我们专门讨论一些有关逻辑推理的问题．

解答这类问题，首先要从所给的条件中理清各部分之间的关系，然后进行分析推理，排除一些不可能的情况，逐步归纳，找到正确的答案．

【例1】 公路上按一路纵队排列着五辆大客车．每辆车的后面都贴上了该车的目的地的标志．每个司机都知道这五辆车有两辆开往 A 市，有三辆开往 B 市；并且他们都只能看见在自己前面的车的标志．调度员听说这几位司机都很聪明，没有直接告诉他们的车是开往何处的，而让他们根据已知的情况进行判断．他先让第三个司机猜猜自己的车是开往哪里的．这个司机看看前两辆车的标志，想了想说“不知道”．第二辆车的司机看了看第一辆车的标志，又根据第三个司机的“不知道”，想了想，也说不知道．第一个司机也很聪明，他根据第二、三个司机的“不知道”，作出了正确的判断，说出了自己的目的地．

请同学们想一想，第一个司机的车是开往哪儿去的；他又是怎样分析出来的？

解：根据第三辆车司机的“不知道”，且已知条件只有两辆车开往 A 市，说明第一、二辆车不可能都开往 A 市.（否则，如果第一、二辆车都开往 A 市的，那么第三辆车的司机立即可以断定他的车一定开往 B 市）.

再根据第二辆车司机的“不知道”，则第一辆车一定不是开往 A 市的.（否则，如果第一辆车开往 A 市，则第二辆车即可推断他一定开往 B 市）.

运用以上分析推理，第一辆车的司机可以判断，他一定开往 B 市.

【例 2】 李明、王宁、张虎三个男同学都各有一个妹妹，六个人在一起打羽毛球，举行混合双打比赛. 事先规定. 兄妹二人不许搭伴.

第一盘，李明和小华对张虎和小红；

第二盘，张虎和小林对李明和王宁的妹妹.

请你判断，小华、小红和小林各是谁的妹妹.

解：因为张虎和小红、小林都搭伴比赛，根据已知条件，兄妹二人不许搭伴，所以张虎的妹妹不是小红和小林，那么只能是小华，剩下就只有两种可能了.

第一种可能是：李明的妹妹是小红，王宁的妹妹是小林；

第二种可能是：李明的妹妹是小林，王宁的妹妹是小红.

对于第一种可能，第二盘比赛是张虎和小林对李明和王宁的妹妹. 王宁的妹妹是小林，这样就是张虎、李明和小林三人打混合双打，不符合实际，所以第一种可能是不成立的，只有第二种可能是合理的.

所以判断结果是：张虎的妹妹是小华；李明的妹妹

是小林；王宁的妹妹是小红．

【例 3】　“迎春杯”数学竞赛后，甲、乙、丙、丁四名同学猜测他们之中谁能获奖．甲说：“如果我能获奖，那么乙也能获奖．”乙说：“如果我能获奖，那么丙也能获奖．”丙说：“如果丁没获奖，那么我也不能获奖．”实际上，他们之中只有一个人没有获奖．并且甲、乙、丙说的话都是正确的．那么没能获奖的同学是____．

解：首先根据丙说的话可以推知，丁必能获奖．否则，假设丁没获奖，那么丙也没获奖，这与“他们之中只有一个人没有获奖”矛盾．

其次考虑甲是否获奖，假设甲能获奖，那么根据甲说的话可以推知，乙也能获奖；再根据乙说的话又可以推知丙也能获奖，这样就得出 4 个人全都能获奖，不可能．因此，只有甲没有获奖．

【例 4】　数学竞赛后，小明、小华、小强各获得一枚奖牌，其中一人得金牌，一人得银牌，一人得铜牌．王老师猜测：“小明得金牌；小华不得金牌；小强不得铜牌．”结果王老师只猜对了一个．那么小明得____牌，小华得____牌，小强得____牌．

分析　逻辑问题通常直接采用正确的推理，逐一分析，讨论所有可能出现的情况，舍弃不合理的情形，最后得到问题的解答．这里以小明所得奖牌进行分析．

解：①若“小明得金牌”时，小华一定“不得金牌”，这与“王老师只猜对了一个”相矛盾，不合题意．

②若小明得银牌时，再以小华得奖情况分别讨论．如果小华得金牌，小强得铜牌，那么王老师没有猜对一个，不合题意；如果小华得铜牌，小强得金牌，那么王

老师猜对了两个，也不合题意．

③若小明得铜牌时，仍以小华得奖情况分别讨论．如果小华得金牌，小强得银牌，那么王老师只猜对小强得奖牌的名次，符合题意；如果小华得银牌，小强得金牌，那么王老师猜对了两个，不合题意．

综上所述，小明、小华、小强分别获铜牌、金牌、银牌符合题意．

【例 5】 有三只盒子，甲盒装了两个 1 克的砝码；乙盒装了两个 2 克的砝码；丙盒装了一个 1 克、一个 2 克的砝码．每只盒子外面所贴的标明砝码重量的标签都是错的．聪明的小明只从一只盒子里取出一个砝码，放到天平上称了一下，就把所有标签都改正过来了．你知道这是为什么吗？

分析 解决本题的关键是确定打开哪只盒子：若打开标有“两个 1 克砝码”的盒子，则该盒的真实内容是“两个 2 克砝码”或“一个 1 克砝码，一个 2 克砝码”，当取出的是 2 克砝码时，就无法对其内容作出准确的判断．同样，打开标有“两个 2 克砝码”的盒子时，也会出现类似的情况．所以，应打开标有“一个 1 克砝码，一个 2 克砝码”的盒子．而它的真实内容应该是“两个 1 克砝码”或“两个 2 克砝码”．

①若取出的是 1 克砝码，则该盒一定装有两个 1 克砝码，从而标有“两个 2 克砝码”的盒子里，不可能是两个 2 克或两个 1 克的砝码，而只能是一个 1 克，一个 2 克的砝码了；标有“两个 1 克砝码”的盒子自然装有两个 2 克砝码．

②若取出的是 2 克砝码，同理可知，此盒装有两个 2

克砝码；标有“两个 1 克砝码”的盒子里实际上是一个 1 克和一个 2 克的砝码；标有“两个 2 克砝码”的盒子里实际上是两个 1 克砝码.

按以上的推理结果，小明就将全部标签改正过来了.

【例 6】　四人打桥牌，某人手中有 13 张牌，四种花色样样有；四种花色的张数互不相同. 红桃和方块共 5 张；红桃与黑桃共 6 张；有两张将牌（主牌）. 试问这副牌以什么花色的牌为主？

解：①假设红桃为主. 那么红桃有 2 张；方块有 3 张；黑桃有 4 张，因为共 13 张牌，所以草花有 4 张，这样，黑桃为草花张数相同. 与已知条件“四种花色的张数互不相同”矛盾，即红桃不是主牌.

②假设方块为主牌. 那么方块有 2 张；红桃有 3 张；则黑桃也有 3 张，亦与已知矛盾.

③假设草花为主牌. 那么草花有 2 张. 并且推得红桃 + 方块 + 黑桃共有 11 张牌. 而已知“红桃和方块共 5 张，红桃与黑桃共 6 张”，即得红桃 + 方块 + 红桃 + 黑桃共 11 张牌. 由此得到红桃的张数应为零. 与已知条件“四种花色样样有”相矛盾. 说明草花不是主牌.

由以上推理得知，黑桃必为主牌. 即黑桃有 2 张；红桃有 4 张；方块有 1 张. 那么草花有 6 张.

【例 7】　S、B、J、R 四人分别获数学、英语、语文和逻辑学四个学科的奖学金，但他们都不知道自己获得的是哪一门获学金. 他们相互猜测：

S：“R 得逻辑学奖”；

B：“J 得英语奖”；

J：“S 得不到数学奖”；

R："B 得语文奖".

最后发现，数学和逻辑学的获奖者所作的猜测是正确的，其他两人都猜错了. 那么他们各得哪门学科的奖学金?

分析 假设 S 猜对，即 R 得逻辑学奖. 由已知条件"逻辑学获奖者所作的猜测是正确的"，则 R 猜对，那么 B 得语文奖，并且 J、B 均猜错. 而由 B 猜错，可知 J 得数学奖，S 只好得英语奖，这又说明 J 猜"S 得不到数学奖"是正确的. 与前面的推理（J 猜错）矛盾. 所以 S 的猜测是错误的.

解：S 猜错，即 R 得不到逻辑学奖，S 不得数学奖且不得逻辑学奖. 由此可知，J 的猜测是正确的. 则 J 得数学或逻辑学奖. 于是推得，B 猜错，故 R 猜对，即 B 得语文奖，S 得英语奖，所以 R 得数学奖，J 得逻辑学奖.

【例 8】 A、B、C 三人进行小口径步枪射击比赛，每个人射击 6 次，并且都得了 71 分. 三人共 18 次的得分情况，从小到大排列为：

1，1，1，2，2，3，3，5，5，10，10，10，20，20，20，25，25，50.

已知 A 首先射击两次，共得 22 分；C 第一次射击只得 3 分，请根据条件判断，是谁击中了靶心（击中靶心得 50 分）?

解：我们先来推断 A 6 次射击的情况. 已知前两次得 22 分，6 次共得 71 分，从

$$71-22=49$$

可知，击中靶心的决不会是 A. 另一方面，在上面 18 个数

中，两数之和等于 22 的只可能是 20 和 2．再来推算一下四个数之和等于 49 的可能性．首先，在这四个数中，如果没有 25，是绝不可能组成 49 的．其次，由于 $49-25=24$，则如果没有 20，任何三个数也不能组成 24．而 $24-20=4$，剩下的两个数显然只能是 1 和 3 了．所以 A 射击 6 次的得分（不考虑得分顺序）应该是

20，2，25，20，3，1．

（可在前面 18 个数中，划去上述 6 个数）．

再来推断击中靶心的人 6 次得分的情况．从

$71-50=21$

可知，要在前面 12 个未被划去的数中，取 5 个数，使其和是 21．可以断定，这 5 个数中，必须包括一个 10，一个 5，一个 3，一个 2，一个 1．即 6 次得分情况为

50，10，5，3，2，1．

在前面 12 个未被划去的数中，划去上面这 6 个数．

剩下的 6 个数

25，20，10，10，5，1

就是第三个人的得分情况了．

从这 6 个数中没有 3，而 C 第一次得了 3 分，可知这 6 个数是 B 射击的得分数．因此 C 是击中靶心的人．

【例 9】　在一个俱乐部里，有老实人和骗子两类成员，老实人永远说真话，骗子永远说假话．一次我们和俱乐部的四个成员谈天，我们便问他们："你们是什么人，是老实人？还是骗子？"这四个人的回答如下：

第一个人说："我们四个人全都是骗子．"

第二个人说："我们当中只有一个人是骗子．"

第三个人说："我们四个人中有两个人是骗子．"

第四个人说："我是老实人."

请判断一下，第四个人是老实人吗？

解：①四个人当中一定有老实人. 因为如果四个人都是骗子，则谁也不会说"我们四个人全都是骗子". 所以第一个人为骗子.

② 第二个人为骗子. 因为如果他是老实人，说实话，由于我们已经判断了第一个人是骗子，则第二、三、四个人都是老实人. 但第三个人的回答与他矛盾，两人不可能是同类的，故第二个人说的是假话，他是骗子.

下面再看第三个人的回答：如果第三个人是编子，则由①可知，第四个人一定是老实人；若第三个人是老实人，那么由他的话知他和第四个人是老实人. 因而无论第三个人是骗子还是老实人，都可以推出第四个人是老实人.

所以，第四个人是老实人.

【例 10】 某医院内科病房，A、B、C、D、E、F、G 七名护士每周轮流安排一个夜班. 已经知道：A 的夜班比 C 的夜班晚一天，D 的夜班比 E 的夜班的前一天晚三天，B 的夜班比 G 的夜班早三天；F 的夜班在 B 和 C 的夜班的正中间，而且是在星期四. 问每个护士分别在星期几值夜班？

解：除 F 以外，可将已知条件归纳如下：CA，E ____ D，B ____ ____ G. 这里的横线表示空位.

