仁华学校奥林匹克数学系列丛书

人大附中 编

仁华学校奥林匹克数学

RENHUAXUEXIAOAOLINPIKESHUXUE

小学二年级

课本

中国大百科全书出版社

上册

第1讲 速算与巧算

一、“凑整”先算

1.计算：(1) $24+44+56$

(2) $53+36+47$

解：(1) $24+44+56=24+(44+56)$

$=24+100=124$

这样想：因为 $44+56=100$ 是个整百的数，所以先把它们的和算出来.

(2) $53+36+47=53+47+36$

$=(53+47)+36=100+36=136$

这样想：因为 $53+47=100$ 是个整百的数，所以先把 $+47$ 带着符号搬家，搬到 $+36$ 前面，然后再把 $53+47$ 的和算出来.

2.计算：(1) $96+15$　　(2) $52+69$

解：(1) $96+15=96+(4+11)$

$=(96+4)+11=100+11=111$

这样想：把15分拆成 $15=4+11$，这是因为 $96+4=100$，可凑整先算.

(2) $52+69=(21+31)+69$

$=21+(31+69)=21+100=121$

这样想：因为 $69+31=100$，所以把52分拆成21与

31 之和，再把 $31+69=100$ 凑整先算.

3. 计算：(1) $63+18+19$

(2) $28+28+28$

解：(1) $63+18+19$

$=60+2+1+18+19$

$=60+(2+18)+(1+19)$

$=60+20+20=100$

这样想：将 63 分拆成 $63=60+2+1$ 就是因为 $2+18$ 和 $1+19$ 可以凑整先算.

(2) $28+28+28$

$=(28+2)+(28+2)+(28+2)-6$

$=30+30+30-6=90-6=84$

这样想：因为 $28+2=30$ 可凑整，但最后要把多加的三个 2 减去.

二、改变运算顺序：在只有“+”、“-”号的混合算式中，运算顺序可改变

计算：(1) $45-18+19$

(2) $45+18-19$

解：(1) $45-18+19=45+19-18$

$=45+(19-18)=45+1=46$

这样想：把 +19 带着符号搬家，搬到 −18 的前面. 然后先算 $19-18=1$.

(2) $45+18-19=45+(18-19)$

$=45-1=44$

这样想：加 18 减 19 的结果就等于减 1.

三、计算等差连续数的和

相邻的两个数的差都相等的一串数就叫等差连续数，又叫等差数列，如：

1，2，3，4，5，6，7，8，9

1，3，5，7，9

2，4，6，8，10

3，6，9，12，15

4，8，12，16，20 等等都是等差连续数.

1. 等差连续数的个数是奇数时，它们的和等于中间数乘以个数，简记成：

$$\boxed{\text{和} = \text{中间数} \times \text{个数}}$$

(1) 计算：$1+2+3+4+5+6+7+8+9$

$=5\times 9$　　中间数是 5

$=45$　　共 9 个数

(2) 计算：$1+3+5+7+9$

$=5\times 5$　　中间数是 5

$=25$　　共有 5 个数

(3) 计算：$2+4+6+8+10$

$=6\times 5$　　中间数是 6

$=30$　　共有 5 个数

(4) 计算：$3+6+9+12+15$

$=9\times 5$　　中间数是 9

$=45$　　共有 5 个数

(5) 计算：$4+8+12+16+20$

$=12\times 5$　　中间数是 12

$=60$　　共有 5 个数

2. 等差连续数的个数是偶数时，它们的和等于首数与末数之和乘以个数的一半，简记成：

和 =（首数 + 末数）× 个数的一半

(1) 计算：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

$=(1+10)\times 5=11\times 5=55$

共 10 个数，个数的一半是 5，

首数是 1，末数是 10.

(2) 计算：

$3+5+7+9+11+13+15+17$

$=(3+17)\times 4=20\times 4=80$

共 8 个数，个数的一半是 4，

首数是 3，末数是 17.

(3) 计算：

$2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

$=(2+20)\times 5=110$

共 10 个数，个数的一半是 5，

首数是 2，末数是 20.

四、基准数法

(1) 计算：$23+20+19+22+18+21$

解： 仔细观察，各个加数的大小都接近 20，所以可以把每个加数先按 20 相加，然后再把少算的加上，把多算的减去.

$23+20+19+22+18+21$

$=20\times 6+3+0-1+2-2+1$

$=120+3=123$

6 个加数都按 20 相加，其和 $= 20 \times 6 = 120$. 23 按 20 计算就少加了"3"，所以再加上"3"；19 按 20 计算多加了"1"，所以再减去"1"，以此类推.

（2）计算：$102 + 100 + 99 + 101 + 98$

解：方法 1：仔细观察，可知各个加数都接近 100，所以选 100 为基准数，采用基准数法进行巧算.

$102 + 100 + 99 + 101 + 98$

$= 100 \times 5 + 2 + 0 - 1 + 1 - 2 = 500$

方法 2：仔细观察，可将 5 个数重新排列如下：（实际上就是把有的加数带有符号搬家）

$102 + 100 + 99 + 101 + 98$

$= 98 + 99 + 100 + 101 + 102$

$= 100 \times 5 = 500$

可发现这是一个等差连续数的求和问题，中间数是 100，个数是 5.

习　题　一

1. 计算：（1）$18 + 28 + 72$

（2）$87 + 15 + 13$

（3）$43 + 56 + 17 + 24$

（4）$28 + 44 + 39 + 62 + 56 + 21$

2. 计算：（1）$98 + 67$

（2）$43 + 28$

（3）$75 + 26$

3. 计算：（1）$82 - 49 + 18$

（2）$82 - 50 + 49$

(3) $41-64+29$

4.计算：(1) $99+98+97+96+95$

(2) $9+99+999$

5.计算：(1) $5+6+7+8+9$

(2) $5+10+15+20+25+30+35$

(3) $9+18+27+36+45+54$

(4) $12+14+16+18+20+22+24+26$

6.计算：(1) $53+49+51+48+52+50$

(2) $87+74+85+83+75+77+80+78+81+84$

7.计算：$1+2+3+4+5+6+1+2+3+4+5+6+1+2+3+4+5+6+1+2+3+4+5$

习题一解答

1.解：(1) $18+28+72=18+(28+72)$

$=18+100=118$

(2) $87+15+13=(87+13)+15$

$=100+15=115$

(3) $43+56+17+24$

$=(43+17)+(56+24)$

$=60+80=140$

(4) $28+44+39+62+56+21$

$=(28+62)+(44+56)+(39+21)$

$=90+100+60=250$

2.解：(1) $98+67=98+2+65$

$=100+65=165$

(2) $43+28=43+7+21=50+21=71$

或 $43+28=41+(2+28)=41+30=71$

(3) $75+26=75+25+1=100+1=101$

3.解：(1) $82-49+18=82+18-49$

$=100-49=51$

(2) $82-50+49=82-1=81$

(减 50 再加 49 等于减 1)

(3) $41-64+29=41+29-64$

$=70-64=6$

4.解：(1) $99+98+97+96+95$

$=100\times5-1-2-3-4-5$

$=500-15=485$

(每个加数都按 100 算，再把多加的减去)或

$99+98+97+96+95=97\times5=485$

(2) $9+99+999=10+100+1000-3$

$=1110-3=1107$

5.解：(1) $5+6+7+8+9$

$=7\times5=35$

(2) $5+10+15+20+25+30+35$

$=20\times7=140$

(3) $9+18+27+36+45+54$

$=(9+54)\times3=63\times3=189$

(4) $12+14+16+18+20+22+24+26$

$=(12+26)\times4=38\times4=152$

6.解：(1) $53+49+51+48+52+50$

$=50\times6+3-1+1-2+2+0$

$=300+3=303$

（2）$87+74+85+83+75+77+80+78+81+84$

$=80\times10+7-6+5+3-5-3+0-2+1+4$

$=800+4=804$

7.解：方法1：原式 $=21+21+21+15=78$

方法2：原式 $=21\times4-6=84-6=78$

方法3：原式 $=(1+2+3+4+5+6)\times3+15$

$=21\times3+15=63+15=78$

第2讲 数数与计数(一)

数学需要观察.大数学家欧拉就特别强调观察对于数学发现的重要作用,认为“观察是一件极为重要的事”.本讲数数与计数的学习有助于培养同学们的观察能力.在这里请大家记住,观察不只是用眼睛看,还要用脑子想,要充分发挥想像力.

【例1】 数一数,图2－1和图2－2中各有多少黑方块和白方块?

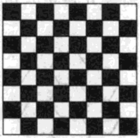


图2—1

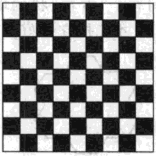


图2—2

解:仔细观察图2－1,可发现黑方块和白方块同样多.因为每一行中有4个黑方块和4个白方块,共有8行,所以:

黑方块是:$4\times8=32$(个)

白方块是:$4\times8=32$(个)

再仔细观察图2－2,从上往下看:

第一行 白方块5个,黑方块4个;

第二行 白方块4个,黑方块5个;

第三、五、七行同第一行，

第四、六、八行同第二行；

但最后的第九行是白方块 5 个，黑方块 4 个．可见白方块总数比黑方块总数多 1 个．

白方块总数：$5+4+5+4+5+4+5+4+5=41$（个）

黑方块总数：$4+5+4+5+4+5+4+5+4=40$（个）

再一种方法是：

每一行的白方块和黑方块共 9 个．

共有 9 行，所以，白、黑方块的总数是：$9\times9=81$（个）．

由于白方块比黑方块多 1 个，所以白方块是 41 个，黑方块是 40 个．

【例 2】 图 2－3 所示砖墙是由正六边形的特型砖砌成，中间有个“雪花”状的墙洞，问需要几块正六边形的砖（图 2－4）才能把它补好？

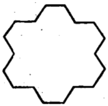


图 2—3

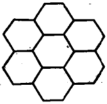


图 2—4

解： 仔细观察，并发挥想象力可得出答案，用七块正六边形的砖可把这个墙洞补好．如果动手画一画，就会看得更清楚了．

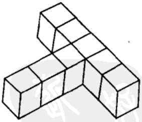


图 2－5

【例 3】 将 8 个小立方块组成如图 2－5 所示的“丁”字型，再将表面都涂成红色，然后就把小立方块

分开，问：

（1）3 面被涂成红色的小立方块有多少个？

（2）4 面被涂成红色的小立方块有多少个？

（3）5 面被涂成红色的小立方块有多少个？

解：如图 2－6 所示，看着图，想像涂色情况．当把整个表面都涂成红色后，只有那些“粘在一起”的面（又叫互相接触的面），没有被涂色．每个小立方体都有 6 个面，减去没涂色的面数，就得涂色的面数．每个小立方体涂色面数都写在了它的上面，参看图2－6所示．

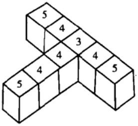


图 2－6

（1）3 面涂色的小立方体共有 1 个；

（2）4 面涂色的小立方体共有 4 个；

（3）5 面涂色的小立方体共有 3 个．

【例 4】　如图 2－7 所示，一个大长方体的表面上都涂上红色，然后切成 18 个小立方体（切线如图中虚线所示）．在这些切成的小立方体中，问：

（1）1 面涂成红色的有几个？

（2）2 面涂成红色的有几个？

（3）3 面涂成红色的有几个？

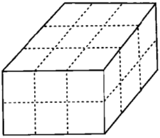


图 2－7

解：仔细观察图形，并发挥想像力，可知：

（1）上下两层中间的 2 块只有一面涂色；

(2) 每层四边中间的 1 块有两面涂色，上下两层共 8 块；

(3) 每层四角的 4 块有三面涂色，上下两层共有 8 块.

最后检验一下小立体总块数：

$$2+8+8=18(\text{个}).$$

习 题 二

1. 如图 2－8 所示，数一数，需要多少块砖才能把坏了的墙补好？

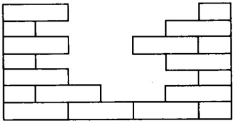


图 2－8

2. 图 2－9 所示的墙洞，用 1 号和 2 号两种特型砖能补好吗？若能补好，共需几块？

图 2－9

3. 图 2－10 所示为一块地板，它是由 1 号、2 号和 3 号

三种不同图案的瓷砖拼成. 问这三种瓷砖各用了多少块?

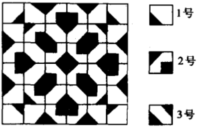


图 2－10

4. 如图 2－11 所示, 一个木制的正方体, 棱长为 3 寸, 它的六个面都被涂成了红色. 如果沿着图中画出的线切成棱长为 1 寸的小正方体.

求: (1)3 面涂成红色的有多少块?

(2) 2 面涂成红色的有多少块?

(3) 1 面涂成红色的有多少块?

(4) 各面都没有涂色的有多少块?

(5) 切成的小正方体共有多少块?

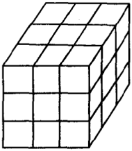


图 2－11

5. 图 2－12 所示为棱长 4 寸的正方体木块, 将它的表面全染成蓝色, 然后锯成棱长为 1 寸的小正方体.

问: (1)有 3 面被染成蓝色的多少块?

(2) 有 2 面被染成蓝色的多少块?

(3) 有 1 面被染成蓝色的多少块?

(4) 各面都没有被染色的多少块?

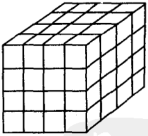


图 2－12

（5）锯成的小正方体木块共有多少块？

6. 图 2－13 所示为一个由小正方体堆成的“塔”. 如果把它的外表面（包括底面）全部涂成绿色，那么当把“塔”完全拆开时，3 面被涂成绿色的小正方体有多少块？

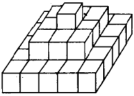


图 2－13

7. 图 2－14 中的小狗与小猫的身体的外形是用绳子分别围成的，你知道哪一条绳子长吗？（仔细观察，想办法比较出来）.

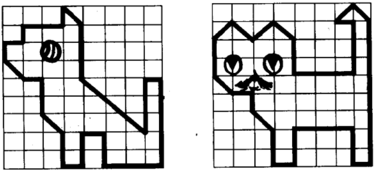


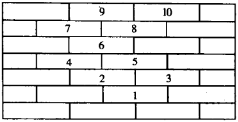
图 2－14

习题二解答

1. 解：用 10 块砖可把墙补好，可以从下往上一层一层地数（发挥想像力）：

共 1＋2＋2＋1＋2＋2＝10（块）.

如果用铅笔把砖画出来（注意把砖缝对好）就会十分清楚了，如图 2－15 所示.



第一层	第二层	第三层	第四层	第五层	第六层
1 块	2 块	2 块	1 块	2 块	2 块

图 2－15

2.解：仔细观察，同时发挥想像力可知需 1 号砖 2 块、2 号砖 1 块，也就是共需（如图 2－16 所示）

1＋2＝3（块）.

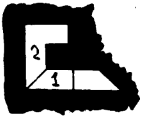


图 2－16

3.解：因为图形复杂，要特别仔细，最好是有次序地按行分类数，再进行统计：

	1 号	2 号	3 号
第一行	4	2	
第二行	2	2	2
第三行		4	2
第四行		4	2
第五行	2	2	2
第六行	4	2	

图 2－17

统计：$\left.\begin{array}{l}\text{1 号瓷砖共 12 块}\\ \text{2 号瓷砖共 16 块}\\ \text{3 号瓷砖共 8 块}\end{array}\right\}$总数：36 块.

4.解：(1)3 面涂色的有 8 块：它们是最上层四个角上的 4 块和最下层四个角上的 4 块.

(2) 2 面涂色的有 12 块：它们是上、下两层每边中间的那块共 8 块和中层四角的 4 块.

(3) 1 面涂色的有 6 块：它们是各面(共有 6 个面)中心的那块.

(4) 各面都没有涂色的有一块：它是正方体中心的那块.

(5) 共切成了 $3\times3\times3=27$(块).

或是如下计算：

$8+12+6+1=27$(块).

5.解：同上题(1) 8 块；(2)24 块；(3)24 块；(4) 8 块；(5)64 块.

6.解：3 面被涂成绿色的小正方体共有 16 块，就是图 2－18 中有“点”的那些块(注意最下层有 2 块看不见).

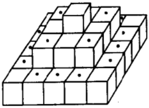


图 2－18

7.解：分类数一数可知，围成小猫的那条绳子比较长．因为小狗身体的外形是由 32 条直线段和 6 条斜线段组成；小猫身体的外形是由 32 条直线段和 8 条斜线段组成.

第3讲　数数与计数(二)

【例 1】　数一数，图 3－1 中共有多少点？

解：(1)方法 1：如图 3－2 所示

从上往下一层一层数：

图 3－1

第一层　1 个
第二层　2 个
第三层　3 个
第四层　4 个
第五层　5 个
第六层　6 个
第七层　7 个
第八层　8 个
第九层　9 个
第十层　10 个
第十一层　9 个
第十二层　8 个
第十三层　7 个
第十四层　6 个
第十五层　5 个
第十六层　4 个
第十七层　3 个
第十八层　2 个
第十九层　1 个

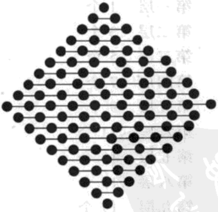


图 3－2

总数　$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1$
$=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)+(9+8+7+6+5+4+3+2+1)$
$=55+45=100$(利用已学过的知识计算).

（2）方法 2：如图 3－3 所示：从上往下，沿折线数

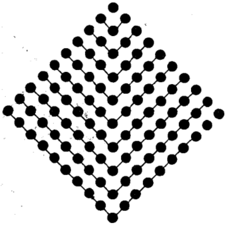


图 3－3

第一层　1 个
第二层　3 个
第三层　5 个
第四层　7 个
第五层　9 个
第六层　11 个
第七层　13 个
第八层　15 个
第九层　17 个
第十层　19 个

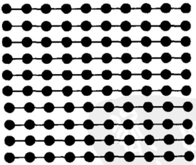


图 3－4

总数：$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$（利用已学过的知识计算）.

(3) 方法 3：把点群的整体转个角度，成为如图3－4所示的样子，变成为 10 行 10 列的点阵. 显然点的总数为

$10\times10=100$(个).

想一想：

①数数与计数，有时有不同的方法，需要多动脑筋.

②由方法 1 和方法 3 得出下式：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=10\times10$

即等号左边这样的一串数之和等于中间数的自乘积. 由此我们猜想：

$$1=1\times1$$
$$1+2+1=2\times2$$
$$1+2+3+2+1=3\times3$$
$$1+2+3+4+3+2+1=4\times4$$
$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5\times5$$
$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6\times6$$
$$1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1=7\times7$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1=8\times8$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1=9\times9$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=10\times10$$

这样的等式还可以一直写下去，能写出很多很多.

同学们可以自己检验一下，看是否正确，如果正确我们就发现了一条规律.

③由方法 2 和方法 3 也可以得出下式：

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=10\times10.$

即从 1 开始的连续奇数的和等于奇数个数的自乘积.

由此我们猜想：

$1+3=2\times2$

$1+3+5=3\times3$

$1+3+5+7=4\times4$

$1+3+5+7+9=5\times5$

$1+3+5+7+9+11=6\times6$

$1+3+5+7+9+11+13=7\times7$

$1+3+5+7+9+11+13+15=8\times8$

$1+3+5+7+9+11+13+15+17=9\times9$

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=10\times10$

还可往下一直写下去，同学们自己检验一下，看是否正确，如果正确，我们就又发现了一条规律．

【例 2】 数一数，图 3－5 中有多少条线段？

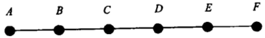


图 3－5

解：(1)我们已知，两点间的直线部分是一条线段．以 A 点为共同端点的线段有：

AB　AC　AD　AE　AF　5 条．

以 B 点为共同左端点的线段有：

BC　BD　BE　BF　4 条．

以 C 点为共同左端点的线段有：

CD　CE　CF　3 条．

以 D 点为共同左端点的线段有：

DE　DF　2 条．

以 E 点为共同左端点的线段有：

EF　1 条．

总数 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 条.

（2）用图示法更为直观明了. 见图 3 − 6.

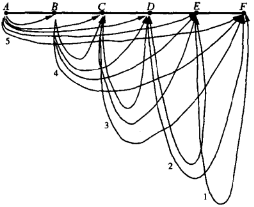


图 3 − 6

总数 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15(条).

想一想：①由例 2 可知，一条大线段上有六个点，就有：总数 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 条线段. 由此猜想如下规律(见图 3 − 7)：

两个点：　1 条线段

三个点：　2 + 1 条线段

四个点：　3 + 2 + 1 条线段

五个点：　4 + 3 + 2 + 1 条线段

六个点：　5 + 4 + 3 + 2 + 1 条线段

图 3 − 7

还可以一直做下去. 总之,线段总条线是从 1 开始的一串连续自然数之和,其中最大的自然数比总数小 1. 我们又发现了一条规律. 它说明了点数与线段总数之间的关系.

②上面的事实也可以这样说：如果把相邻两点间的线段叫做基本线段,那么一条大线段上的基本线段数和线

段总条数之间的关系是：

线段总条数是从 1 开始的一串连续自然数之和，其中最大的自然数等于基本线段的条数(见图 3－8).

基本线段数	线段总条数
一条：	1
二条：	2＋1
三条：	3＋2＋1
四条：	4＋3＋2＋1
五条：	5＋4＋3＋2＋1

图 3－8

还可以一直写下去，同学们可以自己试试看.

【例 3】 数一数，图 3－9 中共有多少个锐角？

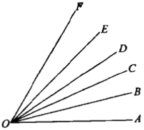


图 3－9

解：(1)我们知道，图中任意两条从 O 点发出的射线都组成一个锐角.

所以，以 OA 边为公共边的锐角有：

$\angle AOB$，$\angle AOC$，$\angle AOD$，$\angle AOE$，$\angle AOF$ 共 5 个.

以 OB 边为公共边的锐角有：$\angle BOC$，$\angle BOD$，$\angle BOE$，$\angle BOF$ 共 4 个.

以 OC 边为公共边的锐角有：$\angle COD$，$\angle COE$，$\angle COF$ 共 3 个。

以 OD 边为公共边的锐角有：$\angle DOE$，$\angle DOF$ 共 2 个。

以 OE 边为一边的锐角有：$\angle EOF$ 只 1 个.

锐角总数 5＋4＋3＋2＋1＝15(个).

②用图示法更为直观明了：如图3－10所示，锐角总数为：5＋4＋3＋2＋1＝15(个).

想一想：①由例 3 可知：由一点发出的六条射线，组成的锐角的总数 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1（个），由此猜想出如下规律：（见图3 − 11～15）

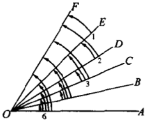


图 3 − 10

两条射线 1 个角（见图 3 − 11）
三条射线 2 + 1 个角（见图 3 − 12）
四条射线 3 + 2 + 1 个角（见图 3 − 13）
五条射线 4 + 3 + 2 + 1 个角（见图 3 − 14）
六条射线 5 + 4 + 3 + 2 + 1 个角（见图 3 − 15）

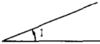


图 3 − 11

总之，角的总数是从 1 开始的一串连续自然数之和，其中最大的自然数比射线数小 1.

②同样，也可以这样想：如果把相邻两条射线构成的角叫做基本角，那么有共同顶点的基本角和角的总数之间的关系是：角的总数是从 1 开始的一串连续自然数之和，其中最大的自然数等于基本角个数.

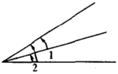


图 3 − 12

③注意，例 2 和例 3 的情况极其相似. 虽然例 2 是关于线段的，例 3 是关于角的，但求总数时，它们有同样的数学表

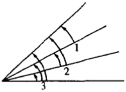


图 3 − 13

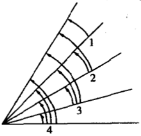


图 3—14

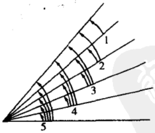


图 3—15

达式.同学们可以看出,一个数学式子可以表达表面上完全不同的事物中的数量关系,这就是数学的魔力.

习　题　三

1.书库里把书如图3－16所示的那样沿墙堆放起来.请你数一数这些书共有多少本?

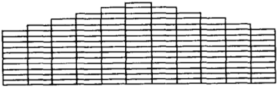


图3－16

2.图3－17所示是一个跳棋盘,请你数一数,这个跳棋盘上共有多少个棋孔?

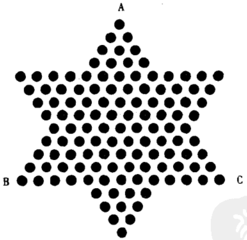


图3－17

3.数一数,图3－18中有多少条线段?

4.数一数,图3－19中有多少锐角?

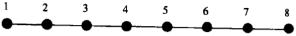


图 3－18

5. 数一数，图 3－20 中有多少个三角形？

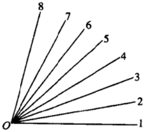


图 3—19

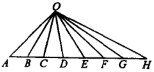


图 3—20

6. 数一数，图 3－21 中有多少正方形？

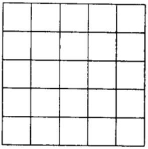


图 3－21

习题三解答

1. 解：方法 1：从左往右一摞一摞地数，再相加求和：
$10+11+12+13+14+15+14+13+12+11+10$
$=135$（本）.

方法 2：把这摞书形成的图形看成是由一个长方形和一个三角形“尖顶”组成.

长方形中的书　$10 \times 11 = 110$

三角形中的书　$1+2+3+4+5+4+3+2+1=25$

总数：$110+25=135$(本).

2.解：因为棋孔较多，应找出排列规律，以便于计数.

仔细观察可知，图中大三角形 ABC 上的棋孔的排列规律是(从上往下数)：1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,另外还有三个小三角形中的棋孔的排列规律是 1,2,3,4,所以棋孔总数是：$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13)+(1+2+3+4)\times 3$

$=91+10\times 3=121$(个).

3.解：方法 1：按图 3－22 所示方法数(图中只画出了一部分)

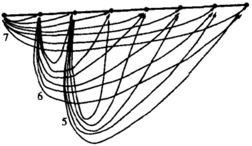


图 3—22

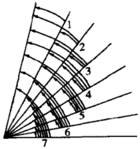


图 3—23

线段总数：$7+6+5+4+3+2+1=28$(条).

方法 2：基本线段共 7 条，所以线段总数是：

$$7+6+5+4+3+2+1=28(\text{条}).$$

4.解：按图 3－23 的方法数：

角的总数：$7+6+5+4+3+2+1=28$(个).