可见 CA 不能排在 B ____ ____ G 中间，否则 F 就无法排在 BC 的正中间了. 又 F 必排在三个空位之一，因此还有两个空位必定是 E ____ D 和 B ____ ____ G 交叉填空. 于是可排出：$EBDFG$ 或 $BFEGD$ 两种情况，而

CA 只能加在任何一端，那么就有 CAEBDFG，EBDFGCA，CABFEGD 和 BFEGDCA 四种排位. 其中只有排位 EBDFGCA 才能满足已知条件"F 在 BC 的正中间". 所以七名护士值班排序是：E 星期一值班，B 星期二值班，D 星期三值班，F 星期四值班，G 星期五值班，C 星期六值班，A 星期日值班.

习　题　十

1. 有一个珠宝店发生了一起盗窃案，被盗走了许多珍贵的珠宝. 经过几个月的侦破，查明作案的人肯定是 A、B、C、D 中的一个，把这四个人当作重大嫌疑犯进行审讯，这四个人有这样的口供：

A："珠宝店被盗那天，我在别的城市，所以我是不可能作案的."

B："D 是罪犯."

C："B 是盗窃犯，他曾在黑市上卖珠宝."

D："B 与我有仇，陷害我."

因为口供不一致，无法判断谁是罪犯，经过进一步调查知道，这四个人只有一个说的是真话. 你知道罪犯是谁吗？

2. 甲、乙、丙、丁四位同学的运动衫上印有不同的号码.

赵说："甲是 2 号，乙是 3 号."

钱说："丙是 4 号，乙是 2 号."

孙说："丁是 2 号，丙是 3 号."

李说："丁是 4 号，甲是 1 号."

又知道赵、钱、孙、李每人都只说对了一半，那么丙的号码是几？

3. 对某班同学进行了调查，知道如下情况：

①有哥哥的人没有姐姐；

②没有哥哥的人有弟弟；

③有弟弟的人有妹妹.

试问：

(1) 有姐姐的人一定没有哥哥，对吗？

(2) 有弟弟的人一定没有哥哥，对吗？

(3) 没有哥哥的人一定有妹妹，对吗？

4. 某校办数学竞赛，A、B、C、D、E 五位同学得了前五名，发奖前，老师让他们猜一猜各人的名次排列情况.

A 说：B 第三名，C 第五名.

B 说：E 第四名，D 第五名.

C 说：A 第一名，E 第四名.

D 说：C 第一名，B 第二名.

E 说：A 第三名，B 第四名.

老师说：每个名次都有人猜对. 那么，这五名同学的名次是怎样排列的？

习题十解答

1. 根据 B、D 两人的话矛盾，可知两句话中必有一句真话，一句假话．假设 B 说真话，那么 D 是罪犯，而 A 也说了真话，产生了矛盾，所以只有 D 说真话，其余三人均说假话，则 A 偷了珠宝．

2. 直接推理可得，由于每人只说对一半，且只有李提到了 1 号，故甲是 1 号，从而逐步推出：乙是 3 号，丙是 4 号，丁是 2 号．

3. 根据条件①得到（1）是对的；
"有弟弟且有哥哥"并不与①②③矛盾，因此得到（2）是不对的；根据条件②③得到（3）是对的；

4. 名次排列为：C、B、A、E、D 解法如第 2 题．

第11讲　逻辑推理（二）

上一讲我们介绍了有关逻辑推理问题的简单例子，它并没有用到专门的数学原理，而是直接运用正确推理，解决逻辑问题的．这一讲我们将利用图表解决一些较为复杂的逻辑推理问题．

【例 11】　一次数学考试，共六道判断题．考生认为正确的就画“√”，认为错误的就画“×”．记分的方法是：答对一题给 2 分；不答的给 1 分；答错的不给分．已知 A、B、C、D、E、F、G 七人的答案及前六个人的得分记录在表中，请在表中填出 G 的得分，并简单说明你的思路．

题号＼考生	A	B	C	D	E	F	G
1		√	√	√	×	×	√
2	√		×	×	√	×	×
3	√	×		√	×	×	×
4	√	√	×		×	√	√
5	√	×	√	√		×	√
6	√	√	×	×	×		×
得分	7	5	5	5	9	7	

分析　由于 E 得了 9 分，说明他只答错了一道题．先假定答错的是第 1 题，这样就有一个标准答案，并由此可分析其他人的得分．如出现矛盾，再假定 E 答错的是第 2 题，…，直到判断出 E 答错的题号为止．有了正确的答案，就可以写出 G 的得分．

解：假设 E 的第 1 题答错，那么 A 至少错 3 道题，一题未答，最多得 5 分，与 A 得 7 分矛盾．所以 E 第 1 题答对．

假设 E 第 2 题答错，可知 A 最多得 3 分，矛盾．所

以 E 第 2 题答对.

假设 E 第 3 题答错，则 B 最多得 3 分，矛盾. 所以 E 第 3 题答对.

假设 E 第 6 题答错，则 D 最多得 3 分，矛盾. 所以 E 第 6 题答对.

由于 E 得 9 分，因此 E 只答错一题，因此 E 第 4 题答错，于是 A 的第 2、4 两题对，3、6 两题错. 而 A 得 7 分，说明 A 的第 5 题是对的. 由 A、E 两人的答案，可得一标准答案如下表：

题号	1	2	3	4	5	6
答案	×	√	×	√	√	×

按此标准评分，与题中所给 A、B、C、D、E、F 得分相符合，所以 E 的第 4 题确实答错了. 上表的答案是正确的. 故可知 G 得 8 分.

【例 12】　李英、赵林、王红三人参加全国小学生数学竞赛，他们是来自金城、沙市、水乡的选手，并分别获得一、二、三等奖. 现在知道：

①李英不是金城的选手；

②赵林不是沙市的选手；

③金城的选手不是一等奖；

④沙市的选手得二等奖；

⑤赵林不是三等奖.

根据上述情况，王红是____的选手，他得的是____等奖.

解：为了便于分析，我们画表帮助思考.

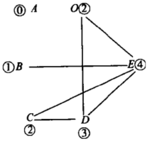
	金城	沙市	水乡
李英	×	2	
赵林		×	1
王红	3		

根据条件①②，在相应的格中打上“×”.

由条件④得出：如果王红是沙市的选手，他得二等奖，那么由条件③可知：金城选手不是一等奖，只能是三等奖．又因为李英不是金城选手，只有赵林得三等奖．这与条件⑤矛盾．所以王红不是沙市选手，沙市选手应该是李英，他得二等奖．这样金城的选手只能是王红，他得三等奖．

【例 13】 李云和他哥哥参加一次集会，同时出席的还有其他两对兄弟．见面后有的人握手问候，没有人和自己的兄弟问候，也没有人和同一个人握两次手．事后李云发现除自己外每个人握手次数互不相同，问李云握了几次手？李云的哥哥握了几次手？

解：设除李云（用 O 表示）之外的五个人分别是 A、B、C、D、E，他们握手的次数分别是 0 次、1 次、2 次、3 次、4 次，那么他们的握手情况可以用右图来表示，其中一条连线表示握过手一次，没有连线即表示没握过手．



从图中很容易看出：李云握手 2 次．

那么，谁是李云的哥哥呢？因为 A 是唯一没有和 E 握过手的人，所以 A、E 是一对兄弟．D 只和 A、B 没握过手，而 A 已经是 E 的兄弟了，所以 B、D 也是一对兄弟．这样只剩下 C 是李云的哥哥，他握手的次数也为

2 次.

【例 14】　红、黄、蓝、白、紫五种颜色的珠子各一颗，分别用纸包着，在桌子上排成一行，有 A、B、C、D、E 五个人，猜各包珠子的颜色，每人只猜两包.

A 猜：第二包是紫的，第三包是黄的；

B 猜：第二包是蓝的，第四包是红的；

C 猜：第一包是红的，第五包是白的；

D 猜：第三包是蓝的，第四包是白的；

E 猜：第二包是黄的，第五包是紫的.

猜完后，打开各纸包一看发现每人都只猜对了一包，并且每包只有一人猜对. 请你判断他们各猜对了哪一包？

解：我们把题目中的条件列成一个表，就更清楚了.

	一	二	三	四	五
A		紫	黄		
B		蓝		红	
C	红				白
D			蓝	白	
E		黄			紫

根据已知条件，每一包都只有一人猜对，而第一包只有 C 猜，所以 C 猜对了第一包，是红的；又根据每人只猜对了一种，所以 C 猜第五包是白的，猜错了；第五包只有 C、E 两人猜，所以 E 猜第五包是紫的，猜对了；那么 E 猜第二包是黄的，猜错了；紫颜色的珠子，只有 A、E 两人猜，那么 A 猜第二包是紫的，猜错了；第二包有 A、B、E 三人猜，其中 A、E 都猜错了，所以 B 猜第二包是蓝的，猜对了；那么 B 猜第四包是红的，猜错了；D 猜第三包是蓝的，也猜错了；所以 A 猜对的是第三包，是黄的；D 猜对的是第四包，是白的.

总结以上推理判断，A 猜对了第三包是黄的，B 猜对了第二包是蓝的，C 猜对了第一包是红的，D 猜对了第四包是白的，E 猜对了第五包是紫的.

注　如果题中只给了一个条件："每人都只猜对了一包"，你能判断他们都猜对了哪包吗？

【例 15】　有 A、B、C 三个足球队，每两队都比赛一场，比赛结果是：A 有一场踢平，共进球 2 个，失球 8 个；B 两战两胜，共失球 2 个；C 共进球 4 个，失球 5 个，请你写出每队比赛的比分.

分析　解决本题首先要明白两点常识：

①一个队踢进一个球，对方就失去一个球，所以三个队的总进球数应等于总失球数；

②两个队踢平，显然该场球的进、失球的总数应相等.

根据已知条件，可以列成表格如下：

球　队	胜场数	负场数	平场数	进球数	失球数
A			1	2	8
B	2				2
C				4	5

解：已知每两个队要赛一场，一共要赛三场球．B 是两战两胜，显然一场胜 A，另一场胜 C；A 踢平一场无疑是与 C 比赛的这场球.

由总进球数等于总失球数，则 B 队的进球数应为 9 个.

因为 A 与 C 两队进球总数是 6 个，那么除去 A、C

对 B 的那两场球赛中，踢进 B 队的那 2 球外，剩下的 4 个球便是 A 与 C 踢平那一场中双方各自踢进对方的进球数的和，因此 A 与 C 踢成 2 比 2.

现在从 C 的进球数分析，由于 C 进球 4 个，除去与 A 两平外，另外进的两个球是对 B 比赛进的球数；再从 C 的失球数分析，因为 C 对 A 失两球，表中 C 共失了 5 个球，因此另外失的 3 个球就是对 B 失的球数．所以 C 对 B 是 2 比 3.

再因为 B 进球共 9 个，除去对 C 进的 3 个球，那么对 A 就进了 6 个球，A 对 B 没有进球，所以 B 对 A 是 6 比 0.