5．解：方法 1：（1）三角形是由三条边构成的图形．以 OA边为左公共边构成的三角形有：$\triangle OAB$，$\triangle OAC$，$\triangle OAD$，$\triangle OAE$，$\triangle OAF$，$\triangle OAG$，$\triangle OAH$，共 7 个；

以 OB 边为左公共边构成的三角形有：$\triangle OBC$，$\triangle OBD$，$\triangle OBE$，$\triangle OBF$，$\triangle OBG$，$\triangle OBH$，共 6 个；

以 OC 边为左公共边构成的三角形有：$\triangle OCD$，$\triangle OCE$，$\triangle OCF$，$\triangle OCG$，$\triangle OCH$，共 5 个；

以 OD 边为左公共边构成的三角形有：$\triangle ODE$，$\triangle ODF$，$\triangle ODG$，$\triangle ODH$，共 4 个；

以 OE 边为左公共边构成的三角形有：$\triangle OEF$，$\triangle OEG$，$\triangle OEH$，共 3 个；

以 OF 边为左公共边构成的三角形有：$\triangle OFG$，$\triangle OFH$，共 2 个；

以 OG 边和 OH，GH 两边构成的三角形仅有：$\triangle OGH$ 1 个；

三角形总数：$7+6+5+4+3+2+1=28$（个）．

（2）方法 2：显然底边 AH 上的每一条线段对应着一个三角形，而基本线段是 7 条，所以三角形总数为：$7+6+5+4+3+2+1=28$（个）．

6．解：最小的正方形有 25 个，

由 4 个小正方形组成的正方形　16 个；

由 9 个小正方形组成的正方形　9 个；

由 16 个小正方形组成的正方形　4 个；

由 25 个小正方形组成的正方形　1 个；

正方形总数：$25+16+9+4+1=55$ 个．

第4讲　认识简单数列

我们把按一定规律排列起来的一列数叫数列.

在这一讲里，我们要认识一些重要的简单数列，还要学习找出数列的生成规律；学会把数列中缺少的数写出来，最后还要学习解答一些生活中涉及数列知识的实际问题.

【例 1】　找出下面各数列的规律，并填空.

(1) 1，2，3，4，5，□，□，8，9，10.

(2) 1，3，5，7，9，□，□，15，17，19.

(3) 2，4，6，8，10，□，□，16，18，20.

(4) 1，4，7，10，□，□，19，22，25.

(5) 5，10，15，20，□，□；35，40，45.

解：(1) 是自然数列，它的规律是：后一个数比前一个数大 1；空处依次填：$\boxed{6}$，$\boxed{7}$.

(2) 是奇数列，它的规律是：后一个数比前一个数大 2；空处依次填：$\boxed{11}$，$\boxed{13}$.

(3) 是偶数列，它的规律是：后一个数比前一个数大 2；空处依次填：$\boxed{12}$，$\boxed{14}$.

(4) 是等差数列，它的规律是：后一个数比前一个数大 3；空处依次填：$\boxed{13}$，$\boxed{16}$.

(5) 是等差数列，它的规律是：后一个数比前一个数大 5；空处依次填：$\boxed{25}$，$\boxed{30}$.

注意：自然数列、奇数列、偶数列也是等差数列.

【例 2】　找出下面的数列的规律并填空.

1，1，2，3，5，8，13，□，□，55，89.

解：这叫斐波那契数列，从第三个数起，每个数都是它前面的两个数之和．这是个有重要用途的数列．$8+13=21$，$13+21=34$．所以：

空处依次填：$\boxed{21}$，$\boxed{34}$.

【例 3】　找出下面数列的生成规律并填空.

1，2，4，8，16，□，□，128，256.

解：它叫等比数列，它的后一个数是前一个数的 2 倍．$16\times2=32$，$32\times2=64$，所以空处依次填：$\boxed{32}$，$\boxed{64}$.

【例 4】　找出下面数列的规律，并填空.

1，2，4，7，11，□，□，29，37.

解：这数列规律是：后一个数减前一个数的差是逐渐变大的，这些差是个自然数列：

1，2，4，7，11，$\boxed{16}$，$\boxed{22}$，29，37

1，2，3，4，5，6，7，8，

【例 5】　找出下面数列的规律，并填空：

1，3，7，15，31，□，□，255，511.

解：规律是：后一个数减前一个数的差是逐渐变大的，差的变化规律是个等比数列，后一个差是前一个差的 2 倍.

1，3，7，15，31，$\boxed{63}$，$\boxed{127}$，255，511

2，4，8，16，32，64，128，256，

另外，原数列的规律也可以这样看：后一个数等于前一个数乘以 2 再加 1，即

后一个数 = 前一个数 × 2 + 1.

【例 6】 找出下面数列的生成规律，并填空.

1，4，9，16，25，□，□，64，81，100.

解：这是自然数平方数列，它的每一个数都是自然数的自乘积. 如：1 = 1 × 1，4 = 2 × 2，9 = 3 × 3，16 = 4 × 4，25 = 5 × 5，$\boxed{36 = 6 \times 6}$，$\boxed{49 = 7 \times 7}$，64 = 8 × 8，81 = 9 × 9，100 = 10 × 10.

若写成下面对应起来的形式，就看得更清楚.

自然数列：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
自然数平方数列：	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

【例 7】 一辆公共汽车有 78 个座位，空车出发. 第一站上 1 位乘客，第二站上 2 位，第三站上 3 位，依此下去，多少站以后，车上坐满乘客？（假定在坐满以前，无乘客下车，见表四（1））

解：方法 1　　表四（1）

第×站后	车上的人数
一	1
二	1 + 2 = 3
三	1 + 2 + 3 = 6
四	1 + 2 + 3 + 4 = 10
五	1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
六	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
七	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28
八	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36
九	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45
十	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55
十一	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66
十二	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78

方法 2：由上表可知，车上的人数是自 1 开始的连续自然数相加之和，到第几站后，就加到几，所以只要加到出现 78 时，就可知道是到多少站了.

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$（人）

可见第 12 站以后，车上坐满乘客.

【例 8】　如果第一个数是3，以后每隔 6 个数写出一个数，得到一列数：3，10，17，……，73. 这里 3 叫第一项，10 叫第二项，17 叫第三项，试求 73 是第几项？

解：从第 1 项开始，把各项依次写出来，一直写到 73 出现为止（见表四（2））.

表四（2）

第几项	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
项的数值	3	10	17	24	31	38	45	52	59	66	73

可见 73 是第 11 项.

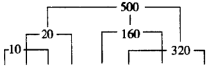
【例 9】　一天，爸爸给小明买了一包糖，数一数刚好 100 块. 爸爸灵机一动，又拿来了 10 个纸盒，接着说："小明，现在你把糖往盒子里放，我要求你在第一个盒子里放 2 块，第二个盒子里放 4 块，第三个盒子里放 8 块，第四个盒子里放 16 块，……照这样一直放下去. 要放满这 10 个盒，你说这 100 块糖够不够？"小朋友，请你帮小明想一想？

解：小朋友，你是不是以为 100 块糖肯定能够放满这 10 个纸盒的了！下面让我们算一算，看你想得对不对（见表四（3））.

表四（3）

第几个盒子	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
盒里的糖块	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

放满 10 个盒所需要的糖块总数：



$$2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024=2046（块）.$$

可见 100 块糖是远远不够的，还差 1946 块呢！这可能是你没有想到的吧！其实，数学中还有很多很多奇妙无比的故事呢.

习　题　四

1．从 1 开始，每隔两个数写出一个自然数，共写出十个数来.

2．从 1 开始，每隔六个数写出一个自然数，共写出十个数来.

3．在习题一和习题二中，按题目要求写出的两个数列中，除 1 以外出现的最小的相同的数是几？

4．自 2 开始，隔两个数写一个数：2，5，8，……，101.

可以看出，2 是这列数的第一项，5 是第二项，8 是第三项，等等．问 101 是第几个数？

5．如图 4－1 所示，“阶梯形”的最高处是 4 个正方形叠起来的高度，而且整个图形包括了 10 个小正方形．如果这个“阶梯形”的高度变为 12 个小正方形叠起来那样高，那么，整个图形应包括多少个小正方形？

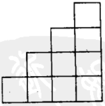


图 4－1

6．如图 4－2 所示，把小立方体叠起来成为“宝塔”，求这个小宝塔共包括多少个小立方体？

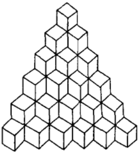


图 4－2

7．开学的第一个星期，小明准备发起成立一个趣味数学小组，这时只有他一个人．他决定第二个星期吸收两名新组员，而每个新组员要在进入小组后的下一个星期再吸收两名新组员，求开学 4 个星期后，这个小组共有多少组员？

8．图 4－3 所示为细胞的增长方式．就是说一个分裂为两个，再次分裂变为 4 个，第三次分裂为 8 个，……照这样下去，问经过 10 次分裂，一个细胞变成几个？

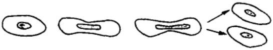


图 4－3

9．图 4－4 所示是一串“黑”、“白”两色的珠子，其中有一些珠子在盒子里，问

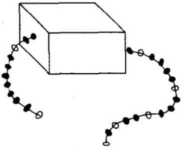


图 4－4

（1）盒子里有多少珠子？

（2）这串珠子共有多少个？

习题四解答

1．解：可以先写出从1开始的自然数列，再按题目要求删去那些不应该出现的数，就得到答案了：

1，~~2~~，~~3~~，4，~~5~~，~~6~~，7，~~8~~，~~9~~，10，~~11~~，~~12~~，13，~~14~~，~~15~~，16，~~17~~，~~18~~，19，~~20~~，~~21~~，22，~~23~~，~~24~~，25，~~26~~，~~27~~，28，……

即1，4，7，10，13，16，19，22，25，28

可以看出，这是一个等差数列，后面一个数比前面一个数大3．

2．解：仿习题1，先写前面的几个数如下：

1，~~2，3，4，5，6，7，~~ 8，~~9，10，11，12，13，14，~~ 15，

隔掉的　　　　隔掉的数

~~16，17，18，19，20，21，~~ 22，……

隔掉的数

可以看出，1，8，15，22，……也是一个等差数列，后面的一个数比前面的一个数大7．按照这个规律，可以写出所有的10个数：

1，8，15，22，29，36，43，50，57，64．

3．解：观察习题一和习题二两个数列：

习题二的数列是：1，8，15，$\boxed{22}$，……

习题一的数列是：1，4，7，10，13，16，19，$\boxed{22}$，25，28，……

可见两个数列中最小的相同数是 22.

4．解：经仔细观察后可以看出，这是一个等差数列，后一个数比前一个数大 3，即公差是 3．下面再多写出几项，以便从中发现规律：（表四（4））

表四（4）

第一项	第二项	第三项	第四项	第五项	……
2	5	8	11	14	……

再仔细观察可知：

第二项＝第一项＋1×公差，即 $5=2+1\times3$；

第三项＝第一项＋2×公差，即 $8=2+2\times3$；

第四项＝第一项＋3×公差，即 $11=2+3\times3$；

第五项＝第一项＋4×公差，即 $14=2+4\times3$；

…………

由于 $101=2+33\times3$；

可见，101 是第 34 项，即第 34 个数.

5．解：仔细观察可发现，这个“阶梯形”图形最高处是 4 个小正方形时，它就有 4 个台阶，整个图形包括的小正方形数为：

$$1+2+3+4=10.$$

所以最高处是 12 个小正方形时，它必有 12 个台阶，整个图形包括的小正方形数为：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$（个）.

6．解：从上往下数，小宝塔共有六层．仔细观察可发现如下规律（表四（5））：

表四（5）

第几层	1	2	3	4	5	6	
各层小立方体数	1	3	6	10	15	21	

所以六层小立方体的总数为：

$1+3+6+10+15+21=56$（个）.

7. 解：列表如下：

表四（6）

第几个星期	1	2	3	4	
各星期新进入的组员数	1	2	4	8	

4 个星期后小组的总人数：

$1+2+4+8=15$（人）.

8. 解：列表如下：

表四（7）

分裂次数	开始	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
细胞个数	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

一个细胞经过 10 次分裂变为 1024 个.

9. 解：仔细观察可知，这串珠子的排列规律是：

白 黑 白 黑 白 黑 白 黑 白 黑 白 黑 白 黑 白

1，1，1，2，1，3，1，4，1，5，1，6，1，7，1，

$$\underbrace{1+4\quad 1\quad 4+2}_{\text{在盒子里}}$$

①在盒子里有：

$4+1+4=9$（个）.

②这一串珠子总数是：

$1+1+1+2+1+3+1+4+1+5+1+6+1+7+1$

$=1+2+3+4+5+6+7+(1+1+1+1+1+1+1+1)$

$=28+8=36$（个）.

第5讲　自然数列趣题

本讲的习题，大都是关于自然数列方面的计数问题，解题的思维方法一般是运用枚举法及分类统计方法，望同学们能很好地掌握它.

【例1】　小明从1写到100，他共写了多少个数字“1”?

解：分类计算：

“1”出现在个位上的数有：

1，11，21，31，41，51，61，71，81，91共10个；

“1”出现在十位上的数有：

10，11，12，13，14，15，16，17，18，19共10个；

“1”出现在百位上的数有：100共1个；

共计$10+10+1=21$个.

【例2】　一本小人书共100页，排版时一个铅字只能排一位数字，请你算一下，排这本书的页码共用了多少个铅字?

解：分类计算：

从第1页到第9页，共9页，每页用1个铅字，共用$1\times9=9$（个）；

从第10页到第99页，共90页，每页用2个铅字，共用$2\times90=180$（个）；

第100页，只1页共用3个铅字，所以排100页书的页码共用铅字的总数是：

9 + 180 + 3 = 192（个）.

【例 3】 把 1 到 100 的一百个自然数全部写出来，用到的所有数字的和是多少？

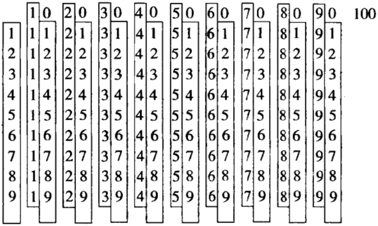


图 5－1

解：（见图 5－1）先按题要求，把 1 到 100 的一百个自然数全部写出来，再分类进行计算：

如图 5－1 所示，宽竖条带中都是个位数字，共有 10 条，数字之和是：

$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times 10$

$=45\times 10$

$=450.$

窄竖条带中，每条都包含有一种十位数字，共有 9 条，数字之和是：

$1\times 10+2\times 10+3\times 10+4\times 10+5\times 10+6\times 10+7\times 10+8\times 10+9\times 10$

$=(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times 10$

$=45\times 10$

$=450.$

另外 100 这个数的数字和是 $1+0+0=1$.