【例 16】　北京至福州列车里坐着 6 位旅客：A、B、C、D、E、F．分别来自北京、天津、上海、扬州、南京和杭州，已知

①A 和北京人是医生；E 和天津人是教师；C 和上海人是工程师．

②A、B、F 和扬州人参过军，而上海人从未参军．

③南京人比 A 岁数大；杭州人比 B 岁数大；F 最年轻．

④B 和北京人一起去扬州；C 和南京人一起去广州．

试根据已知条件确定每位旅客的住址和职业．

分析　由于职业可由住址确定，所以只需考虑确定旅客的住址．

解：下面我们利用表格进行推理．表格中记号“√”表示这个人是来自这个城市；记号“×”表示这个人不来自这个城市．

由①可知，A、C、E 既不是北京人，也不是天津、

上海人；由②可知，A、B、F 不是上海人，也不是扬州人．于是得到 D 是上海人．那么他不是其他城市的人．如图（a）．

城市＼旅客	北京	天津	上海	扬州	南京	杭州
A	×	×	×	×		
B			×	×		
C	×	×	×			
D	×	×	√	×	×	×
E	×	×	×			
F			×	×		

（a）

由③知，A 和 F 不是南京人，那么 A 一定是杭州人．而其他旅客都不是杭州人．如下图（b）．

由④可知，B 不是北京人，也不是南京人；C 不是南京人，那么 B 是天津人，C 是扬州人；故 F 是北京人，E 是南京人．如下图（c）．

城市＼旅客	北京	天津	上海	扬州	南京	杭州
A	×	×	×	×	×	√
B			×	×		×
C	×	×	×			×
D	×	×	√	×	×	×
E	×	×	×			×
F			×	×	×	×

(b)

城市＼旅客	北京	天津	上海	扬州	南京	杭州
A	×	×	×	×	×	√
B	×	√	×	×	×	×
C	×	×	×	√	×	×
D	×	×	√	×	×	×
E	×	×	×	×	√	×
F	√	×	×	×	×	×

(c)

综合上述推理，我们得到：

A 是医生，来自杭州；　　B 是教师，来自天津；

C 是工程师，来自扬州；　　D 是工程师，来自上海；

E 是教师，来自南京；　　F 是医生，来自北京．

【例 17】　甲、乙、丙三人分别在北京、天津、上海的中学教数学、物理、化学．已知

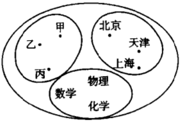
①甲不在北京；　　②乙不在天津；

③在北京的人不教化学；　　④在天津的人教数学；

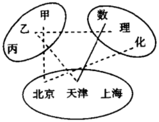
⑤乙不教物理.

根据以上情况判断，甲、乙、丙三人分别在何处教何课程？

分析　根据已知条件，我们把人、地区、科目这三类分别用点表示在三个集合内. 规定：两者之间有关系用实线连接，没有关系用虚线连接. 这样把问题转化为用图进行推理（如图（a））. 据此，下面的结果是显然的：①如果某一点用虚线连接某一个集合的两个点，则这点与这一集合内的第三个点应连实线；②如果在以不同集合内的点为顶点的三角形中两条边是实线，则第三条边也应该是实线. 这样，上述三角形中若一条边为虚线，另一条边为实线，则第三条边一定为虚线. 这两条结论是解题的依据. 解题的关键是找到三个以实线为边的三角形.



(a)

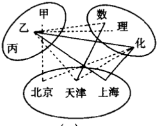


(b)

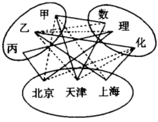
解：根据题意，甲与北京、乙与天津、乙与物理、北京与化学之间连虚线；天津与数学之间连实线（如上图（b））. 这样，根据上面的结论，乙与数学应连虚线，乙与化学应连实线.

从而天津与化学连虚线，上海与化学连实线，乙与上海连实线（如下页图（c）），即乙在上海教化学. 由图（c）进一步可以看出，甲与上海应连虚线，甲与天津连

实线．因而甲与数学连实线（如下页图（d））．由此得出：甲在天津教数学，而余下就是丙在北京教物理．



(c)



(d)

习题十一

1．A、B、C、D 四位同学参加 60 米赛跑的决赛．赛前，四位同学对比赛结果各说了如下的一句话：

A 说："我会得第一名．"

B 说："A、C 都不会取得第一名．"

C 说："A 或 B 会得第一名．"

D 说："B 会得第一名．"

结果有两位同学说对了．试问：谁会获得这次决赛的第一名？

2．A、B、C、D 四人同住一间寝室，其中一人在修指甲，一人在洗头，一人在画画，另一人在看书，已知：

① A 不在修指甲，也不在看书；

② B 不在画画，也不在修指甲；

③ 若 A 不在画画，则 D 不在修指甲；

④ C 既不在看书，也不在修指甲；

⑤ D 不在看书，也不在画画．

请问：他们各自在干什么？

3. 张、王、李三人分别出生在北京、上海和武汉，他们分别是歌唱演员、相声演员和舞蹈演员．已知：①小王不是歌唱演员，小李不是相声演员；②歌唱演员不出生在上海；③相声演员出生在北京；④小李不出生在武汉．试分别确定他们的出生地和职业．

4. 有甲、乙、丙、丁四人同住在一座四层的楼房里，他们之中有工程师、工人、教师和医生．如果已知：

①甲比乙住的楼层高，比丙住的楼层低，丁住第四层；

②医生住在教师的楼上，在工人的楼下，工程师住最低层．

试问：甲、乙、丙、丁各住在这座楼的几层？各自的职业是什么？

习题十一解答

1. 利用图表可得 A 是第一名．

2. 方法 1：由①②③④⑤知，既不是 A、B 在修指甲，也不是 C 在修指甲，以及 A、C、D 不在看书，所以 B 在看书，修指甲的是 D．但“D 修指甲”与③的有条件的结论矛盾．所以③的条件是不成立的．这就得到 A 在画画．由④知 C 在洗头．

方法 2：可用图表法进行推理．

3. 小李是上海人，舞蹈演员；小王是北京人，相声演员；小张是武汉人，歌唱演员．

4. 甲：教师，住二层；乙：工程师，住一层；丙：医生，住三层；丁：工人，住四层．

第12讲 容斥原理

在很多计数问题中常用到数学上的一个包含与排除原理，也称为容斥原理．为了说明这个原理，我们先介绍一些集合的初步知识．

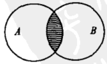
在讨论问题时，常常需要把具有某种性质的同类事物放在一起考虑．如：$A=$｛五（1）班全体同学｝．我们称一些事物的全体为一个集合．$A=$｛五（1）班全体同学｝就是一个集合．

【例1】 $B=$｛全体自然数｝$=\{1,2,3,4,\cdots\}$是一个具体有无限多个元素的集合．

【例2】 $C=$｛在1，2，3，…，100中能被3整除的数｝$=\{3,6,9,12,\cdots,99\}$是一个具有有限多个元素的集合．

集合通常用大写的英文字母A、B、C、…表示．构成这个集合的事物称为这个集合的元素．如上面例子中五（1）班的每一位同学均是集合A的一个元素．又如在例1中任何一个自然数都是集合B的元素．像集合B这种含有无限多个元素的集合称为无限集．像集合C这样含有有限多个元素的集合称为有限集．有限集合所含元素的个数常用符号$|A|$、$|B|$、$|C|$、…表示．

记号$A\cup B$表示所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合．就是右边示意图中两个圆所覆盖的部分．集合



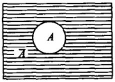
$A\cup B$ 叫做集合 A 与集合 B 的并集．“$\cup$”读作“并”，“$A\cup B$”读作“A 并 B”．

【例 3】　设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，集合 $B=\{2,4,6,8\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$．元素 2、4 在集合 A、B 中都有，在并集中只写一个．

记号 $A\cap B$ 表示所有既属于集合 A 也属于集合 B 中的元素的全体．就是上页图中阴影部分所表示的集合．即是由集合 A、B 的公共元素所组成的集合．它称为集合 A、B 的交集．符号“$\cap$”读作“交”，“$A\cap B$”读作“A 交 B”．如例 3 中的集合 A、B，则 $A\cap B=\{2,4\}$．

下面再举例介绍补集的概念．

【例 4】　设集合 $I=\{1,3,5,7,9\}$，集合 $A=\{3,5,7\}$．$\overline{A}=\{$属于集合 I，但不属于集合 A 的全体元素$\}=\{1,9\}$．



我们称属于集合 I 但不属于集合 A 的元素的集合为集合 A 在集合 I 中的补集（或余集），如右图中阴影部分表示的集合（整个长方形表示集合 I）．常记作 $\overline{A}$．

如例 4 中 $\overline{A}=\{1,9\}$ 就是集合 A 在集合 I 中的补集．

显然，A 和 $\overline{A}$ 没有公共元素，即 $A\cap\overline{A}=\varnothing$（$\varnothing$ 表示空集，即没有元素的集合）．

此外，$A\cup\overline{A}=I$．

对于两个没有公共元素的集合 A 和 B，显然有

$$|A\cup B|=|A|+|B|.$$

例如，$A=\{1,2,\cdots,100\}$，$B=\{101\}$，则

$A\cup B=\{1, 2, \cdots, 100, 101\}$，$A\cap B=\varnothing$，
所以$|A\cup B|=101=100+1=|A|+|B|$.

如果集合 A 与 B 有公共元素，例如

$A=\{1,2,\cdots,100\}$，$B=\{90,91,\cdots,101\}$，

则 $A\cap B=\{90,91,\cdots,100\}$，$A\cup B=\{1,2,\cdots,101\}$.
此时，$|A\cup B|$与$|A|+|B|$有什么关系呢？在这个例中，
$|A\cup B|=101$，$|A|+|B|=100+12=112$.
所以 $|A\cup B|=|A|+|B|-11$.

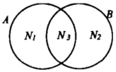
我们注意到，11 恰为 $A\cap B$ 的元素个数. 这是合理的，因为在求$|A\cup B|$时，90，91，…，100 这 11 个数各被计入一次，而在求$|A|+|B|$时，这 11 个数各被计入两次（即多算了一次），并且这 11 个数组成的集合恰为 $A\cap B$. 因此得到

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|, \qquad (1)$$

这就是

关于两个集合的容斥原理：集合 A 与 B 的并的元素个数，等于集合 A 的元素个数与集合 B 的元素个数的和，减去集合 A 与 B 的交的元素个数.

(1) 是容斥原理的第一个公式. 我们还可以用右图来说明. 如图我们用 N_1、N_2、N_3 分别表示 $A\cup B$ 中互不重叠的部分的元素个数.



可见：$|A|=N_1+N_3$，$|B|=N_2+N_3$，$|A\cap B|=N_3$.
因此$|A\cup B|=N_1+N_2+N_3=(N_1+N_3)+(N_2+N_3)-N_3=|A|+|B|-|A\cap B|$.

我们知道，当集合 A 与 B 没有公共元素时，有

$|A\cup B|=|A|+|B|$.

实际上这是公式（1）的特殊情形，因为此时

$|A\cap B|=|\varnothing|=0$.

【例 5】　桌上有两张圆纸片 A、B. 假设圆纸片 A 的面积为 30 平方厘米，圆纸片 B 的面积为 20 平方厘米. 这两张圆纸片重叠部分的面积为 10 平方厘米. 则这两张圆纸片覆盖桌面的面积由容斥原理的公式（1）可以算出为：$|A\cup B|=30+20-10=40$（平方厘米）.

【例 6】　求在 1 至 100 的自然数中能被 3 或 7 整除的数的个数.

分析　解这类问题时首先要知道在一串连续自然数中能被给定整数整除的数的个数规律是：在 n 个连续自然数中有且仅有一个数能被 n 整除. 根据这个规律我们可以很容易地求出在 1 至 100 中能被 3 整除的数的个数为 33 个，被 7 整除的数的个数为 14 个，而其中被 3 和 7 都能整除的数有 4 个，因而得到

解：设 $A=\{$在 1～100 的自然数中能被 3 整除的数$\}$，

$B=\{$在 1～100 的自然数中能被 7 整除的数$\}$，

则 $A\cap B=\{$在 1～100 的自然数中能被 21 整除的数$\}$.

$\because\ 100\div3=33\cdots1$，　$\therefore\ |A|=33$.

$\because\ 100\div7=14\cdots2$，　$\therefore\ |B|=14$.

$\because\ 100\div21=4\cdots16$，　$\therefore\ |A\cap B|=4$.

由容斥原理的公式（1）：$|A\cup B|=33+14-4=43$.

答：在 1～100 的自然数中能被 3 或 7 整除的数有 43 个.

【例 7】　求在 1～100 的自然数中不是 5 的倍数也不是 6 的倍数的数有多少个？

分析　如果在 1～100 的自然数中去掉 5 的倍数、6

的倍数，剩下的数就既不是 5 的倍数也不是 6 的倍数，即问题要求的结果.

解：设 $A=\{$在 1～100 的自然数中 5 的倍数的数$\}$，

$B=\{$在 1～100 的自然数中 6 的倍数的数$\}$，

则问题就是要求 $A\cup B$ 在集合 $\{1,2,\cdots,100\}$ 中的补集 $\overline{A\cup B}$ 的元素个数. 为此先求 $|A\cup B|$.