所以，这一百个自然数的数字总和是：

$450+450+1=901$.

顺便提请同学们注意的是：一道数学题的解法往往不只一种，谁能寻找并发现出更简洁的解法来，往往标志着谁有更强的数学能力. 比如说这道题就还有更简洁的解法，试试看，你能不能找出来？

习　题　五

1. 有一本书共 200 页，页码依次为 1、2、3、……、199、200，问数字“1”在页码中共出现了多少次？

2. 在 1 至 100 的奇数中，数字“3”共出现了多少次？

3. 在 10 至 100 的自然数中，个位数字是 2 或是 7 的数共有多少个？

4. 一本书共 200 页，如果页码的每个数字都得用一个单独的铅字排版（比如，“150”这个页码就需要三个铅字“1”、“5”和“0”），问排这本书的页码一共需要多少个铅字？

5. 像“21”这个两位数，它的十位数字“2”大于个位数字“1”，问从 1 至 100 的所有自然数中有多少个这样的两位数？

6. 像“101”这个三位数，它的个位数字与百位数字调换以后，数的大小并不改变，问从 100 至 200 之间有多少个这样的三位数？

7. 像 11、12、13 这三个数，它们的数位上的各个

数字相加之和是（1＋1）＋（1＋2）＋（1＋3）＝9．问自然数列的前 20 个数的数字之和是多少？

8．把 1 到 100 的一百个自然数全部写出来，用到的所有数字的和是多少？

9．从 1 到 1000 的一千个自然数的所有数字的和是多少？

习题五解答

1．解：分类计算，并将有数字“1”的数枚举出来．

“1”出现在个位上的数有：

1，11，21，31，41，51，61，71，81，91，

101，111，121，131，141，151，161，171，181，191

共 20 个；

“1”出现在十位上的数有：

10，11，12，13，14，15，16，17，18，19

110，111，112，113，114，115，116，117，118，119

共 20 个；

“1”出现在百位上的数有：

100，101，102，103，104，105，106，107，108，109，

110，111，112，113，114，115，116，117，118，119，

120，121，122，123，124，125，126，127，128，129，

130，131，132，133，134，135，136，137，138，139，

140，141，142，143，144，145，146，147，148，149，

150，151，152，153，154，155，156，157，158，159，

160，161，162，163，164，165，166，167，168，169，

170，171，172，173，174，175，176，177，178，179，

180，181，182，183，184，185，186，187，188，189，
190，191，192，193，194，195，196，197，198，199
共 100 个；

数字“1”在 1 至 200 中出现的总次数是：

20 + 20 + 100 = 140（次）.

2. 解：采用枚举法，并分类计算：

“3”在个位上：3，13，23，33，43，53，63，73，83，93 共 10 个；

“3”在十位上：31，33，35，37，39 共 5 个；

数字“3”在 1 至 100 的奇数中出现的总次数：

10 + 5 = 15（次）.

3. 解：枚举法：12，17，22，27，32，37，42，47，52，57，62，67，72，77，82，87，92，97 共 18 个.

4. 解：分段统计，再总计.

页数	铅字个数
1～9 共 9 页	1×9 = 9(个)(每个页码用 1 个铅字)
10～90 共 90 页	2×90 = 180(个)(每个页码用 2 个铅字)
100～199 共 100 页	3×100 = 300(个)(每个页码用 3 个铅字)
第 200 页共 1 页	3×1 = 3(个)(这页用 3 个铅字)

总数：9 + 180 + 300 + 3 = 492（个）.

5. 解：列表枚举，分类统计：

10						1 个
20	21					2 个
30	31	32				3 个
40	41	42	43			4 个
50	51	52	53	54		5 个
60	61	62	63	64	65	6 个

70	71	72	73	74	75	76			7 个
80	81	82	83	84	85	86	87		8 个
90	91	92	93	94	95	96	97	98	9 个

总数 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45（个）.

6．解：枚举法，再总计：

101，111，121，131，141，151，161，171，181，191 共 10 个．

7．解：分段统计（见表五（1）），再总计：

表五（1）

		数字和
1～9	1，2，3，4，5，6，7，8，9	45
10～19	10，11，12，13，14，15，16，17，18，19	45（个位上的数字和） 10（十位上的数字和）
20		2

总的数字相加之和：45+45+10+2=102．

8．解：按题意，试着写出从 1 到 100 的自然数中的头、尾和中间的几部分：1，2，3，……，48，49，50，51，……，96，97，98，99，100．仔细观察可知：

$$\left.\begin{array}{l}1+98=99,\\ 2+97=99,\\ 3+96=99,\\ \quad\vdots\\ 48+51=99,\\ 49+50=99.\end{array}\right\}\text{共计 49 个 99}$$

若再补个 0（并不影响题目的答案）还可以写出一个

类似的算式：

0 + 99 = 99；

因此共得出 50 个 99．而一个 99 的数字和是：9 + 9 = 18；

50 个 99 的数字和是：18 × 50 = 900，

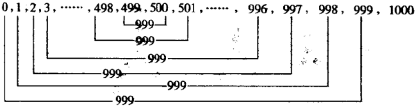
再加上 100 这个数的数字和是 1 + 0 + 0 = 1，

就得出从 1 到 100 的所有自然数的数字之和为 901．

照以上方法列出算式就非常简洁：

(9 + 9) × 50 + 1 = 901．

9．解：（见图 5 − 2）写出 1～1000 的自然数列的头、尾和中间的几部分，并在 1 的前面加个“0”；



共500对

图 5 − 2

又因为 9 + 9 + 9 = 27，

1 + 0 + 0 + 0 = 1，

所以从 1～1000 的所有自然数的所有数字之和为：

27 × 500 + 1 = 13501．

第6讲　找规律（一）

【例1】　观察下面由点组成的图形（点群），请回答：

（1）方框内的点群包含多少个点？

（2）第（10）个点群中包含多少个点？

（3）前十个点群中，所有点的总数是多少？

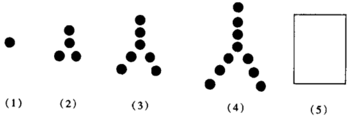


图6－1

解：数一数可知：前四个点群中包含的点数分别是：1，4，7，10.

可见，这是一个等差数列，在每相邻的两个数中，后一个数都比前一个数大3（即公差是3）.

（1）因为方框内应是第（5）个点群，它的点数应该是$10+3=13$（个）.

（2）列表，依次写出各点群的点数，

第几个	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
点数	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28

可知第（10）个点群包含有28个点.

（3）前十个点群，所有点的总数是：

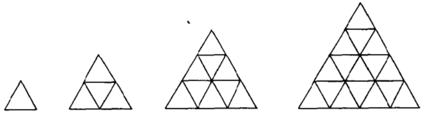
$1+4+7+10+13+16+19+22+25+28=145$（个）.

【例 2】　图 6－2 表示“宝塔”，它们的层数不同，但都是由一样大的小三角形摆成的. 仔细观察后，请你回答：

（1）五层的“宝塔”的最下层包含多少个小三角形？

（2）整个五层“宝塔”一共包含多少个小三角形？

（3）从第（1）到第（10）的十个“宝塔”，共包含多少个小三角形？



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图 6－2

解：（1）数一数“宝塔”每层包含的小三角形数：

第几层	1	2	3	4			
小三角形数	1	3	5	7			

可见 1，3，5，7 是个奇数列，所以由这个规律猜出第五层应包含的小三角形是 9 个.

（2）整个五层塔共包含的小三角形个数是：

$1+3+5+7+9=25$（个）.

（3）每个“宝塔”所包含的小三角形数可列表如下：

几层塔	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
小三角形数	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

由此发现从第（1）到第（10）共十个“宝塔”所包含的小三角形数是从 1 开始的自然数平方数列前十项之和：

50

40

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100=385(\text{个}).$$

80

90

【例 3】 下面的图形表示由一些方砖堆起来的“宝塔”．仔细观察后，请你回答：

（1）从上往下数，第五层包含几块砖？

（2）整个五层的“宝塔”共包含多少块砖？

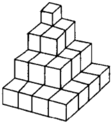


图 6－3

（3）若另有一座这样的十层宝塔，共包含多少块砖？

解：（1）数一数，“宝塔”每层包含的方砖块数：

第几层	1	2	3	4	
方砖块数	1	4	9	16	

可见各层的方砖块数组成自然数平方数列，按此规律，第五层应包含的方砖块数是：

$$5\times5=25\ （块）.$$

（2）整个五层“宝塔”共包含的方砖块数应是从 1 开始的前五个自然数的平方数相加之和，即：

$$1+4+9+16+25=55\ （块）.$$

（3）根据上面得到的规律，可求出十层宝塔所包含的方砖的块数：

90

80

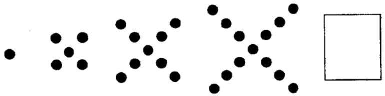
$$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100=385\text{（个）}.$$

40

50

习　题　六

1．观察图 6－4 中的点群，请回答：



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

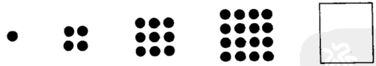
图 6－4

（1）方框内的点群包含多少个点？

（2）第 10 个点群中包含多少个点？

（3）前十个点群中，所有点的总数是多少？

2．观察下面图 6－5 中的点群，请回答：



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

图 6－5

（1）方框内的点群包含多少个点？

（2）推测第10个点群中包含多少个点？

（3）前10个点群中，所有点的总数是多少？

3．观察图6－6中的点群，请回答：

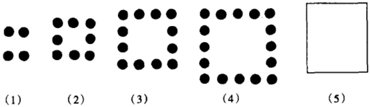


图6－6

（1）方框内的点群包含多少个点？

（2）推测第10个点群包含多少个点？

（3）前十个点群中，所有点的总数是多少？

4．图6－7所示为一堆砖．中央最高一摞是10块，它的左右两边各是9块，再往两边是8块、7块、6块、5块、4块、3块、2块、1块．

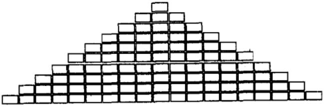


图6－7

问：（1）这堆砖共有多少块？

（2）如果中央最高一摞是100块，两边按图示的方式堆砌，问这堆砖共多少块？

5．图6－8所示为堆积的方砖，共画出了五层．如果以同样的方式继续堆积下去，共堆积了10层，问：

（1）能看到的方砖有多少块？

（2）不能看到的方砖有多少块？

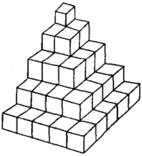


图 6～8

习题六解答

1．解：(1) 数一数，前四个点群包含的点数分别是：1，5，9，13．

不难发现，这是一个等差数列，公差是 4，可以推出，第 5 个点群包含的点数是：

13＋4＝17（个）．

(2) 下面依次写出各点群的点数，可得第 10 个点群的点数为 37．

第几个点群	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
包含的点数	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37

(3) 前十个点群的所有点数为：

$$1+5+9+13+17+21+25+29+33+37=190(\text{个}).$$

30

10　30　50　70

2．解：(1) 数一数，前 4 个点群包含的点数分别是：1，4，9，16．

不难发现，这是一个自然数平方数列．所以第 5 个点群（即方框中的点群）包含的点数是：

$5\times5=25$（个）．

(2) 按发现的规律推出，第十个点群的点数是：

$10\times10=100$（个）．

(3) 前十个点群，所有的点数是：

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100=385\text{（个）}.$$

3．解：(1) 数一数，前四个点群包含的点数分别是：4，8，12，16．

不难发现，这是一个等差数列，公差是 4，可以推出，第 5 个点群（即方框中的点群）包含的点数是：

$16+4=20$（个）．

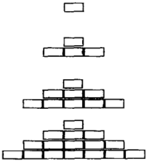
(2) 下面依次写出各点群的点数，可得第 10 个点群的点数为 40．

第几个点群	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
包含的点数	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

(3) 前十个点群的所有的点数为：

$$\overbrace{4+\overbrace{8+12}^{20}+16}^{20}+20+\overbrace{24+\overbrace{28+32}^{60}+36}^{60}+40=220\text{（个）}.$$

4. 解：从最简单情况入手，找规律：



总块数　$1=1\times1$

总块数　$1+2+1=2\times2$

总块数　$1+2+3+2+1=3\times3$

总块数　$1+2+3+4+3+2+1=4\times4$

图 6－9

按着这种规律可求得：

（1）当中央最高一摞是 10 块时，这堆砖的总数是：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1$

$=10\times10=100$（块）.

（2）当中央最高一摞是 100 块时，这堆砖的总数是：

$1+2+3+\cdots\cdots+98+99+100+99+98+\cdots\cdots+3+2+1$

$=100\times100=10000$（块）.

5. 解：（1）数一数，前五层中各层可见的方砖数是：1，3，5，7，9

不难发现，这是一个奇数列．照此规律，十层中可见的方砖总数是：

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

$=100$（块）.