$\because\quad 100\div50=20,\qquad \therefore\quad |A|=20$

又 $\because\quad 100\div6=16\cdots4,\qquad \therefore\quad |B|=16$

$\because\quad 100\div30=3\cdots10,$

$\therefore\quad |A\cap B|=3,$

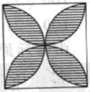
$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=20+16-3=33.$

$\therefore\quad |\overline{A\cup B}|=100-|A\cup B|=100-33=67$（个）.

答：在 1～100 的自然数中既不是 5 的倍数又不是 6 的倍数的数共 67 个.

我们也可以把公式（1）用于求几何图形的面积. 这时，A 和 B 是平面上的两个点集（即点的集合），都是几何图形. $|A|,|B|,\cdots$分别表示 A 的面积，B 的面积，$\cdots$.

【例 8】 设下面图中正方形的边长为 1 厘米，半圆均以正方形的边为直径，求图中阴影部分的面积.



(a)

分析 如图，四个直径为 1 厘米的半圆不但盖住了正方形，还有四个重叠部分. 这正好是要求的阴影部分的面积. 或者，用 A 表示上、下两个半圆，用 B 表示左、右两个半圆，则 $A\cup B$ 为边长为 1 厘米的正方形，$A\cap B$ 为图中阴影部分. 由（1）可得

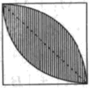
$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|,$$

因此可求出阴影部分的面积.

解法 1：∵　大正方形面积＝4 个直径为 1 厘米的半圆面积－阴影图形面积

∴　阴影图形面积＝2 个直径为 1 厘米的圆面积－正方形面积$=2\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\times1=0.57$（平方厘米）.

解法 2：我们从图（a）的对称性分出其中的$\frac{1}{4}$图形．图中叶状阴影图形面积的一半等于半径为$\frac{1}{2}$厘米的圆面积的$\frac{1}{4}$减去边为$\frac{1}{2}$厘米的正方形面积的$\frac{1}{2}$．即：



(b)

一个叶状阴影面积

$$=2\times\left[\frac{1}{4}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}$$

$$=0.57\times\frac{1}{4}\text{（平方厘米）}.$$

∴上页图（a）中阴影面积＝0.57（平方厘米）.

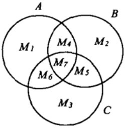
答：阴影面积为 0.57 平方厘米.

上面的例子是把一组事物按两种不同的性质来分类后，求具有其中一种性质的元素个数问题．如果把一组事物按三种不同性质来分类后，求具有其中一种性质的元素个数的公式该是什么样的呢？我们仍用图形来说明它具有与公式（1）类似的公式：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|, \quad (2)$$

其中$A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$A\cap B\cap C=A\cap(B\cap C)$.



右图中三个圆 A、B、C 分别表示具有三种不同性质的集合，并如图用 M_1、M_2、M_3、…、M_7 表示由三个圆形成的内部互不重叠的部分所含元素的个数，可见：

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= M_1+M_2+\cdots+M_7\\ &=(M_1+M_4+M_6+M_7)+(M_2+M_4+M_5+M_7)+(M_3+M_5+M_6+M_7)-[(M_4+M_7)+(M_5+M_7)+(M_6+M_7)]+M_7\\ &=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|,\end{aligned}$$

即公式（2）成立.

事实上这个规律还可推广到按多种性质来分类的情形. 设集合 M 中的每个元素至少具有 t 种性质中的一种，用 n_1 表示各个具有 1 种性质的集合中的元素个数的和，n_2 表示各个具有 2 种性质的集合中元素个数的和，…，n_t 表示具有 t 种性质的集合中元素的个数，则集合 M 中元素的个数 m 为：

$$m=n_1-n_2+n_3-n_4+\cdots\pm n_t$$

最后一项当 t 为偶数时取“－”号，否则取“＋”号.

【例 9】 某校有学生 960 人，其中 510 人订阅“中国少年报”，330 人订阅“少年文艺”，120 人订阅“中小学数学教学报”；其中有 270 人订阅两种报刊，有 58 人订阅三种报刊. 问这个学校中没有订阅任何报刊的学生有多少人？

解： 设 $A=$ {订“中国少年报”的学生}，

$B=$ {订“少年文艺”的学生}，

$C=$ {订"中小学数学教学报"的学生},

$I=$ {全校学生},

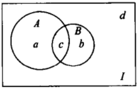
则问题是要求 $A\cup B\cup C$ 在 I 中的补集$\overline{A\cup B\cup C}$所含元素的个数：

$|\overline{A\cup B\cup C}|=960-|A\cup B\cup C|=960-(510+330+120-270+58)=212$（人）.

答：全校有 212 名学生没订阅任何报刊.

【例 10】 在一次数学竞赛中，甲答错了题目总数的 $\frac{1}{4}$，乙．答错了 3 道，甲、乙都错的题占题目总数的 $\frac{1}{6}$，求甲、乙都答对的题目数.

解：如右图，设这次竞赛共有 k 道题，用集合 A、B 分别表示甲、乙答错的题目．图中字母 a、b、c、d 分别表示集合 A、B 在全部题目作成的集合 I 中形成的各个无重复部分的元素个数，可见 d 为问题所求．依题意列方程：



$$\begin{cases} a+c=\dfrac{k}{4}, & (1) \\ c+b=3, & (2) \\ c=\dfrac{k}{6}, & (3) \end{cases}$$

将 (3) 代入 (1)：$a+\frac{k}{6}=\frac{k}{4}$，

$\therefore\quad a=\frac{k}{12}$.　　(4)

注意到 a、b、c、d 均表示题目的道数，应为自然数或零，因此 k 为 12 的倍数：12、24、….

将（3）代入（2）：$\frac{k}{6}+b=3$，

$$b=3-\frac{k}{6}\ (\geqslant 0)\ (\therefore k\leqslant 18).$$

$\therefore$　$k=12$，$b=1$，$c=2$，$a=1$，

$d=12-(a+b+c)=12-(1+2+1)=8$（道）．

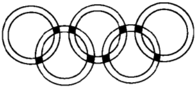
答：甲、乙两人都对的题共 8 道．

习题十二

1．某班有 50 人，会游泳的有 27 人，会体操的有 18 人，都不会的有 15 人．问既会游泳又会体操的有多少人？

2．在 1～1000 这 1000 个自然数中，不能被 2、3、5 中任何一个数整除的数有多少个？

3．五环图中每一个环内径为 4 厘米，外径为 5 厘米．其中两两相交的小曲边四边形（右图中阴影部分）的面积相等．已知五个圆环盖住的总面积是 122.5 平方厘米．求每个小曲边四边形的面积．



4．某班全体学生进行短跑、游泳和篮球三项测验，有 4 个学生这三项均未达到优秀，其余每人至少一项达到优秀，这部分学生达到优秀的项目及人数如下表：

短跑	游泳	篮球	短跑及游泳	游泳及篮球	短跑及篮球	三项
17 人	18 人	15 人	6 人	6 人	6 人	2 人

问这个班有多少名学生？

5. 有 100 位学生回答 A、B 两题. A、B 两题都没回答对的有 10 人，有 75 人答对 A 题，83 人答对 B 题，问有多少人 A、B 两题都答对？

6. 在一次数学竞赛中甲答错题目总数的 $\frac{1}{9}$，乙答对 7 道题，两人都对的题目是题目总数的 $\frac{1}{6}$，问：甲答对了多少道题？

习题十二解答

1. 因至少会游泳或体操的人数有 $50-15=35$（人）.

答：既会游泳又会体操的人数 $=27+18-35=10$（人）.

2. 设 $A=\{$在 1～1000 的自然数中能被 2 整除的数$\}$，

$B=\{$在 1～1000 的自然数中能被 3 整除的数$\}$，

$C=\{$在 1～1000 的自然数中能被 5 整除的数$\}$，

则　$|A|=500$，　$|B|=333$，　$|C|=200$，

$|A\cap B|=166$，$|B\cap C|=66$，$|A\cap C|=100$，

$|A\cap B\cap C|=33$，

$\therefore$　$|A\cup B\cup C|=500+333+200-166-66-100+33=734$（个），

$100-734=266$（个）.

答：在 1～1000 的自然数中不能被 2、3、5 中任何一个数整除的数共 266 个.

3. 答：五个圆环总面积是

$5\times\pi\times(5^2-4^2)=5\times9\times\pi=141.4$（平方厘米）（$\pi$ 取

3.14），

根据容斥原理，

阴影面积 $=141.4-122.5=18.9$（平方厘米）.

答：每个小曲边四边形的面积为 $18.9\div 8=2.36$（平方厘米）.

4. 答：$(17+18+15)-(6+6+6)+2+4=38$(人).

答：全班共 38 人.

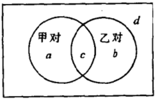
5. 至少答对 A 题或 B 题中一题的人数为

$100-10=90$ 人.

$\therefore$ 两题都对的人数 $=75+83-90=68$（人）.

6. 答：设共有 k 道题．a、b、c、d 如下图所示.

依题意列方程：



$$\begin{cases} b+d=\dfrac{k}{9}, \\ c+b=7, \\ c=\dfrac{k}{6}. \end{cases}$$

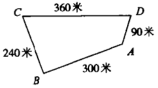
注意 a、b、c、d 均为自然数或零，可解出 $k=36$.

$\therefore$ 甲答对的题目数 $=a+c=k-(b+d)=k-\dfrac{k}{9}=32$ 道.

答：甲答对 32 道题.

第13讲　简单的统筹规划问题

这一讲我们讨论有关物资调运、下料问题及配套生产等实例.



【例 1】　某工地 A 有 20 辆卡车，要把 60 车渣土从 A 运到 B，把 40 车砖从 C 运到 D（工地道路图如右图所示），问如何调运最省汽油？

分析　把渣土从 A 运到 B 或把砖从 C 运到 D，都无法节省汽油．只有设法减少跑空车的距离，才能省汽油.

解：如果各派 10 辆车分别运渣土和砖，那么每运一车渣土要空车跑回 300 米，每运一车砖则要空车跑回 360 米，这样到完成任务总共空车跑了

$300\times 60+360\times 40=32400$（米）.

如果一辆车从 $A\to B\to C\to D\to A$ 跑一圈，那么每运一车渣土、再运一车砖要空车跑

$240+90=330$（米）；

因此，先派 20 辆车都从 A 开始运渣土到 B，再空车开往 C 运砖到 D 后空车返回 A，这样每辆车跑两圈就完成了运砖任务．然后再派这 20 辆车都从 A 运渣土到 B 再空车返回 A，则运渣土任务也完成了．这时总共空车跑了

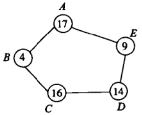
$330\times 40+300\times 20=19200$（米）.

后一种调运方案比前一种减少跑空车 13200 米，这是最

佳节油的调运方案.

说明："节省跑空车的距离"是物资调运问题的一个原则：下面通过例子再介绍"避免对流"的原则.

【例 2】 一支勘探队在五个山头 A、B、C、D、E 设立了基地，人数如右图所示. 为调整使各基地人数相同，如何调动最方便？（调动时不考虑路程远近）



分析 在人员调运时不考虑路程远近的因素，就只需避免两个基地之间相互调整，即"避免对流现象".

解：五个基地人员总数为

$17+4+16+14+9=60$（人）

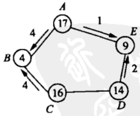
依题意，调整后每个基地应各有

$60\div5=12$（人）.

因此，需要从多于 12 人的基地 A、C、D 向不足 12 人的基地 B、E 调人. 为了避免对流，经试验容易得到调整方案如下：

先从 D 调 2 人到 E，这样 E 尚缺 1 人；再由 A 调 1 人给 E，则 E 达到要求. 此时，A 尚多余 4 人，C 也多余 4 人，总共 8 人全部调到 B，则 B 亦符合要求.

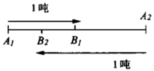
调动示意图如右图所示. 这样的图形叫做物资流向图. 用流向图代替调运方案，能直观地看出调运状况及有无对流现象，又可避免列表和计算的麻烦，图中箭头表示流向，箭杆上的数字表示流量.