（2）再想一想，前五层中，各层不能看到的方砖数是：

第一层　0 块；　第二层　1 块；　第三层　4 块；

第四层　9 块；　第五层　16 块；

不难发现，1，4，9，16 是自然数平方数列，按照此规律把其余各层看不见的砖块数写出来（如下表）：

第几层	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
看不见的砖数	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

则看不见的砖块总数为：

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81=285(\text{块}).$$

第7讲　找规律(二)

【例 1】　仔细观察下面的图形，找出变化规律，猜猜在第 3 组的右框空白格内填一个什么样的图？

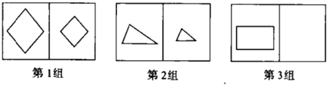


图 7－1

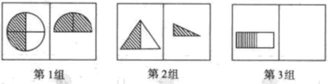


图 7－2

解：仔细观察图 7－1，可知：

第 1 组左边是个大菱形，右边是个小菱形.

第 2 组左边是个大三角形，右边是个小三角形.

其规律是：每组中左右两边图形的形状相同，大小不同.都是左边的图形大，右边的图形小.

猜出答案：第 3 组中右边空白格内应填个小长方形.(如图 7－3).

图 7－3

仔细观察图 7－2 可知：

第 1 组左边是个圆，而且左半圆涂有阴影线.右边是左边的阴影半圆顺时针旋转后放置的.

第 2 组左边是个等腰三角形，而且左半部(直角三角

形）涂有阴影线，右边是左边阴影直角三角形顺时针旋转后放置的.

其规律是：每组的右边格内的图形都是左边图形左边的一半，顺时针旋转放置后成为右边图形.

猜出答案：第3组中右框内应填个阴影小长方形.如图7－4示.

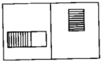
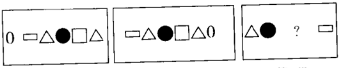


图7－4

【例2】 按顺序仔细观察图7－5、7－6的形状，猜一猜第3组的"?"处应填什么图?

第1组　第2组　第3组

图7－5



第1组　条2组　第3组

图7－6

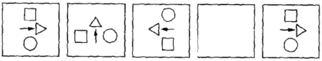
解：图7－5的？处应填○▲.注意观察第1组和第2组，每组都是由三对小图形组成；而每对小图形都是由一个"空白"的和一个"黑色"的小图形组成；而且它俩的排列顺序都是"空白"的在左边，"黑色"的在右边.

再按着第1、第2、第3组的顺序观察下去，可发现每对小图形在各组中的位置的变化规律：它们都在向左移动，当一对小图形移动到最左边后，下一步它就回到了最右边.按这个移动规律，可知图7－5中第3组"?"处应填：○▲.

图 7－6 的？处应填□△0．仔细观察可发现第 1 组和第 2 组中间的部分都是由三个小图形构成的．构成的规律是：当你按照第 1、第 2、第 3 组的顺序观察时，6 个小图形都在向左移动，而且移动的同时又在重新分组和组合，但排列顺序保持不变，当某一个小图形移动到了最左边时，下一步它就回到了最右边．按这个规律可知图 7－6 中第 3 组中间“？”处是：□△0．

【例 3】　观察图 7－7 的变化，请先回答：在方框(4)中应画出怎样的图形？

再答按(1)、(2)、(3)、……的顺序数下去，第(10)个方框中是怎样的图形？



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

图 7－7

解：先按(1)、(2)、(3)、……的顺序仔细观察，可发现：

方框中的箭头是按逆时针方向旋转的；方框中的其他小图形，如△、□和○也都是按逆时针方向旋转的．

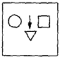


图 7－8

也就是说，方框连同内部的所有小图形作为一个整体在按逆时针方向旋转．

因此，方框(4)中的小图形应画成图 7－8 状．再按已找到的规律，进一步可发现图形的变化是有“周期性”的，也就是说，每过 4 个方框后，同样的图形又重新出现一次．如，你可看到第(1)和第(5)是完全一样的；因此，你可

图 7－9

以想像得到，第(2)和第(6)及第(10)个图形应当是完全一样的．即第(10)个方框中的图形应是图 7－9 所示的样子．

【例 4】 观察图7－10 的变化，请先回答：

第(4)、(8)个图中，黑点在什么地方？

第(10)、(18)个图中，黑点在什么地方？

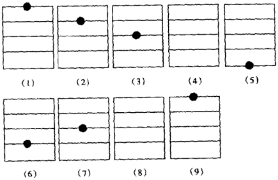


图 7－10

解：(1)按图 7－10 中(1)、(2)、(3)、……的顺序仔细观察，可发现黑点位置的变化规律：

在(1)中，黑点在最上面第一条横线上；

在(2)中，黑点下降了一格，在上面第二条横线上；

在(3)中，黑点又下降了一格，在中间一条线上了．

按黑点位置的这种变化可推测出：

在(4)中，黑点又下降一格，它的位置应如图 7－11 所示．

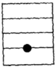


图 7－11

继续观察下去：

在(5)中，黑点下降到最下面的一条横线上；

在(6)中，黑点开始往上升一格；

在(7)中，黑点再上升一格，

按着黑点位置的这种变化可推测出：在(8)中，黑点又上升一格，它的位置应如图 7－12 所示.

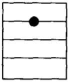


图 7－12

(2) 进一步仔细观察图 7－10(1)～(9)，可发现黑点位置变化的“周期性”规律：也就是说，每隔 8 个小图，黑点又回到原来的位置.

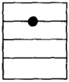


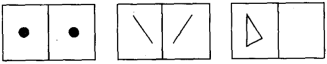
图 7－13

因为 2＋8＝10，2＋8＋8＝18.

所以第(10)、(18)个小图中，黑点的位置应与第(2)个小图相同，见图 7－13 所示.

习　题　七

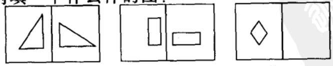
1. 仔细观察图 7－14，找找变化规律，猜猜在第 3 组的空白格内填一个什么样的图？



第 1 组　　第 2 组　　第 3 组

图 7－14

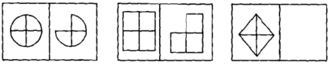
2. 仔细观察图 7－15，找找变化规律，猜猜在第 3 组的空白格内填一个什么样的图？



第 1 组　　第 2 组　　第 3 组

图 7－15

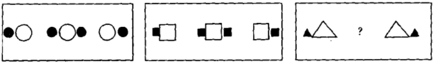
3. 仔细观察图 7－16，找找变化规律，猜猜在第 3 组的空白格内填一个什么样的图？



第1组　　第2组　　第3组

图 7－16

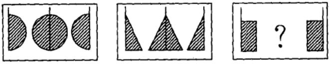
4. 按顺序仔细观察下列图形，猜一猜第 3 组的“?”处应填什么图？



第1组　　第2组　　第3组

图 7－17

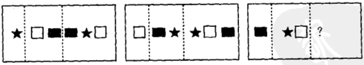
5. 按顺序仔细观察下列图形，猜一猜第 3 组的“?”处应填什么图？



第1组　　第2组　　第3组

图 7－18

6. 按顺序仔细观察下列图形，猜一猜第 3 组的“?”应填什么图？

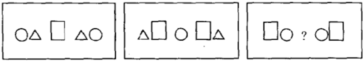


第1组　　第2组　　第3组

图 7－19

7. 按顺序仔细观察下列图形，猜一猜第 3 组的“?”应

填什么图？



第1组　　第2组　　第3组

图7－20

8. 仔细观察下列图形的变化，请先回答：

①在方框(4)中应画出怎样的图形？

②再按(1)、(2)、(3)、……的顺序数下去，第(10)个方框是怎样的图形？

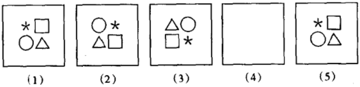


图7－21

9. 仔细观察下列图形的变化，请先回答：

①在方框(4)中应画出怎样的图形？

②再按(1)、(2)、(3)、……的顺序数下去，第(10)个方框是怎样的图形？

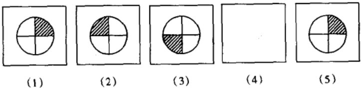


图7－22

习题七解答

1.答：（见图 7－23）.

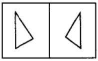


图 7－23

2.答：（见图 7－24）.

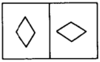


图 7－24

3.答：（见图 7－25）.

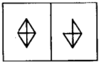


图 7－25

4.答（见图 7－26）.

图 7－26

5.答：（见图 7－27）.

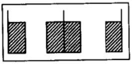


图 7－27

6. 答：（见图 7－28）.

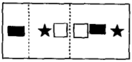


图 7－28

7. 答：（见图 7－29）.

图 7－29

8. 答：（见图 7－30）.

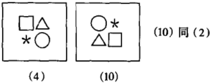


图 7－30

①先按(1)、(2)、(3)、……的顺序仔细观察，可以发现：

在(1)中，* 在左上角，在(2)中它在右上角，在(3)中它在右下角，……可见它在沿顺时针方向转动.

其他三个小图形，即□、△、○，也和 * 一样都在沿着顺时针方向转动.

发现规律：因方框中的每个小图形的位置的变化都是按顺时针方向旋转，可以说，方框连同内部的小图形及整体在按顺时针方向旋转.

②进一步猜想，根据所发现的规律进一步推测可知，第(4)个方框中的图形的样子.

③按(1)、(2)、(3)、……的顺序仔细观察，进一步还可

发现，图形的变化是有“周期性”的，也就是说，每过 4 个方框后，完全同样的图形又重新出现，如第(1)、(5)、(9)个图形是完全一样的.因为 2+4+4=10，所以第(10)个方框内的图形与第(2)完全相同.

9.答：(见图 7－31)

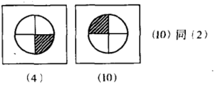


图 7－31

第8讲　找规律(三)

数学家看问题，总想找规律．我们学数学，也要向他们学习．找规律，要从简单的情况着手，仔细观察，得到启示，大胆猜想，找出一般规律，还要进行验证，最后还需要证明(在小学阶段不要求同学们进行证明)．

【例 1】 沿直尺的边缘把纸上的两个点连起来，这个图形就叫做线段．这两个点就叫线段的端点．如图 8－1－1 所示．不难看出，线段也可以看成是直线上两点间的部分．如果一条直线上标出 11 个点，如图 8－1－2 所示，任何两点间的部分都是一条线段，问共有多少条线段．

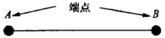


图 8－1－1

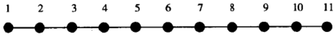


图 8－1－2

解：先从简单的情况着手．

(1) 画一画，数一数：(见图 8－1－3)

(2) 试着分析：

2 个点，线段条数：1＝1

3 个点，线段条数：3＝2＋1

4 个点，线段条数：6＝3＋2＋1

5 个点，线段条数：10＝4＋3＋2＋1

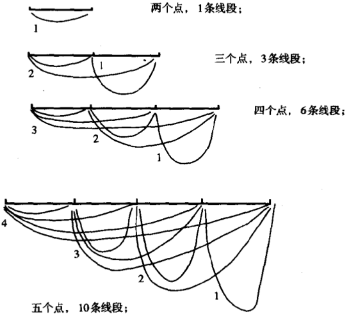


图 8－1－3

(3) 大胆猜想：一条直线上有若干点时线段的条数总是从 1 开始的一串自然数相加之和，其中最大的自然数比点数小 1.

(4) 进行验证：对于更多点的情况，对猜想进行验证，看猜想是否正确，如果正确，就增加了对猜想的信心．如：

6 个点时：对不对？

——对．见图 8－1－4．

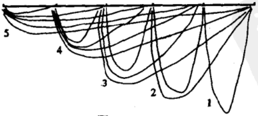


图 8－1－4

线段条数：5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15(条).

(5) 应用规律：应用猜想到的规律解决更复杂的问题.

当直线上有 11 个点时，线段的条数应是：

10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55(条).

【例 2】 如图 8 - 2 中(1)～(5)所示两条直线相交只有 1 个交点，3 条直线相交最多有 3 个交点，4 条直线相交最多有 6 个交点，……那么，11 条直线相交最多有多少交点？

解：从简单情况着手研究：

(1) 画一画、数一数

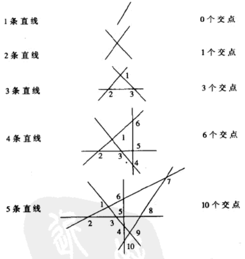


图 8 - 2

（2）试着分析：

直线条数	最多交点数
1	0
2	1=1
3	3=2+1
4	6=3+2+1
5	10=4+3+2+1

（3）大胆猜想：若干条直线相交时，最多的交点数是从1开始的一串自然数相加之和，其中最大的自然数比直线条数小1.

（4）进行验证：见图8－3.取6条直线相交，画一画，数一数，看一看最多交点个数与猜想的是否一致，若相符，则更增强了对猜想的信心.

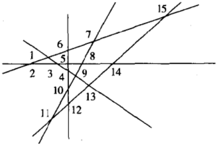


图8－3

用猜想的算法进行计算：最多交点数应是

5+4+3+2+1=15(个).

（5）应用规律：应用猜想到的规律解决更复杂的问题.当有11条直线相交时，最多的交点数应是：

10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55(个).

【例3】 如图8－4所示，一张大饼，切1刀最多切成2块，切2刀最多切成4块，切3刀最多切成7块，……问

切 10 刀最多切成多少块？

解：从最简单情况着手研究.

（1）画一画、数一数

图 8－4

（2）试着分析：

所切刀数	切出的块数
0	1
1	$2=1+1$
2	$4=1+1+2$
3	$7=1+1+2+3$
4	$11=1+1+2+3+4$

（3）大胆猜想：把一张大饼切若干刀时，切成的最多块数等于从 1 开始的一串自然数相加之和加 1. 其中最大的自然数等于切的刀数.

（4）进行验证：见图 8－5 对大饼切 5 刀的情况用两种方法求解，看结果是否一致，若一致则更增强了对猜想的信心.

①数一数：16 块.

②算一算：$1+1+2+3+4+5=16$（块）.