说明：发生对流的调运方案不可能是最优方案. 这

个原则可以证明：

如右图，设 $A_1B_2=a$ 千米，$B_2B_1=b$ 千米，$B_1A_2=c$ 千米．如果从 A_1 运 1 吨货物到 B_1，同时又从 A_2 运 1 吨货物到 B_2，那么在 B_1B_2 之间 A_1 的物资从西向东运输，A_2 的货物从东向西运输，两者发生对流．于是这样调动的总吨千米数为

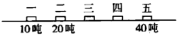


$$(a+b)\ +\ (b+c)\ =a+c+2b.$$

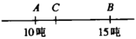
而如果从 A_1 运 1 吨货物到 B_2，同时从 A_2 运 1 吨货物到 B_1，则运输总吨千米数为 $a+c$．显然

$$a+c<a+c+2b.$$

【例 3】　在一条公路上每隔 100 千米有一个仓库（如右图,）共有 5 个仓库．一号仓库存有 10 吨货物，二号仓库有 20 吨货物，五号仓库存有 40 吨货物，其余两个仓库是空的．现在想把所有的货物集中存放在一个仓库里，如果每吨货物运输 1 公里需要 0.5 元运输费，那么最少要多少运费才行？



分析　欲使花费的运输费少，关键在于运输的货物和路程尽可能少．实际经验告诉我们一个原则——“小往大处靠”．下面就以两地调运问题为例加以计算验证：如上图，在公路上 A、B 两地各有 10 吨、15 吨麦子，问打麦场建在何处运费最少？



设打麦场建在 C 点，则总运费是（假定每吨小麦运输 1 千米的费用是 a 元）

$$W = 10\times a\times AC+15\times a\times BC$$
$$=10a\times AC+10a\times BC+5a\times BC$$
$$=10a\times (AC+BC)+5a\times BC$$
$$=10a\times AB+5a\times BC$$

上式中 $10a\times AB$ 是固定的值，不随 C 点的选取而改变；只有 $5a\times BC$ 随 BC 的变化而改变，若 BC 越小，则 W 也越小．当 $BC=0$ 时，即 C 点与 B 点重合时，W 的值最小．因此打麦场建在 B 点时总运费是 $10a\times AB$（元）为最少．显然当打麦场建在 AB 线段之外时，总运费都大于 $10a\times AB$（元）．

解：根据“小往大处靠”的原则，先把一号仓库的 10 吨货物送往二号仓库集中，需运费

$10\times 0.5\times 100=500$（元）．

这时可以认为二号仓库有 30 吨货物，而五号仓库有 40 吨货物，于是又应把二号仓库的 30 吨货物运往五号仓库集中，需运费

$30\times 0.5\times 300=4500$（元）．

所以，把货物集中存放在五号仓库时所花运费最少，需要 $500+4500=5000$（元）．

说明：“小往大处靠”的原则也不是一成不变的，具体问题还要具体分析．

再举两例如下：

例如一号仓库有 20 吨货物，二号仓库有 30 吨货物，其他仓库存货照样如前，那么应该往哪个仓库集中呢？首先仍应把一号仓库的 20 吨货物运往二号仓库集中，然后再把五号仓库的 40 吨货物也运往二号仓库集中，这样运费最少．

又如一号仓库有 30 吨货物，二号仓库有 20 吨货物，其他仓库存货仍然如前，那么应该往哪个仓库集中呢？先把一号仓库的 30 吨货物运往二号仓库集中，再把五号仓库的 40 吨货物也运往二号仓库集中，这样运费最省．（想想为什么？）

还有一点值得注意，在决定货物往何处集中时，起决定作用的是货物的重量，至于距离仅仅是为了计算运费．如果把本题中各个仓库之间的距离换成另外一些数值，仍应该把货物集中到五号仓库．

本题可以推广为一般命题："一条公路上有 n 个仓库，它们分别存货 a_1 吨、a_2 吨、…、a_n 吨．现在需要把所有的货物集中存放在一个仓库里，应该选取哪个仓库可以使总运输费最少？"它的解法将涉及到一次函数的知识，同学们在学过初三代数之后就会完全明白了．

【例 4】　189 米长的钢筋要剪成 4 米或 7 米两种尺寸，如何剪法最省材料？

分析　显然无残料的剪法是最优方案．于是考虑二元一次不定方程的整数解问题．

解：设 4 米长的剪 x 根，7 米长的剪 y 根，依题意列方程

$$4x+7y=189.$$

根据倍数分析法可知

$7|x$（即 x 是 7 的倍数）．

令　$x_1=0$，则 $7y=189$，解出 $y_1=27$；

$x_2=7$，则 $7y=161$，解出 $y_2=23$；

$x_3=14$，则 $7y=133$，解出 $y_3=19$；

$x_4=21$，则 $7y=105$，解出 $y_4=15$；

$x_5=28$，则 $7y=77$，解出 $y_5=11$；

$x_6=35$，则 $7y=49$，解出 $y_6=7$；

$x_7=42$，则 $7y=21$，解出 $y_7=3$.

因此，有七种剪法都是最省材料的.

说明：本例是最简单的下料问题，属于“线性规划”的范畴，线性规划是运用一次方程（组）、一次函数来解决规划问题的数学分支．规划论研究的问题主要有两类：一类是确定了一项任务，研究怎样精打细算使用最少人力、物力和时间去完成它；另一类是在已有一定数量的人力、物力和财力的条件下，研究怎样合理调配，使它们发挥最大限度的作用，从而完成最多的任务.

【例 5】 用 10 尺长的竹竿做原材料，来截取 3 尺、4 尺长的甲、乙两种短竹竿各 100 根，至少要用去原材料几根？怎么截法最合算？

分析 不难想到有三种截法省料：

截法 1：截成 3 尺、3 尺、4 尺三段，无残料；

截法 2：截成 3 尺、3 尺、3 尺三段，残料 1 尺；

截法 3：截成 4 尺、4 尺两段，残料 2 尺.

由于截法 1 最理想（无残料），因此应该充分应用截法 1．考虑用原材料 50 根，可以截成 100 根 3 尺长的短竹竿，而 4 尺长的仅有 50 根，还差 50 根．于是再应用截法 3，截原材料 25 根，可以得到 4 尺长的短竹竿 50 根，留下残料

$2\times25=50$（尺）.

解：至少要用 75 根原材料，其中 50 根用截法 1，25 根用截法 3，这样的截法最省料.

说明：一般说来，一定长度的条形材料要截取两种

毛坯的下料问题，用本例的方法求解是比较省料的，这种解法的理论根据要用到二元不等式及一次函数图像，有兴趣的读者可参阅有关书刊．

【例 6】　甲、乙两个服装厂每个工人和设备都能全力生产同一规格的西服，甲厂每月用$\frac{3}{5}$的时间生产上衣，$\frac{2}{5}$的时间生产裤子，全月恰好生产 900 套西服；乙厂每月用$\frac{4}{7}$的时间生产上衣，$\frac{3}{7}$的时间生产裤子，全月恰好生产 1200 套西服．现在两厂联合生产，尽量发挥各自特长多生产西服，那么现在每月比过去多生产西服多少套？

分析　根据已知条件，甲厂生产一条裤子与一件上衣的时间之比为 2∶3，因此在单位时间内甲厂生产的上衣与裤子的数量之比也是 2∶3（注意：在固定时间内，数量与每件所用时间成反比）；同理可知，在单位时间内乙厂生产上衣与裤子的数量之比是 3∶4．

由于$\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$，所以甲厂善于生产裤子，乙厂善于生产上衣．下面简单说明理由：

如果甲厂生产 9 条裤子，则相当甲厂生产 6 件上衣；如果让乙厂生产这 6 件上衣，则相当于生产 8 条裤子．这就是说，甲厂生产 9 条裤子时乙厂只能生产 8 条裤子．显然甲厂善于生产裤子．类似地，如果乙厂生产 9 件上衣，则相当于乙厂生产 12 条裤子；如果让甲厂生产这 12 条裤子，则相当甲厂生产 8 件上衣．这就是说，乙厂生产 9 件上衣时甲厂只能生产 8 件上衣．显然乙厂善于生产上衣．

解：两厂联合生产，尽量发挥各自特长，安排乙厂

全力生产上衣．由于乙厂用$\frac{4}{7}$月生产 1200 件上衣，那么乙厂全月可生产上衣

$1200\div\frac{4}{7}=2100$（件）．

同时，安排甲厂全力生产裤子，则甲厂全月可生产裤子

$900\div\frac{2}{5}=2250$（条）．

为了配套生产，甲厂先全力生产 2100 条裤子，这需要

$2100\div2250=\frac{14}{15}$（月）．

然后甲厂再用$\frac{1}{15}$月单独生产西服

$900\times\frac{1}{15}=60$（套）．

于是，现在联合生产每月比过去多生产西服

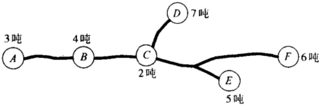
$(2100+60)-(900+1200)=60$（套）．

说明：本例是线性规划中劳力组合问题．劳力组合最简单的情况就是效率比问题．这里给出多种劳力（或机械）干两种配套活的一般分工原则：

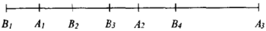
设甲生产 A 产品与 B 产品的数量比为$\frac{a_1}{b_1}$，乙生产 A 产品与 B 产品的数量比为$\frac{a_2}{b_2}$．如果$\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_2}{b_2}$，则甲善于生产 A 产品，乙善于生产 B 产品．

习题十三

1．某乡共有六块甘蔗地，每块地的产量如下图所示．现在准备建设一座糖厂，问糖厂建于何处总运费最省？



2. 产地 A_1、A_2、A_3 和销售地 B_1、B_2、B_3、B_4 都在铁路线上，位置如下图所示. 已知 A_1、A_2、A_3 的产量分别为 5 吨、3 吨、2 吨；B_1、B_2、B_3、B_4 的销售量分别是 1 吨、2 吨、3 吨、4 吨. 试求出使总运输吨公里数最小的调运方案.



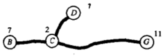
3. 把长 239 米的钢筋截成 17 米和 24 米长的钢筋，如何截法最省材料？

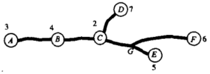
4. 钢筋原材料每件长 7.3 米，每套钢筋架子用长 2.9 米、2.1 米和 1.5 米的钢筋各 1 段. 现在需要绑好钢筋架子 100 套，至少要用去原材料几件？截料方法怎样最省？

5. 某车间有铣床 3 台，车床 3 台，自动机床 1 台，生产一种由甲、乙两个零件组成的产品. 每台铣床每天生产甲零件 10 个，或者生产乙零件 20 个；每台车床每天生产甲零件 20 个，或者生产乙零件 30 个；每台自动机床每天生产甲零件 30 个，或者生产乙零件 80 个. 如何安排这些机器的生产任务才能获得最大数量的成套产品？每天最多可生产多少套产品？

习题十三解答

1．答：糖厂建于 C 处总运费最省．
如下图（a)，根据“小往大处靠”的原则，把 A 靠到 B；E 靠到 G，F 靠到 G，这样就成图（b）





同理：B 靠到 C，D 靠到 C，这时，C 为 16 吨；G 为 11 吨．最后，G 靠到 C．

2．答：A_1 运往 $B_1$1 吨；运往 $B_2$2 吨；运往 $B_3$2 吨．
A_2 运往 $B_3$1 吨；运往 $B_4$2 吨．
A_3 运往 $B_4$2 吨．

3．解：设截成 17 米长的钢筋 x 根，截成 24 米长的钢筋 y 根．
则有 $17x+24y=239$，可得非负整数解为 $x=7$，$y=5$．

4．解：截法 1：$2.9+2.9+1.5=7.3$
截法 2：$2.1+2.1+1.5+1.5=7.2$
截法 3：$2.9+2.1+2.1=7.1$

答：共用钢筋 90 根，其中 40 根用截法 1；30 根用截法 2；20 根用截法 3．

5．解：由于$\frac{80}{30}>\frac{20}{10}>\frac{30}{20}$.