（5）应用规律：把大饼切 10 刀时，最多切成的块数是：

$1+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

$=1+55=56$（块）.

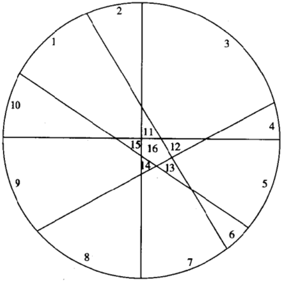


图 8－5

习　题　八

1. 如图 8－6 所示，直线上有 13 个点，任意两点间的部分都构成一条线段，问共构成多少条线段？

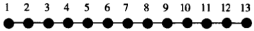


图 8－6

2. 如图 8－7 所示，两条直线最多有一个交点，三条直线最多有三个交点，四条直线最多有六个交点，……，问十

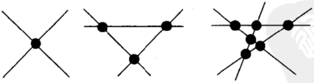


图 8－7

三条直线最多有几个交点？

3. 图 8－8 所示为切大饼示意图，已知切 1 刀最多切成 2 块，切 2 刀最多切成 4 块，切 3 刀最多切成 7 块，……，问切 12 刀最多切成多少块？

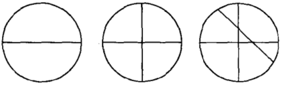


图 8－8

4. 如图 8－9 所示，将自然数从小到大沿三角形的边成螺旋状，排列起来，2 在第一个拐弯处，4 在第二个拐弯处，7 在第三个拐弯处，……，问在第十个拐弯处的自然数是几？

图 8－9

5. 如图 8－10 所示为切大饼的示意图. 切一刀只有一

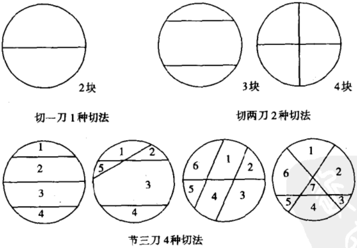
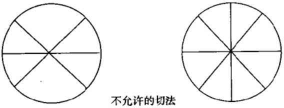


图 8－10

种切法，切两刀有 2 种切法，切三刀有 4 种切法，……，问切十一刀有多少种切法（规定：三刀或三刀以上不能切在同一点上，如图 8－11 所示）？



不允许的切法

图 8－11

习题八解答

1. 解：利用例 1 得到的规律可知：一条直线上有若干点时，线段的条数是从 1 开始的一串自然数相加之和，其中最大的自然数比点数小 1.

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12$

$=78$（条）.

2. 解：利用例 2 得到的规律可知，有若干条直线相交时，最多的交点数是从 1 开始的一串自然数相加之和，其中最大的自然数比直线条数小 1.

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12$

$=78$（个）.

3. 解：利用例 3 得到的规律可知，把一张大饼切若干刀时，切成的最多块数，等于从 1 开始的一串自然数相加之和加 1，其中最大的自然数等于切的刀数.

$1+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12$

$=1+78=79$（块）.

4. 解：方法 1：观察图 8－12，仔细分析找规律.

第一个拐弯处　$2=1+1$

第二个拐弯处　$4=1+1+2$

第三个拐弯处　$7=1+1+2+3$

第四个拐弯处　$11=1+1+2+3+4$

第五个拐弯处　$16=1+1+2+3+4+5$

发现规律：拐弯处的数是从 1 开始的一串自然数相加之和再加 1，在第几个拐弯处，就加到第几个自然数.

所以第十个拐弯处的数是：

$1+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=56$.

方法 2：由于此题比较简单，把图形画出来（图8－12），按要求把自然数排列在三角形的边上，答案也是 56.

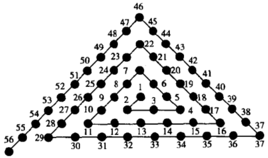


图 8－12

5. 解：对简单的情况，仔细观察、分析，大胆猜想，找出规律，用于解决复杂的情况. 如图 8－13 所示：

切一刀，1 种切法：　$1=1$

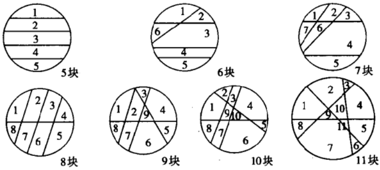
切两刀，2 种切法：　$2=1+1$

切三刀，4 种切法：　$4=1+1+2$

大胆猜想，切四刀的切法数应为：

$1+1+2+3=7$ 种切法.

进行验证(实际切切看)：



切四刀共7种切法

图 8－13

应用得到的规律，求得切十一刀的不同切法数为：

1＋1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＋10

＝1＋55

＝56(种).

第9讲　填图与拆数

填图是一种运算游戏，它要求把一些数字按照一定的规则填进各类图形．这不仅可以提高运算能力，而且更能促使你积极地去思考问题、分析问题，使你的智力得到更好地发展．

【例1】　请你把1、2、3这三个数填在图9－1中的方格中，使每行、每列和每条对角线上的三个数字之和都相等．

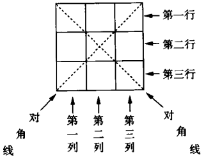


图9－1

解：这样想，如果每行的三个数分别是1、2、3，每列的三个数也分别是1、2、3，那么自然满足每行、每列的三个数之和相等这个条件的要求．试着填填看．有图9－2、图9－3和图9－4三种不同的填法，检查一下，只有图9－4的填法，满足对角线上的三个数之和与每行、每列三数之和相等这个条件的要求．

3	2	1
2	1	3
1	3	2

图 9－2（不合要求）

1	2	3
2	3	1
3	1	2

图 9－3（不合要求）

1	3	2
3	2	1
2	1	3

图 9－4

【例 2】　请把 1～9 九个数字填入图 9－5 中，要求每行、每列和每条对角线上三个数的和都要等于 15.

图 9－5

8	3	4
1	5	9
6	7	2

图 9－6

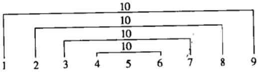


图 9—7

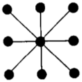


图9—8

解：从 1～9 这九个数字中，5 是处于中间的一个数，而 4 与 6，3 与 7，2 与 8，1 与 9 之和都正好是 10．所以 5 应当填在中心的空格中，而其他八个数字应当填到周边的方格中．上面图 9－6 就是一个符合要求的解答，把 5 填在中心空格后，尝试几次是不难得出这种答案的．

【例 3】　如下面图 9－9 所示有八张卡片．卡片上分

别写有 1、2、3、4、5、6、7、8 八个数．现在请你重新按图 9－10 进行排列，使每边三张卡片上的数的和等于：①13，②15.

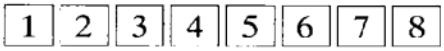


图 9－9

图 9－10

解：①要使每边三张卡片上的数相加之和等于 13 时，就要将 13 分拆成三个数之和.

$$13=8+5=\begin{cases}7+1+5\\6+2+5\end{cases}$$

$$=\begin{cases}8+4+1\\8+3+2\end{cases}$$

以上的分拆是分两步进行的.

可以看出，因为 $8+5=13$，所以 8 和 5 不能填在同一边（若把 8 和 5 填在同一边，再加上第三个数时必然会大于 13，这不符合题目要求），也就是说，要把 8 和 5 分别填在相对的两个角上的方格里．如图 9－11 所示.

②要使每边三张卡片上的数相加之和等于 15 时，就要将 15 分拆成三个数之和：

$$15=8+7=\begin{cases}8+4+3\\8+6+1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}5+3+7\\6+2+7\end{cases}$$

以上的分拆也是分两步进行的.

可以看出，因为 $8+7=15$，所以 8 和 7 不能填在同一边，也就是说，要把 8 和 7 分别填在相对的两个角的方格里，如图 9－12 所示.

和 ＝ 13

8	4	1
3		7
2	6	5

图 9—11

和 ＝ 15

8	4	3
1		5
6	2	7

图 9—12

【例 4】 图 9－13 是由八个小圆圈组成的，每个小圆圈都有直线与相邻的小圆圈相接连．请你把 1、2、3、4、5、6、7、8 八个数字分别填在八个小圆圈内，但相邻的两个数不能填入有直线相连的两个小圆圈（例如，你在最上头的一个小圆圈中填了 5，那么 4 和 6 就不能填在第二层三个小圆圈中了）．

解：答案如图 9－14 所示．中间的两个圈只能填 1 和 8，是这样分析出来的：在 1、2、3、4、5、6、7、8 这八个数字中，只有“1”和“8”这两个数，各有一个相邻的数，也就是有六个不相邻的数．中间的两个小圆圈，每个都有六条线连着六个小圆圈，每个小圆圈中恰好能填一个与它不相邻的数．其余的数每个都有两个相邻的数，如 4 有两个相邻的数 2 和 3，所以在 1 至 8 这八个数中 4 只有五个不相邻的数，这样 4 就不能填到中间的小圆圈中了．

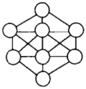


图9—13

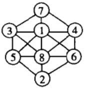


图9—14

习　题　九

1．在图 9－15，9－16 中，只能用图中已有的三个数填满其余的空格，并要求每个数字必须使用 3 次，而且每行、每列及每条对角线上的三个数之和都必须相等．

		8
	6	
4		

图 9－15

3	7	
	5	

图 9－16

2．把 10、12、14 这三个数填在图 9－17 的方格中，使每行、每列和每条对角线上的三个数之和都相等．

图 9－17

3．在图 9－18 中，三个圆圈两两相交形成七块小区域，分别填上 1～7 七个自然数，在一些小区域中，自然

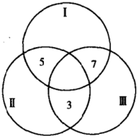


图 9—18

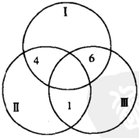


图 9—19

数3、5、7三个数已填好，请你把其余的数填到空着的小区域中，要求每个圆圈中四个数的和都是15.

4．与第3题的图相似，只是已经把1、4、6三个数填好，请你继续把图9－19填满.

5．图9－20中有三个大圆，在大圆的交点上有六个小圆圈．请你把1、2、3、4、5、6六个数分别填在六个小圆圈里，要求每个大圆上的四个小圆圈中的数之和都是14.

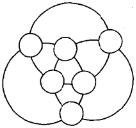


图9－20

6．图9－21是由四个三角形组成的，每个三角形上都有三个小圆圈．请你把1、2、3、4、5、6、7、8、9这九个数填在九个小圆圈中，让每个三角形上的三个数之和都是15.

7．图9－22是由四个扁而长的圆圈组成的，在交点处有8个小圆圈．请你把1、2、3、4、5、6、7、8这八个数分别填在8个小圆圈中．要求每个扁长圆圈上的四个数字的和都等于18.

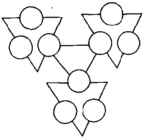


图9—21

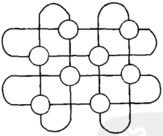


图9—22

习题九解答

1. 解：因为空格中只能用 4、6、8 填，不难看出左上角的空格只能填 6，见图 9－23．同样道理，右下角也只能填 6，见图 9－24．下一步就能容易地填满其他空格了（见图 9－25）．

6		8
	6	
4		

图 9－23

6		8
	6	
4		6

图 9－24

6	4	8
8	6	4
4	8	6

图 9－25

在图 9－16 中，显然右下角应填 7，见图 9－26．而右上角应填 5，见图 9－27．这样其他空格随之就可以填满了（见图 9－28）．

3	7	
	5	
		7

图 9－26

3	7	5
	5	
		7

图 9－27

3	7	5
7	5	3
5	3	7

图 9－28

2. 解：模仿例 1 的填法．首先将 10、12、14 三个数的中间数 12 填在中心方格中，并使一条对角线上的三个数都是 12，见图 9－29，第二步再按要求填满其他空格就容易了（见图 9－30）．

		12
	12	
12		

图 9－29

10	14	12
14	12	10
12	10	14

图 9－30

3．解：这样想，图 9－18 中还空着四个小区域需要填入四个数：1、2、4、6．还可看出中心的一个小区域属于三个圆圈，这里应填哪个数呢？下面用拆数方法来分析确定．

先见图 9－18 中的圆圈Ⅰ，圆中已有两个数 5 和 7，所以空着的两个小区域应填的两个数之和为 $15-5-7=3$．再将 3 分拆成 $3=1+2$，但是在 1 和 2 中应把哪一个填到中心的小区域里，现在还不能肯定下来．

再看圆圈Ⅱ，圆中已有两个数 5 和 3，$15-5-3=7$，而 $7=1+6$，即可把 7 分拆成 $7=1+6$．

最后看圆圈Ⅲ，$15-3-7=5$，而 $5=1+4$．至此可以看出，应该把“1”填在中心的小区域了（见图 9－31）．

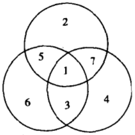


图 9－31

4．解：模仿第 3 题解法拆数：

要填 2、3、5、7．

$15-4-6=5$，$5=2+3$

$15-1-6=8$，$8=3+5$

$15-1-4=10$，$10=3+7$

所以，应把 3 填在中心的小区域（见图 9－32）．

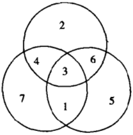


图 9－32

5．解：如图 9－33 所示，因为要求大圆上的四个小圆圈中的四个数之和等于 14，所以就要把 14 分拆成四个数相加之和，而且按题目要求这四个数要在 1、2、3、4、5、6 中选取；

$14=6+5+2+1$,

$14=6+4+3+1$,

$14=5+4+3+2$.

6．解：先将 15 分拆成三个数之和，并且要求各数在 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数中选取．用二步分拆法：

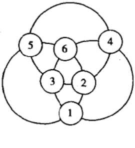


图 9－33

$15=9+6=9+5+1$

$15=8+7=8+4+3$

$15=7+8=7+6+2$

以上三式把九个数都用上了．这样（9，5，1）、（8，4，3）和（7，6，2）就可以分别填入角上的 3 个三角形中．再注意到中间的三角形的三个小圆圈分属于角上的 3 个三角形，所以从三组中各取一个数重新组成一组填入中间三角形，如取（9，4，2），填出下面的结果，见图 9－34．注意此题填法不惟一，你还能想出别种填法吗？

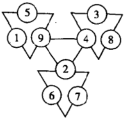


图 9－34

7．解：因为题目要求扁长圆圈上的四个数之和等于 18，所以就要将 18 分拆成四个不相等的整数之和，而且各数要从 1～8 这八个数中选取．如：

$18=8+7+2+1$

$18=8+5+2+3$

$18=7+6+4+1$

$18=6+5+4+3$

即得到四组数：（8，7，2，1）、（8，5，2，3）、（7，

6，4，1）、（6，5，4，3），把它们填入扁长圆圈时，注意适当调整，就可以得出题目的答案如图 9－35 所示.

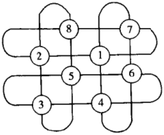


图 9－35

第10讲　考虑所有可能情况（一）

有些数学题，要求把符合条件的算式或得数全部找出来；若漏掉一个，答案就不对．做这种题，特别强调有秩序的思考．

【例 1】　从 2 个 5 分硬币、5 个 2 分硬币、10 个 1 分硬币中，拿出 1 角钱来，有多少种不同的拿法？

解：找出所有不同的搭配情况，共 10 种见下表．

5 分	2 分	1 分	算式
2 个			$5+5=10$
1 个	2 个	1 个	$5+2+2+1=10$
	1 个	3 个	$5+2+1+1+1=10$
		5 个	$5+1+1+1+1+1=10$
	5 个		$2+2+2+2+2=10$
	4 个	2 个	$2+2+2+2+1+1=10$
	3 个	4 个	$2+2+2+1+1+1+1=10$
	2 个	6 个	$2+2+1+1+1+1+1+1=10$
	1 个	8 个	$2+1+1+1+1+1+1+1+1=10$
		10 个	$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=10$

【例 2】　5 个茶杯的价钱分别是 9 角、8 角、6 角、4 角和 3 角，3 个茶盘的价钱分别是 7 角、5 角和 2 角；如果一个茶杯配一个茶盘，一共可以配成多少种不同价钱的茶具？

解：采取“笨”办法进行搭配．先把各种不同价钱的茶杯都配上一个 7 角钱的茶盘，得出不同价钱的茶具如下：

$$\begin{array}{rrrrrr} & 9, & 8, & 6, & 4, & 3, \\ +) & 7, & 7, & 7, & 7, & 7, \\ \hline & 16, & 15, & 13, & 11, & 10 \end{array}$$

将这些茶杯与 5 角钱的茶盘搭配，又可得出一些不同价钱的茶具，但要注意去掉那些与前面相同的价钱：

$$\begin{array}{rrrrrr} & 9, & 8, & 6, & 4, & 3, \\ +) & 5, & 5, & 5, & 5, & 5, \\ \hline & 14, & \cancel{13}, & \cancel{11}, & 9, & 8 \end{array}$$

再将这些茶杯与 2 角钱的茶盘搭配，同时去掉那些与前面相同的价钱：

$$\begin{array}{rrrrrr} & 9, & 8, & 6, & 4, & 3, \\ +) & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, \\ \hline & \cancel{11}, & \cancel{10}, & \cancel{8}, & 6, & 5 \end{array}$$

最后数一数，共有 10 种不同价钱的茶具．这些价钱是 1 元 6 角，1 元 5 角，1 元 4 角，1 元 3 角，1 元 1 角，1 元，9 角，8 角，6 角，5 角．

【例 3】 将无法区分的 7 个苹果放在三个同样的盘子里，允许有的盘子空着不放．问共有多少种不同的放法？

解：用数字代表盘子里的苹果数，用由 3 个数字组成的数组表示不同的放置方式．如（7，0，0）表示：一个盘子里放 7 个苹果，而另外两个盘子里都空着不放．各种可能的放置情况如下：

（7，0，0）

（6，1，0）

（5，2，0），（5，1，1）

（4，3，0），（4，2，1）

（3，3，1），（3，2，2）

数一数，共有 8 种不同的放法.

【例 4】　把一个整数表示成若干个小于它的自然数之和，通常叫做整数的分拆. 问整数 4 有多少种不同的分拆方式？

解：分拆时，使自然数按由大到小的顺序出现. 可以看出，共有 4 种不同的分拆方式：

$$4=3+1$$
$$4=2+2$$
$$4=2+1+1$$
$$4=1+1+1+1.$$

【例 5】　邮局门前共有 5 级台阶. 若规定一步只能登上一级或两级，问上这个台阶共有多少种不同的上法？

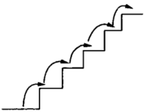


图 10－1

解：如图 10－1，同时用数组表示不同的上法.

（1，1，1，1，1）表示每步只上一级，只有 1 种上法.

见图 10－2，①（2，1，1，1）②（1，2，1，1）③（1，1，2，1）④（1，1，1，2）

表示有一步上两个台阶，其他几步都各上一个台阶，共有四种上法.

见图 10－3，①（2，2，1），②（1，2，2），

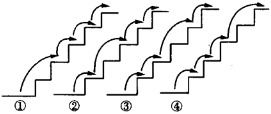


图 10－2

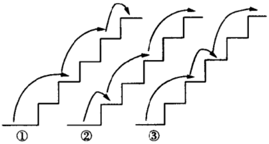


图 10－3

③（2，1，2）.

表示有两步各上两个台阶，有一步上一个台阶，这种上法共有 3 种．因此，上台阶共有 1＋4＋3＝8 种不同的上法.

习　题　十

1．现有 5 分币一枚，2 分币三枚，1 分币六枚，若从中取出 6 分钱，有多少种不同的取法？

2．从 1 个 5 分，4 个 2 分，8 个 1 分硬币中拿出 8 分钱，你能想出多少种不同的拿法？

3．把 3 个无法区分的苹果放到同样的两个抽屉里，有多少种不同的放法？

4．把 4 个苹果放到同样的 2 个抽屉里，有多少种不同的放法？

5．整数 6 有多少种不同的分拆方式？

6．用分别写着 1，2，3 的三张纸片，可以组成多少个不同的三位数？

图 10－4

7．一个盒中装有七枚硬币，两枚 1 分的，两枚 5 分的，两枚 1 角的，一枚 5 角的，每次取出两枚，记下它们的和，然后放回盒中．如此反复地取出和放回，那么记下的和至多有多少种不同的钱数？

8．一个外国小朋友手中有 4 张 3 分邮票和 3 张 5 分邮票．请你帮他算一算，他用这些邮票可以组成多少种不同的邮资？

习题十解答

1．解：有 5 种不同的取法．（见下表）

5 分	2 分	1 分	算式
1 个		1 个	5＋1＝6
	3 个		2＋2＋2＝6
	2 个	2 个	2＋2＋1＋1＝6
	1 个	4 个	2＋1＋1＋1＋1＝6
		6 个	1＋1＋1＋1＋1＋1＝6

2．解：有 7 种不同的拿法．(见下表)

5 分	2 分	1 分	算式
1 个	1 个	1 个	5+2+1=8
1 个		3 个	5+1+1+1=8
	4 个		2+2+2+2=8
	3 个	2 个	2+2+2+1+1=8
	2 个	4 个	2+2+1+1+1+1=8
	1 个	6 个	2+1+1+1+1+1+1=8
		8 个	1+1+1+1+1+1+1+1=8

3．解：有 2 种不同的放法．第 1 种放法：3 个苹果全放在一个抽屉里，另一个抽屉空着不放；第 2 种放法：2 个苹果放在一个抽屉里，1 个苹果放在另一个抽屉里；注意：在每种放法中，必有一个抽屉里的苹果数等于或大于 2．

4．解：有 3 种不同的放法．

第 1 种放法：甲抽屉中放 4 个，乙抽屉中不放；

第 2 种放法：甲抽屉中放 3 个，乙抽屉中放 1 个；

第 3 种放法：甲、乙抽屉中各放 2 个苹果；

注意：这三种放法中，无论哪种放法，都必有一个抽屉里的苹果数等于或大于 2．

5．解：6 的不同分拆方式共有 10 种，它们是：

①拆成两个数之和：

6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3

②拆成三个数之和：

6 = 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2

③拆成四个数之和：

6 = 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1

④拆成五个数之和：

6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1

⑤拆成六个数之和：

6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

6．解：可以组成 6 个不同的三位数．下面是用选择填空法组数；见图 10 - 5．

百位　十位　个位 组成的三位数．

百位	十位	个位	组成的三位数
1	2	3	1 2 3
	3	2	1 3 2
2	1	3	2 1 3
	3	1	2 3 1
3	1	2	3 1 2
	2	1	3 2 1

图 10 - 5

7．解：列举出两枚硬币搭配的所有情况：

硬币	算式和钱数
1 分、1 分	1 + 1 = 2（分）
1 分、5 分	1 + 5 = 6（分）
1 分、10 分	1 + 10 = 11（分）（即 1 角 1 分）

1 分、50 分　　1 + 50 = 51（分）（即 5 角 1 分）

5 分、5 分　　5 + 5 = 10（分）（即 1 角）

5 分、10 分　　5 + 10 = 15（分）（即 1 角 5 分）

5 分、50 分　　5 + 50 = 55（分）（即 5 角 5 分）

10 分、10 分　　10 + 10 = 20（分）（即 2 角）

10 分、50 分　　10 + 50 = 60（分）（即 6 角）

共有 9 种不同的钱数.

8. 解：把所有的情况都列举出来：

4 张 3 分邮票可组成 4 种邮资：

3 分，6 分，9 分，12 分.

3 张 5 分邮票可组成 3 种邮资：

5 分，10 分，15 分.

两种邮票搭配可组成 12 种邮资：

3 + 5 = 8（分）　　3 + 10 = 13（分）

3 + 15 = 18（分）　　6 + 5 = 11（分）

6 + 10 = 16（分）　　6 + 15 = 21（分）

9 + 5 = 14（分）　　9 + 10 = 19（分）

9 + 15 = 24（分）　　12 + 5 = 17（分）

12 + 10 = 22（分）　　12 + 15 = 27（分）

共可组成 4 + 3 + 12 = 19 种不同的邮资.

第11讲 考虑所有可能情况（二）

【例1】 象右边竖式那样十位数字和个位数字 $\begin{array}{r}18\\+81\\\hline 99\end{array}$ 顺序相颠倒的一对二位数相加之和是99，问这样的两位数共有多少对？

解：不难看出，这样的两位数共有4对，它们是：(18，81)，(27，72)，(36，63)，(45，54).

$$\begin{array}{r}18\\+81\\\hline 99\end{array}\qquad\begin{array}{r}27\\+72\\\hline 99\end{array}\qquad\begin{array}{r}36\\+63\\\hline 99\end{array}\qquad\begin{array}{r}45\\+54\\\hline 99\end{array}$$

【例2】 一些十位数字和个位数字相同的二位数可以由十位数字和个位数字不同的两个二位数相加得到，如 $12+21=33$（人们通常把12和21这样的两个数叫做一对倒序数）．问在100之内有多少对这样的倒序数？

解：十位数字和个位数字相同的二位数有：11、22、33、44、55、66、77、88、99九个．其中11和22都不能由一对倒序数相加得到．其他各数的倒序数是：

33：12和21 …………………………… 1对
44：13和31 …………………………… 1对
55：14和41、23和32 ……………… 2对
66：15和51、24和42 ……………… 2对

77：16 和 61、25 和 52、34 和 43 …………… 3 对
88：17 和 71、26 和 62、35 和 53 …………… 3 对
99：18 和 81、27 和 72、36 和 63、45 和 54 … 4 对
总数 $=1+1+2+2+3+3+4=16$ 对.

【例 3】 规定：相同的字母代表同一个数字，不同的字母代表不同的数字. 请问，符合下面的算式的数字共有多少组？

$$\begin{array}{r} B\ A \\ \times\quad A \\ \hline C\ B\ A \end{array}$$

解：分两步做. 第一，先找出被乘数的个位数字 A 和乘数 A 相乘时，积的个位数是 A 的所有可能情况：

$$\begin{array}{r} 0 \\ \times\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1 \\ \times\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 5 \\ \times\quad 5 \\ \hline 2\quad 5 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 6 \\ \times\quad 6 \\ \hline 3\quad 6 \end{array}$$

第二，从中选出能满足题目要求的数：积的十位数字和被乘数的十位数字 B 相同. 经试验可知：

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\quad 5 \\ \hline 125 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times\quad 5 \\ \hline 375 \end{array}$$

可得两组数字作为答案：
第一组 $A=5, B=2, C=1$；
第二组 $A=5, B=7, C=3$；
再看 0×0，1×1，显然不符合题目要求，
而 6×6 经试验也不符合题目要求.
所以最后的答案就是 2 组.

【例 4】 把整数 10 分拆成三个不同的自然数之和共有多少种不同的分拆分式？

解：

$$\left.\begin{aligned}10&=7+2+1\\10&=6+3+1\\10&=5+4+1\\10&=5+3+2\end{aligned}\right\}\text{共 4 种.}$$

【例 5】　将 1、2、3、4、5 填入下图 11－1 的五个空格中，使横行和竖行的三个数之和相等．问共有多少种不同的填法？

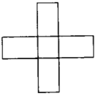


图 11－1

解：3 填在中间格中，和＝9（见图 11－2）．

1 填在中间格中，和＝8（见图 11－3）．

①

图 11－2

②

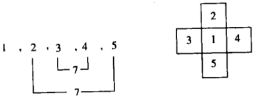


图 11－3

③

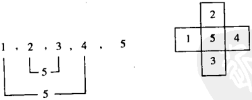


图 11－4

5填在中间格中，和＝10，见图11－4. 经试验，2和4不能填在中间格中，所以共有三种不同的填法.