所以：自动机床最善于生产乙零件；车床最善于生产甲零件．因此确定：自动机床只生产乙零件，车床只生产甲零件；铣床生产部分甲零件和部分乙零件，使其配套．

答：自动机床一天生产 80 个乙零件；

车床一天生产 $3\times20=60$ 个甲零件；

铣床一天生产 $6\frac{2}{3}$个乙零件、$26\frac{2}{3}$个甲零件．三种机器一天共生产 $86\frac{2}{3}$套产品（即三天共生产 $86\frac{2}{3}\times3=260$ 套产品）．

第14讲　递推方法

递推方法是人们从开始认识数量关系时就很自然地产生的一种推理思想．例如自然数中最小的数是1，比1大1的数是2，接下来比2大1的数是3，…由此得到了自然数数列：1，2，3，4，5，….在这里实际上就有了一个递推公式，假设第 n 个数为 a_n，则

$$a_{n+1}=a_n+1$$

即由自然数中第 n 个数加上1，就是第 $n+1$ 个数．

由此可得

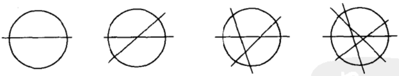
$$a_{n+2}=a_{n+1}+1,$$

这样就可以得到自然数数列中任何一个数

再看一个例子：

【例1】　平面上5条直线最多能把圆的内部分成几部分？平面上100条直线最多能把圆的内部分成几部分？

解：



假设用 a_k 表示 k 条直线最多能把圆的内部分成的部分数．这里 $k=0$，1，2，….如图可见．

$a_0=1$

$a_1=a_0+1=2$

$a_2=a_1+2=4$

$a_3 = a_2 + 3 = 7$

$a_4 = a_3 + 4 = 11$

…

归纳出递推公式 $a_{n+1} = a_n + n$.　　　　　　　　　　(1)

即画第 $n+1$ 条直线时，最多增加 n 部分. 原因是这样的：第一条直线最多把圆分成两部分，故 $a_1 = 2$. 当画第二条直线时要想把圆内部分割的部分尽可能多，就应和第一条直线在圆内相交，交点把第二条直线在圆内部分分成两条线段，而每条线段又把原来的一个区域划分成两个区域，因而增加的区域数是 2，正好等于第二条直线的序号. 同理，当画第三条直线时，要想把圆内部分割的部分数尽可能多，它就应和前两条直线在圆内各有一个交点. 两个交点把第三条线在圆内部分成三条线段. 而每条线段又把原来一个区域划分成两个区域. 因而增加的区域部分数是 3，正好等于第三条直线的序号，…. 这个道理适用于任意多条直线的情形. 所以递推公式 (1) 是正确的. 这样就易求得 5 条直线最多把圆内分成：

$a_5 = a_4 + 5 = 11 = 5 = 16$ (部分).

要想求出 100 条直线最多能把圆内分成多少区域，不能直接用上面公式了，可把上面的递推公式变形：

$$\because\quad a_n = a_{n-1} + n = n_{n-2} + (n-1) + n$$
$$= a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n$$
$$= \cdots = 1 + 1 + 2 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \qquad (2)$$

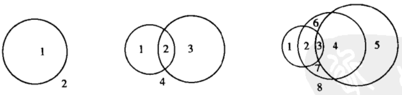
$$\therefore\quad a_{100} = 1 + \frac{100 \times 101}{2} = 5051 \text{ (部分)}.$$

公式 (2) 也称为数列 1，2，4，7，11，16，…的通项公式.

一般来说，如果一个与自然数有关的数列中的任一项 a_n 可以由它前面的 k（$\leqslant n-1$）项经过运算或其他方法表示出来，我们就称相邻项之间有递归关系，并称这个数列为递归数列．如果这种推算方法能用公式表示出来，就称这种公式为递推公式或递推关系式．通过寻求递归关系来解决问题的方法就称为递推方法．许多与自然数有关的数学问题都常常具有递推关系，可以用递推公式来表达它的数量关系．如何寻求这个递推公式是解决这类问题的关键之一，常用的方法是“退”到问题最简单情况开始观察．逐步归纳并猜想一般的递推公式．在小学生阶段，我们仅要求学生能拨开问题的一些表面现象由简到繁地归纳出问题的递推公式就行了，不要求严格证明．当然能证明更好．所谓证明，就是要严格推出你建立的关系式适合所有的 n，有时，仅仅在前面几项成立的关系式，不一定当 n 较大时也成立．

【例 2】 平面上 10 个两两相交的圆最多能将平面分割成多少个区域？平面上 1993 个圆最多能将平面分割成多少个区域？

解：设平面上 k 个圆最多能将平面分割成 a_k 部分．我们先“退”到最简单的情形．如图可见



$a_1=2$，

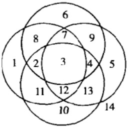
$a_2=4=2+2\times1$，

$a_3=8=4+2\times2$，

$a_4=14=8+2\times 3$,

$\cdots$

$a_n=a_{n-1}+2(n-1)$.　　(3)



(3) 是这个问题的递推公式. 再把它变形为当 n 较大时也能方便求出结果的公式:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}+2(n-1) \\ &= a_{n-2}+2[(n-2)+(n-1)] \\ &= a_{n-3}+2[(n-3)+(n-2)+(n-1)] \\ &= \cdots \\ &= a_1+2(1+2+3+\cdots+n-2+n-1) \\ &= 2+2\times\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n+2 \end{aligned}$$

$\therefore\quad a_{10}=10^2-10+2=92$ (个),

$a_{1993}=1993^2-1993+2=3970058$ (个).

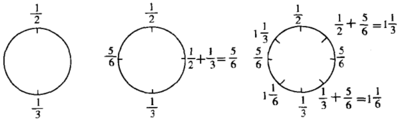
关于这个递推公式成立的正确性分析与例 1 完全类似. 比如, 第一个圆显然将平面分为两个区域; 当画第二个圆时, 应与原来的一个圆有两个交点, 即被第一个圆截成两段弧, 而每一段弧将原来的每一个区域分成两个区域, 故区域数增加了 2, 即增加了原来圆的个数的 2 倍; 当画第三个圆时, 应与原来的两个圆共有 4 个交点, 圆弧被截成 4 段, 而每段弧又将原来的每个区域分成两个区域, 所以区域增加了4, 即原来圆的个数的 2 倍, …, 同理类推, 说明递推公式应该是

$a_n=a_{n-1}+2(n-1)$.

【例 3】　在一个圆周上按下面规则标上一些数: 第一次先把圆周二等分, 在两个分点旁标上 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$, 如图

(a)．第二次把两段半圆弧二等分，在分点旁标上相邻两分点旁所标两数的和，如图（b），标上$\frac{5}{6}\left(=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$．第三次把 4 段圆弧分别二等分，并在 4 个分点旁边标上两个相邻分点旁所标数的和，如图（c），分别标上 $1\frac{1}{3}$ $\left(=\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)$和 $1\frac{1}{6}\left(=\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right)$．如此继续下去，当第八次标完数以后，圆周上所有已标的数的和是多少？

解：



(a)　　(b)　　(c)

我们一般地设第一次所标的两数分别为 a、b，用 S_k 表示第 k 次标完后各分点所标数的和．如图可见

$S_1=a+b$，　　$S_2=S_1+2S_1=3S_1=3\ (a+b)$．

原因是这样的：S_2 是两类分点旁的标数和，一类是原来分点所标数的和 S_1，另一类是新增分点所标数的和，它正好是由原来各分点所标的数向左加一次，又向右加一次的和，故新增分点旁所标数的和恰好是原来所有数之和的 2 倍 $2S_1$，因此有

$S_2=S_1+2S_1=3S_1$，　　同理类推

$S_3=S_2+2S_2=3S_2=3^2S_1$，

$S_4=3^2S_1+2\times3^2S_1=3^2S_1$，

…

$$S_n = 3^{n-1} S_1 = 3^{n-1}\ (a+b) \qquad (4)$$

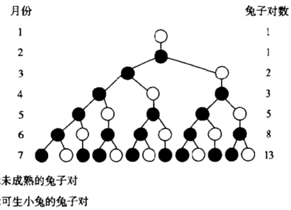
(4) 式为递推公式：$S_n = 3S_{n-1}$在 $S_1 = a + b$ 时已解出的表达式. 所谓解出，即 S_n 直接依赖于 n 与 S_1 而计算出. 不再是 S_n 依赖于 S_{n-1}，S_{n-1}又依赖于 S_{n-2}…这样的形式.

∴　当 $n=8$，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{3}$时

$$S_8 = 3^7\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = 2187 \times \frac{5}{6} = 1822\,\frac{1}{2}.$$

【例 4】　假设刚出生的雌雄一对小兔过两个月就能生下雌雄一对小兔，此后每月生下一对小兔. 如果养了初生的一对小兔，问满一年时共可得多少对兔子？

解：我们先退到开始的简单情况来推算，从中归纳出递推关系. 如图：



第一个月：只有 1 对小兔.

第二个月：一对小兔长成一对大兔，但尚不会生殖. 仍只有一对兔子.

第三个月：这对大兔生了一对小兔，这时共 2 对兔子.

第四个月：大兔又生了一对小兔，而上月出生的小

兔正在长大，这时共 3 对兔子.

第五个月：这时已有两对大兔可以生殖（原来的大兔和第三个月出生的小兔），于是生了两对小兔，这时共有 5 对兔子.

…

把推算的结果列成一张表

月份数	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	…
兔对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…

由表中可见满一年时可得 144 对兔子.

如果要算的时间长，这种方法就有困难了，现在我们来找递推关系.

用 $\{u_n\}$ 表示第 n 个月时的兔子对数，则

$\{u_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，21，34，….

容易发现递推公式是

$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$.

现在说明这个递推公式是正确的. 因为第 n 个月时的兔子对分两类，一类是第 $n-1$ 个月时的兔子对，另一类是当月新生的兔子对，而这些小兔对数恰好是第 $n-2$ 个月时的兔子对数 u_{n-2}.

有了上面的递推公式就可以写出 $\{u_n\}$ 的第 12 项为 144 对. 这正是本题要求的满一年时的小兔总对数.

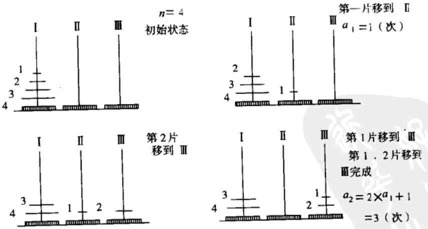
数列 $\{u_n\}$ 称为斐波那契数列（Fibonacci，1170～1250，是意大利数学家）. 由于数列 $\{u_n\}$ 具有许多重要的奇特性质. 因而受到数学家们的极大关注，并把数列 $\{u_n\}$ 取名为斐波那契数列.

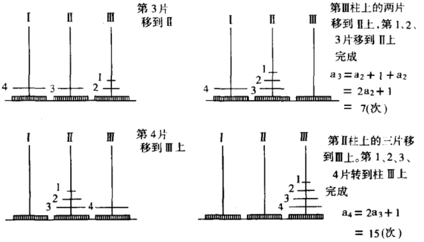
【例 5】 传说在印度的佛教圣地贝拿勒斯圣庙里安

放着个一个黄铜板，板上插着三根宝石针，在第一根宝石针上，从下到上穿着由大到小的 64 片中心有孔的金片．每天都有一个值班僧侣按下面规则移动金片：把金片从第一根宝石针移到其余的某根宝石针上．要求一次只能移动一片，而且小片永远要放在大片的上面．当时传说当 64 片金片都按上面的规则从第一根宝石针移到另一根宝石针上时，世界将在一声霹雳中毁灭．所以有人戏称这个问题叫“世界末日”问题（也称为“Hanoi 塔”问题），当然，移金片和世界毁灭并无联系，这只是一个传说而已，但说明这是一个需要移动很多很多次才能办到的事情．解这个问题的方法在算法分析中也常用到．究竟按上述规则移动完成 64 片金片需要移动多少次呢？

解：设有 n 片金片，把从第一片金片至第 k 片金片按题目要求由第 I 根宝石针移到另一根宝石针共需移动 a_k 次．

先对 4 片金片的简单情形，用下列的几组图来表示移动过程中的各种状态，并计数，归纳出递归关系式．





这节的前几个例子都是“退”到简单的特殊情况来归纳出一般规律．在这个例子里，我们将先用一般推理得出递推公式，再以 $n=64$ 代入，便可解决我们这个例题．这种从一般到特殊来解决问题的方法也是数学上的一种常用方法．

我们可以这样来想：为了移动第 n 片到第Ⅲ根宝石针上，我们必须先把它上面的 $n-1$ 片按题目的规则采用某种程序移到第Ⅱ根宝石针上，这需要移动 a_{n-1}次．然后才能把最下面第 n 片（最大的），称到第Ⅲ根宝石针上．最后再经过 a_{n-1}次才能把第Ⅱ根宝石针上的 $n-1$ 片金片按上面规则采用同样程序移到第Ⅲ根宝石针上．因此把 n 片金片按题中的规则全部移到另一根宝石针上共应移

$$a_n=2a_{n-1}+1 \text{（次）}. \qquad (5)$$

这就是递推公式．

为了求得 $n=64$ 时 a_{64}的值，我们当然不能一次次地

由 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=7$，…直到算出 a_{64}. 现在我们设法把递推公式（5）变形为可以直接计算 a_{64}的形式.

$$\begin{aligned}\because\quad a_n &= 2a_{n-1}+1=2\ (2a_{n-2}+1)\ +1=2^2a_{n-2}+2+1\\ &=2^2\ (2a_{n-3}+1)\ +2+1=2^3a_{n-3}+2^2+2^1+1\\ &=\cdots\\ &=2^{n-1}a_1+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1\\ &=1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_n &= 2a_n-a_n\\ &=2\ (1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})\ -\ (1+2+\cdots+2^{n-1})\\ &=2^n-1,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_{64}=2^{64}-1.$$

a_{64}是一个非常大的数. 如果按每移动一片次需一秒钟算，把 64 片金片从一根宝石针移到另一根宝石针上大约需要 5800 亿年.

习 题 十 四

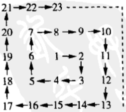
1. 请你根据下列各个数之间的关系，在括号里填上恰当的数：

①1，5，9，13，17，(　).

②0.625，1.25，2.5，5，(　).

③$\frac{2}{10}$，$\frac{3}{16}$，$\frac{4}{22}$，$\frac{5}{28}$，…，$\frac{(\quad)}{58}$.

④198,297,396,495,(　),(　).



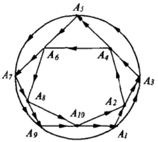
2. 将自然数 1，2，3，…，按图排列，在“2”处转第一个弯，“3”处转第二个弯，“5”处转第三个弯，…. 问

哪个数处转第二十个弯？

3．请用递推方法求出甲、乙、丙、丁四人站成一排照相，共有多少种不同站法？

4．上一段 12 级楼梯，规定每一步只能上一级或两级．问要登上第 12 级楼梯共有多少种不同走法？

5．有 10 个村庄，分别用 A_1，A_2，…，A_{10} 表示，某人从 A_1 出发按箭头方向绕一圈最后经由 A_{10} 再回到 A_1，有多少种不同走法？



注：每点（村）至多过一次，两村之间，可走直线，也可走圆周上弧线，但都必须按箭头方向走．

习题十四解答

1．①∵　相邻两数的差均为 4，故括号里应填

$17+4=21$．

②∵　$1.25-0.625=0.625$，

$2.5-1.25=1.25$，

$5-2.5=2.5$，

可见差正好等于减数．

∴　（　　）$-5=5$，

∴　（　　）$=5+5=10$．

或者：后一个数为前一个数的 2 倍，故

括号里应填 $2\times5=10$．

③∵　从数列可见分子从 2 开始逐个增大 1；分母从

10 开始逐个增大 6，要填（　），须先知道$\frac{(\ )}{58}$是第几个数. 分母顺序为：10，16，22，28，34，40，46，52，58.

∴　这个分数为第 9 个数.

∴　括号里应填 10.

④十位上数不变，百位上数依次递增 1，个位上数依次递减 1，故括号中数应填 594，693.

2. 解：拐弯处数的规律可见下页表.

∴　第 19 个拐弯处的数比第 18 个拐弯处的数大 10，第 20 个拐弯处的数比第 19 个拐弯处的数也大 10，故第 20 个拐弯处的数为：

拐弯处序号	拐弯处的数	前后关系
①	2	1 + ① = 2
②	3	2 + ① = 3
③	5	3 + ② = 5
④	7	5 + ② = 7
⑤	10	7 + ③ = 10
⑥	13	10 + ③ = 13
⑦	17	13 + ④ = 17
⑧	21	17 + ④ = 21
⋮	⋮	

$1+2\times(1+2+3+\cdots+10)=111.$

3. 解：假设 n 个人站成一排共有 a_n 种不同站法. 可以先让其中的 $n-1$ 个人站成一排，共有 a_{n-1}种不同的站法，再让剩下的那个人站在他们中间或两头，又有 n 种站法. 由乘法原理，可得到递推公式：

$a_n = n \times a_{n-1}$.

又∵ $a_1 = 1$,

∴ $a_4 = 4 \times a_3 = 4 \times 3 \times a_2 = 4 \times 3 \times 2 \times a_1 = 4! = 24$.

4. 解：设登上 n 级楼梯共有 a_n 种不同走法，$n = 1$, 2, ⋯. 把上到第 n 级楼梯的情形分为两种走法. 一类是先上到第 $n-1$ 级楼梯，然后再上一级，共有 a_{n-1} 种走法. 另一类是先上到第 $n-2$ 级楼梯，然后再上两级，共有 a_{n-2} 种走法. 由加法原理，上到第 n 级楼梯的走法 a_n 满足下列递推关系式：

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

又∵ $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，故上楼梯方法数 a_n 依次为 1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，⋯.

∴ 上到第 12 级楼梯共有 233 种不同走法.

5. 解：设从 A_1 按箭头方向走到 A_{n+1} 的走法数为 a_n，$n = 1$，2，⋯，9. 则 a_9 即为所求（因为从 A_{10} 回到 A_1 只有一种方式）. 可见，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ 为递推公式.

∴ a_n（$n = 1$，2，⋯，9）依次为 1，2，3，5，8，13，21，34，55. 即共 55 种不同的走法.

也可以用图来表示解答过程.

每一个村（点）旁边的数字就是到这村的不同走法个数. 正好符合斐波那契数列的特点.

从 A_1 出发走到 A_2 点只有一种方式，A_2 点标有数目 1. 从 A_1 到 A_3，一种直接沿圆弧走，另一种途经 A_2 走，所以共有 $1+1=2$ 种方式，从 A_1 到 A_4，有两种方式，一种途经

A_2 再沿从 A_2 到 A_4 的直线走，另一种途经 A_3 到 A_4. 所以总方式数目等于 A_1 到 A_2 的方式数加 A_1 到 A_3 的方式数.

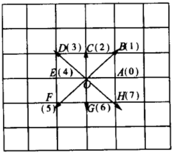
也即　($A_1 \rightarrow\rightarrow A_4$) 方式数

$$
\begin{aligned}
&= (A_1 \rightarrow\rightarrow A_2)\text{ 方式数} + (A_1 \rightarrow\rightarrow A_3)\text{ 方式数} \\
&= 1 \qquad + \qquad 2 \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

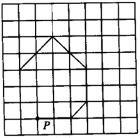
其余类推.

第15讲　综合题选讲

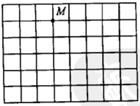
在数学竞赛试题中渗透数学思想、方法、观念，有时还通过试题介绍或渗透某种新知识，这是数学竞赛的发展趋势．因此必须加强思维能力的训练，培养学生严谨的逻辑推理能力，灵活的技巧方法，并且通过解题培养创造性．



【例 1】　如右图，我们规定在边长为 1 的正方形方格纸上，从格点 O 到与它相邻的格点 A、B、C、D、E、F、G、H 的共有 8 种直线运动形成线段，这 8 种运动依次分别记为数码 0、1、2、3、4、5、6、7．例如以 O 为始点，数码 2 代表形成线段 OC 的运动，数码 7 代表形成线段 OH 的运动等等．



(a)

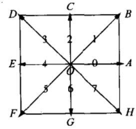


(b)

在图（a）中画出了从 P 点出发，数码序列 001223355 的轨迹图形．

请你在图（b）的边长为 1 的正方形方格纸上，从点 M 出发，依次按数码序列 006756442312 画出相应的轨迹图形．以这轨线图形周界和内部的格点为顶点可画出面积不小于 2 的正方形一共有多少？

分析　此题关键是看懂题目，即线段分别记为数码 0、1、2、3、4、5、6、7 的意义．如右图：



数码 0　代表线段 OA．

数码 1　代表线段 OB．

数码 2　代表线段 OC．

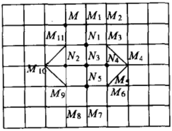
数码 3　代表线段 OD．

数码 4　代表线段 OE．

数码 5　代表线段 OF．

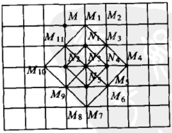
数码 6　代表线段 OG．

数码 7　代表线段 OH．



这样，006756442312 所对应的轨迹图形为封闭折线，为清楚起见标上字母，即为 $S = MM_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8M_9M_{10}M_{11}M$，如右图．

因为在 S 边界上有 12 个格点（M，$M_1 \sim M_{11}$），内部有 5 个格点，为 N_1、N_2、N_3、N_4、N_5．这 17 个点中可形成面积大于等于 2 的正方形顶点的四点组共有 13 个．



分类　①面积为 2 的共有 5 个：

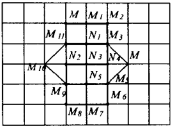
$(M_1M_3N_3M_{11})$，

$(M_3M_4M_5M_3)$，

$(M_5M_7M_9N_3)$，

$(M_9N_3M_{11}M_{10})$，

$(N_1N_2N_5N_4)$.



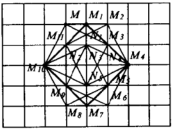
②面积为 4 的共有 3 个：

$(MM_2N_4N_2)$，

$(M_3M_5M_9M_{11})$，

$(N_4M_6M_8N_2)$.

③面积为 5 的共有 4 个：



$(MM_3N_5M_{10})$，

$(M_2M_{11}N_5M_4)$，

$(N_1M_{10}M_8M_5)$，

$(N_1M_9M_6M_4)$.

④面积为 8 的共有 1 个：

$(M_1M_{10}M_7M_4)$.

【例 2】 一个自然数若能表示为两个自然数的平方差，则称这个自然数为“智慧数”. 比如 $16=5^2-3^2$，16 就是一个“智慧数”. 在自然数列中从 1 开始数起，试问第 1993 个“智慧数”是哪个数？并请说明理由？

分析与解答 ∵ 1 不能表示为两个自然数平方差，

∴ 1 不是“智慧数”.

①对于大于 1 的奇数 $2k+1$，

有 $2k+1=(k+1)^2-k^2 \quad (k=1, 2, 3, \cdots)$，

∴ 大于 1 的奇数都是“智慧数”.

②对于大于 4 且被 4 整除的偶数 $4k$，

有 $4k=(k+1)^2-(k-1)^2 \quad (k=2, 3, \cdots)$，

即大于 4 的被 4 整除的数都是“智慧数”.

而 4 不能表示为两个自然数的平方差，

∴　4 不是"智慧数".

③ 对于被 4 除余 2 的数 $4k+2$（$k=0$，1，…）

设 $4k+2=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，x、$y\in N$.

当 x、y 奇偶性相同时，$(x+y)(x-y)$ 被 4 整除，而 $4k+2$ 不被 4 整除，矛盾.

当 x、y 奇偶性相异时，$(x+y)(x-y)$ 为奇数，而 $4k+2$ 为偶数，又矛盾.

∴　不存在 x、$y\in N$，使得 $x^2-y^2=4k+2$，即 $4k+2$ 形的数均不为"智慧数".

在自然数列中前四个自然数中，只有 $3=2^2-1^2$ 为"智慧数".

由①②③知，从 5 开始的每连续四个数中有三个"智慧数"，故四个数为一个周期.

∵　$1992=3\times664$，

∴　从 5 开始有 664 个周期，

再加上 1，2，3，4 便共有 665 个周期，

而　$4\times665=2660$，

因此，第 1993 个"智慧数"是 2660.

【例 3】　有一列数：1，3，4，7，11，18，…（从第 3 个数起，每个数恰好是它前面相邻两个数的和）.

① 求第 1993 个数被 6 除余几？

② 把以上数列按下述方法分组（1），（3，4），（7，11，18），…（第 n 组含有 n 个数）．问第 1991 组的各数之和被 6 除余数是几？

分析　①如果能求出这个数列第 1993 个数是多少，当然它被 6 除余数就很好求了．但是，观察数列的构造规律，很难找出求某一项的一般公式．而数列的前几项

是已知的，它们被 6 除余数很容易写出来，再根据“两个数之和被 6 除的余数，等于这两个数被 6 除余数之和被 6 除的余数”就不难依次写出原数列被 6 除所得余数组成的数列．我们再观察“余数数列”的构成规律：

1，3，4，1，5，0，5，5，4，3，1，4，5，3，2，5，1，0，1，1，2，3，5，2，1，3，4，1，…

只要出现有相邻两个数与前面某相邻的两个数相同且顺序也相同，以后就会依次出现前面同样的一个“片段”，就是说出现“周期”性变化．经过观察、分析，发现“余数数列”每 24 个数呈现周期性重复：

1，3，4，1，5，…，2，3，5，2．

这样，只要知道第 1993 个数是排在一个周期的第几个数，就不难找出所要求的余数了．

1993 除以 24 商 83 余 1，第 1993 个数是排在第 84 个周期内的第 1 个数，它除以 6 余数是 1．

②因为第 n 组有 n 个数，前 1990 组数的个数的总和是：

$$1+2+3+\cdots+1990=\frac{1991\times1990}{2}=1981045.$$

1981045 除以 24 余 13，因此第 1990 组最后一个数除以 6 余 5，并且第 1991 组各数被 6 除余数顺序如下：

3，2，5，1，0，1，1，2，3，5，2，1，3，4，1，5，0，5，5，4，3，1，4，5，3，2，…．还是 24 个数为一个周期．一个周期内各余数之和是：

$$3+2+5+1+0+1+1+2+3+5+2+1+3+4+1+5+0+5+5+4+3+1+4+5=66.$$

66 被 6 整除，就是说每个周期中的数的和能被 6 整除．第 1991 组有 1991 个数，1991 除以 24 商 82 余 23．这

1991 个数之和被 6 除余数应等于前 23 个数之和被 6 除的余数，也就是 66 减去最后一个数 5 所得差被 6 除的余数：

$66-5=61$，它除以 6 余 1.

由上述分析、计算，知第 1991 组各数之和被 6 除余 1.

【例 4】　有 1993 个硬币，排成一行，开始时，都是国徽的一面，不妨说都标为“0”. 第 1 次，将 1993 个币翻面，变成“分值”的一面，不妨说都变成“1”. 第 2 次将其中 1992 个币翻面，第 3 次将 1991 个币翻面，依次递降…，第 1993 次，将 1 个币翻面，问可否使结束状态为 1993 个面全为“1”?

分析　设一行硬币总共有 N 个，

如 $N=1$. 初始：{0}，结束：{1}，可以办到.

如 $N=2$. 初始：{0，0}，第 1 次：{1，1}，

第 2 次：{0，1}，结束状态不是 {1，1}.

如 $N=3$. 初始：{0，0，0}，第 1 次：{1，1，1}，

第 2 次：{0，0，1}，

第 3 次：{0，1，1}，或 {0，0，0}

结束状态不会是 {1，1，1}.

如 $N=4$. 初始：{0，0，0，0}.

第 1 次：$\Delta=+4$，{1，1，1，1}（翻动 4 个币总值增加 4，记为 $\Delta=+4$，读作“加 4”），

第 2 次：$\Delta=-3$，{0，0，0，1}（翻动 3 个币，总值减少 3，记为 $\Delta=-3$，读作“减 3”），

第 3 次：$\Delta=+2$　　　　$\Delta=+1-1$

{0，1，1，1}　　　　{0，0，1，0}

第 4 次：　$\Delta=+1$

{1，1，1，1}

结束状态可以是 {1，1，1，1}.

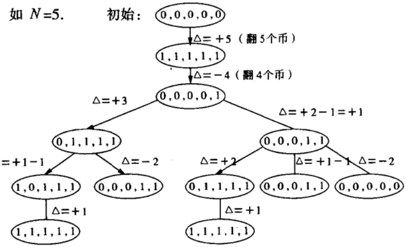
下面，对于 $N=5$ 的情况，用树形图，表达这个推理过程，其中结点（即圈内数字）表示 5 个硬币的状态.

分枝上的记号，代表翻币的过程.

原来的 1 个 0 变成 1，记为 $\Delta=+1$，

原来的 1 个 1 变成 0，记为 $\Delta=-1$.

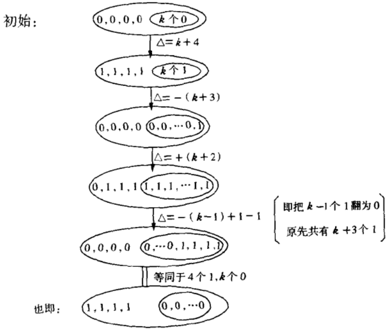
翻币情况（从上到下的一串分枝上的 Δ 的和等于 5 时，初始的 5 个 0 最终即变为 5 个 1）：



结论：对于 $N=5$ 有 2 种方式达到所要求的目标. 对于任意大的 N 值，可以用递推的思想方法，得到一般性结论：

如 $N=k$ 时，依次递减个数的翻币，能使"k 个 0"变成"k 个 1"，那么，$N=k+4$ 也可依次递减个数翻币，使"$k+4$ 个 0"变成"$k+4$ 个 1"，反之亦然. 设计树形图：

下面再依次翻 k 个币，$k-1$ 个币，…. 在这些翻动过程中始终保持前 4 个 1 不变. 这样，以下即化为 $N=k$



时的情况.

结论：$N\equiv 0$，1（mod 4）翻币可成功，

$N\equiv 2$，3（mod 4）必不可能成功.（证明见注）

而 $1993\equiv 1$（mod 4）.

∴　本题可成功.

注：严格证明：

对于每个币，必翻动奇数次，才能使“0”变成“1”.

N 个币每个翻奇数次，总共翻动 N 个奇数相加.

另一方面，翻动次数总和 $=1+2+3+\cdots+N$

$$=\frac{(1+N)\ N}{2}.$$

对于 $N \equiv 2 \pmod 4$，记作 $N=4k+2$.

$4k+2$ 个奇数之和＝偶数，

另外，$\frac{(1+N)\ N}{2}=\frac{(4k+2+1)}{2}\times(4k+2)$

$=(4k+3)(2k+1)$

＝奇数，

偶数≠奇数.

对于 $N=3 \pmod 4$，记作 $N=4k+3$.

$4k+3$ 个奇数之和＝奇数，

另一方面，$\frac{1+N}{2}\cdot N=\left(\frac{4k+3+1}{2}\right)\times(4k+3)$

$=(2k+2)(4k+3)$

＝偶数，

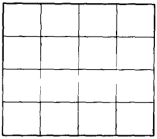
奇数≠偶数.

∴ 对于 $N \equiv 2, 3 \pmod 4$，

翻币后的结束状态不可能为 N 个 1.

本题的解决，给我们一个启示：一上手就解决 1993 个币的翻面问题，必然头绪纷多，不知所措. 此时要“退”够，退到最简单情况，对 $N=1$、2、3、4、5 找规律，数目少，结论易得，然后再“进”，而且要总结一般规律. 这样，对于 1993，以至于对于任何一个数，都一起解决了.

习题十五



1．如图，把边长为 4 的正方形分为 16 个边长为 1 的小正方形，则图中共有多少个长方形（包括正方形）？这些长方形面积之和为多少？

2．一个数列，它的前两个数是 2，7．以后各项构造规律是：自左至右，依次取相邻两项之积，如果积是一位数，就取它为下一项；如果积是两位数，就顺次用积的十位数字、个位数字作为后两项．把它的前几项写出来如下：

2，7，1，4，7，4，2，8，2，8，…

（由 2、7 产生第 3、4 项 1、4，由 7、1 产生第 5 项 7，由 1、4 产生第 6 项 4，由 4、7 产生第 7、8 项 2、8，由 7、4 产生第 9、10 项 2、8、…）．

这个无穷数列中，数字 6 是否出现？如果出现，出现多少次？

习题十五解答

1．记长为 a，宽为 b 的长方形为 $(a，b)$ $(a \geqslant b)$，则图中长方形按长宽规格可分如下几类：

$(1，1)$ 有 16 个，

$(2，1)$ 有 $12+12=24$ 个，

$(2，2)$ 有 9 个，

(3，1) 有 $8+8=16$ 个，
(3，2) 有 $6+6=12$ 个，
(3，3) 有 4 个，
(4，1) 有 $4+4=8$ 个，
(4，2) 有 $3+3=6$ 个，
(4，3) 有 $2+2=4$ 个，
(4，4) 有 1 个.

$\therefore\quad 16+24+9+16+12+4+8+6+4+1=100$ 个.

它们的面积之和为

$16\times1+24\times2+9\times4+16\times3+12\times6+4\times9+8\times4+6\times8+4\times12+1\times16=400.$

2. 按数列的构造规律多写一些：

2，7，1，4，7，4，2，8，2，8，8，1，6，1，6，1，6，6，4，8，6，6，6，6，6，3，6，…

显然 6 是出现了，而且出现次数比较多. 究竟会出现多少次呢？如果出现的次数有限，就得说明从某一项起，以后不会出现 6，再数一数出现次数. 如果无论哪一项之后总有 6 出现，那么 6 就出现无限多次. 从以上已经写出的部分，可以看到数列中出现了一个片段 $\boxed{6,6,6,6,6}$，那么以后必然会出现片段 $\boxed{3,6,3,6,3,6,3,6}$（不一定与 $\boxed{6,6,6,6,6}$ 相邻），再以后一定会出现片段 $\underbrace{\boxed{1,8,1,8,\cdots,1,8}}_{7个“1.8”}$，在这一片段之后

又会出现片段

后又会出现片段

$$\underbrace{\boxed{8,\ 8,\ 8,\ \cdots,\ 8}}_{13个“8”},$$

在片段Ⓐ之后又会出现片段

$$\underbrace{\boxed{6,\ 4,\ 6,\ 4,\ \cdots,\ 6,\ 4}}_{12\text{个“}6,4\text{”}},\qquad Ⓑ$$

在片段Ⓑ之后又会出现片段

$$\underbrace{\boxed{2,\ 4,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2,\ 4}}_{23\text{个“}2,4\text{”}},\qquad Ⓒ$$

在片段Ⓒ之后又会出现片段

$$\underbrace{\boxed{8,\ 8,\ 8,\ \cdots,\ 8}}_{45\text{个“}8\text{”}}.$$

由此发现了一个规律：类似于Ⓐ Ⓑ Ⓒ 的片段会反复无限多次出现（这些片段不一定相邻）．因为片段Ⓑ中有 6．所以在所给的无穷数列中，6 出现无穷多次．

[General Information]
书名=仁华学校奥林匹克数学课本·小学五年级
作者=刘彭芝主编　人大附中编
页数=295
SS号=11183453
出版日期=2004年01月第1版
出版社=中国大百科全书出版社
尺寸=21cm
原书定价=10.00
主题词=数学课－小学－教学参考资料
参考文献格式=刘彭芝主编.仁华学校奥林匹克数学课本.小学五年级.北京市：中国大百科全书出版社,2004.01.
内容提要=本书是奥林匹克系列丛书之一，非常适合相应年级的学生使用。受到各年级学生的好评。

目录