习题十一

1. 想一想，下面算式中的△和□中，各有多少对不同的填法？

$$①\quad \begin{array}{r} 2\ \ 0 \\ -\ 1\ \ \triangle \\ \hline \square \end{array} \qquad\qquad ②\quad \begin{array}{r} 5\ \ 2 \\ -\ 3\ \ \triangle \\ \hline 1\ \ \square \end{array}$$

2. 见下式，满足下式的两个二位数，共有多少对？

$$\begin{array}{r} \square\ \square \\ +\ \square\ \square \\ \hline 1\ \ 9\ \ 1 \end{array}$$

图11－5

3. 见图11－5，将1、2、3、4、5、6六个数填在下图中的黑点处，使每条线的三个数之和相等，共有多少种不同的填法？

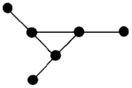


图11－5

4. 把整数20分拆成不大于9的三个不同的自然数之和，有多少种不同的分拆方式？

5. 把整数19分拆成不大于9的三个不同的自然数之和，有多少种不同的分拆方式？

6. 十位数字大于个位数字的二位数共有多少个？

7. 两个整数之积是144，差为10，求这两个数.

8. 三个不完全相同的自然数的乘积是24. 问由这样

的三个数所组成的数组有多少个？

9．（1，1，8）是一个和为 10 的三元自然数组．如果不考虑顺序，那么和为 10 的三元自然数组有多少个〔注意：“不考虑顺序”的意思是指如（1，1，8）与（1，8，1）是相同的三元自然数组〕？

习题十一解答

1．解：①共有 9 对，它们是：

△　1，2，3，4，5，6，7，8，9

□　9，8，7，6，5，4，3，2，1

②共有 7 对，它们是：

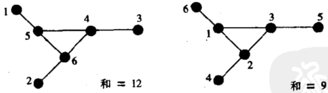
△3，4，5，6，7，8，9

□9，8，7，6，5，4，3

2．解：共有 4 对．

$$\begin{array}{r} 92 \\ +99 \\ \hline 191 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 93 \\ +98 \\ \hline 191 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 94 \\ +97 \\ \hline 191 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 95 \\ +96 \\ \hline 191 \end{array}$$

3．解：见图 11－6，经试验，共有 4 种不同的填法，它们是：



4．解：4 种，它们是：

20＝9＋8＋3

20＝9＋7＋4

$20=9+6+5$

$20=8+7+5.$

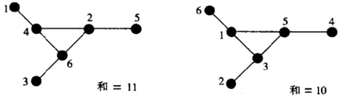


图 11－6

5．解：5 种，它们是：

$19=9+8+2$

$19=9+7+3$

$19=9+6+4$

$19=8+7+4$

$19=8+6+5.$

6．解：把每一个十位数字大于个位数字的二位数都写出来：

10

20，21

30，31，32

40，41，42，43

50，51，52，53，54

60，61，62，63，64，65

70，71，72，73，74，75，76

80，81，82，83，84，85，86，87

90，91，92，93，94，95，96，97，98

总数 $=1+2+3+4+5+6+7+8+9$

$=45$（个）.

7．解：把两个数相乘积为 144 的所有情况列举出来

为：

一个乘数	1	2	3	4	6	8	9	12
另一个乘数	144	72	48	36	24	18	16	12

其中相差为 10 的两个数是 18 和 8.

8. 解：把不完全相同的三个自然数相乘得 24 的情况全列举出来：

$1\times1\times24=24$　　　　$1\times4\times6=24$

$1\times2\times12=24$　　　　$2\times2\times6=24$

$1\times3\times8=24$　　　　$2\times3\times4=24$

所以，若不计数组中数字的顺序，所有乘积为 24 的三个数所组成的数组有：

(1，1，24)；(1，2，12)；(1，3，8)；

(1，4，6)；(2，2，6)；(2，3，4). 共 6 组.

9. 解：将 10 分拆成三个不完全相同的自然数之和：

$10=1+1+8$　　　　$10=2+2+6$

$10=1+2+7$　　　　$10=2+3+5$

$10=1+3+6$　　　　$10=2+4+4$

$10=1+4+5$　　　　$10=3+3+4$

所以和为 10 的三元自然数组共有 8 个：

(1，1，8)；(1，2，7)；(1，3，6)；

(1，4，5)；(2，2，6)；(2，3，5)；

(2，4，4)；(3，3，4).

第12讲　仔细审题

解数学题很关键的一步是审题．如果把题目看错了，或是把题意理解错了，那样解题肯定是得不出正确的答案来的．什么叫审题？扼要地讲，审题就是要弄清楚：未知数是什么？已知数是什么？条件是什么？

有一种类型的数学题叫“机智题”．在这一讲要通过解这种题体会如何审题．

【例1】　①树上有5只小鸟，飞起了1只，还剩几只？

②树上有5只小鸟，“叭”地一声，猎人用枪打下来1只，树上还剩几只？

解：①$5-1=4$（只），树上还剩4只小鸟．

②对这一问，如果你还像上面那样算就错了．正确地算法应该是：　　$5-1-4=0$（只）

图12—1

图12—2

为什么呢？听到“叭”地一声响，其他 4 只会被吓飞的，这叫“隐含的条件”，在题目中虽没有明确地说出来，解题时却要考虑到.

【例 2】　要把一个篮子里的 5 个苹果分给 5 个孩子，使每人得到 1 个苹果，但篮子里还要留下一个苹果，你能分吗？

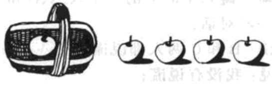


图 12－3

解：能. 最后一个苹果留在篮子里不拿出来，把它们一同送给一个孩子. 这是因为“篮子里留下一个苹果和每个孩子分得一个苹果”这两个条件并不矛盾（见图 12－3）.

【例 3】　两个父亲和两个儿子一起上山捕猎，每人都捉到了一只野兔. 拿回去后数一数一共有兔 3 只. 为什么？

图 12－4

解："两个父亲和两个儿子"实际上只是3个人：爷爷、爸爸和孩子."爸爸"这个人既是父亲又是儿子.再数有几个爸爸几个儿子时，把他算了两次.这是数数与计数时必须注意的（见图12－4）.

【例4】 一个小岛上住着说谎的和说真话的两种人.说谎人句句谎话，说真话的人句句是实话.假想某一天你去小岛探险，碰到了岛上的三个人A、B和C.互相交谈中，有这样一段对话：

A说：B和C两人都说谎；

B说：我没有说谎；

C说：B确实在说谎.

小朋友，你能知道他们三个人中，有几个人说谎，有几个人说真话吗？

解：这是并不难的一道逻辑推理问题.怎样解答这个问题呢？有的人一定会列成下面形式的表格，想由此把所有的可能情况都判断出来，认为这样就可以得到答案了。

人	说谎	说真话
A	____	____
B	____	____
C	____	____

但是，如果你也真的这样做的话，你是无论如果得不出答案的，因为从这道题目所给出的条件中根本无法判断出某一个人是说谎还是说真话.你这样解题，说明你把解题的目标（未知数）改变了.请你再看一下，题目问的是什么？题目并没有问"谁说谎，谁说真话"？而是在问"几个人说谎，几个人说真话？"正确的答案是不

难得到的：因为 B 和 C 两人说的话正好相反，所以一定有一个人说谎，另一个人说真话；由此又可知道，他们两人不可能都说谎，所以 A 必定说谎．于是可知 3 个人有 2 个人说谎，有一个人说真话．

【例 5】　如图 12－5，三根火柴棍可以组成一个等边三角形，再加三根火柴棍，请你组成同样大小的四个等边三角形．

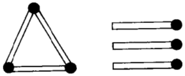


图 12－5

解：请你先不要继续往下看，自己想一想能不能用六根火柴棍组成四个同样大小的等边三角形？

通常，很多人在解这题时，往往自己给自己多加了一个限制条件："在平面上组成等边三角形"．但是，仔细看看，原题并没有限制你在平面上解题．由于给自己多加了一个条件，他们的思想就会被限制在平面上解题，那就无论如何也解不出来．这也是把题意理解错了的一种情况．

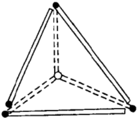


图 12－6

但是，如图 12－6 所示，只要把思维从平面扩大到立体空间，你就能轻而易举找到问题的答案．

【例 6】　一笔画出由四条线段连接而成的折线把九个点串起来，你能做到

图 12－7

吗？（见图 12－7）.

解：先不要往下看，你先画画试试．你可能会画出类似于下面的各种各样的折线来，但你很快会发现，它们都不是符合题目要求的答案（见图 12－8）.

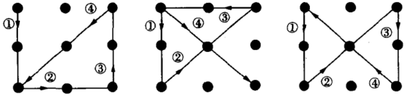


图 12－8

总结一下画过的折线的特点，显然这些线段都没有超出这 9 个点所决定的正方形.

再仔细看看已知条件，

问题里并没有这一条限制，画线段的时候没有不让你超出这个正方形．明白了这点，就不难得到正确的答案了（见图 12－9）.

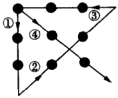


图 12－9

回想一下开始的想法也是属于把题意理解错了的情况，但是这种错误是很不容易被自己发现的．只有在解题的过程中，通过对自己的失败的解法加以总结，再与题目中所给出的已知条件加以对照，才有可能发现自己“不自觉”的错误想法.

习题十二

1．①一个学生花 2 角钱买了 2 个练习本，花 5 角钱能买几个练习本？

②在上学的路上 2 个学生拾到了 2 角钱，问 5 个学生捡到多少钱？

2．桌上放着一堆糖果，两个母亲和两个女儿，还有一个外祖母和一个外孙女，每人拿了一块，这堆糖果就被拿完了，而这堆糖只有 3 块．这是为什么？

3．天上飞着几只大雁：两只在后，一只在前；一只在后，两只在前；一只在两只中间，三只排成一条线．请你猜猜看，天上共有几只雁？

4．小强带了 5 元钱上街，他到书店买了 3 本书，应付一元五角钱，可是售货员找给他五角钱，你说售货员一定错了吗？

5．一栋大楼内有 60 盏灯，关掉其中的一半后，还剩下多少盏灯？

6．大海中有一个小岛，小岛上住着的 100 名妇女中有一半人只戴一只耳环．余下的妇女中一半人戴两只耳环，另一半人不戴耳环．问这 100 名妇女共戴有多少只耳环？

7．有一人一天读 20 页书，第三天因病没读，其他日子都按计划读了书．问第十二天他读了多少页书？

8．一家文具店卖某种文具，文具的价钱是：五个是 2 元，五十个是 3 元，而五百个、五千个、五万个都是 3 元．问五十万个是几元？

9．王老师有一个孩子，李老师也有一个孩子，两位老师共有多少个孩子？

10．一个长方形，剪掉一个角时，剩下的部分还有几个角？

11．图中 12－10 正方体形的纸盒六个面的正中都有

一个洞口，旁边放着三根圆木棍，洞口的直径能容棍子通过去．请你将三根木棍从三个洞口穿到另外三个洞口，而且每根棍子穿好后就不再拔出来，你能做得到吗？

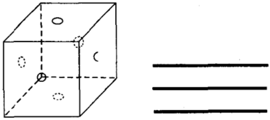
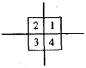


图 12－10

12．一家冷饮店规定，喝完汽水后，用 4 个空汽水瓶可以换 1 瓶汽水．老师带着 32 个学生进店后，他只买了 24 瓶汽水．问每个学生能喝到一瓶汽水吗？



两条直线垂直相交

图 12－11

13．两条直线垂直相交，可以组成 4 个直角，如图 12－11 所示，那么三根直线相交时最多能组成多少个直角呢？

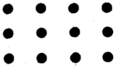


图 12－12

14．图 12－12 有 12 个点．请你用一笔画出由五条线段连接成的折线，把 12 个点串起来．

15．图 12－13 有 16 个点，请你用一笔画出由六条线段连接成的折线，把 16 个点串起来．

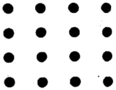


图 12－13

习题十二解答

1．解：①花 5 角钱买 5 个练习本．

②无法回答．因为在路上捡钱是偶然的，人数多不一定能多捡到钱．这和多花钱就能多买练习本不是同样的问题．

2．解：因为只有三个人：外祖母、母亲和女孩（人物关系见图 12－14）．

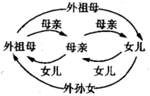


图 12－14

3．解：天上只有 3 只大雁（见图 12－15）．

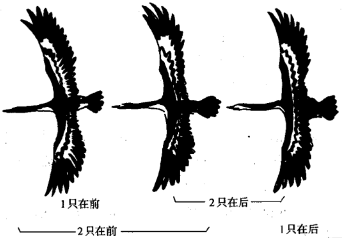


图 12－15

4．解：不能说售货员找错了钱．很可能是小强买东西时给售货员的钱是 2 元一张的，所以售货员给小强找回五角钱，售货员找的钱是对的．

5. 解：60 盏灯. 60－0＝0. 关掉灯后灯还在大楼里.

6. 解：100 只耳环. 因为 $50+50=100$（只）.

7. 解：20 页. "第三天因病没读书"并不影响第十二天仍按计划读书.

8. 解："五十万个"是 4 元（一个字一元钱）.

对这道题进行审题时，很可能被以往的经验和知识影响，把"五个"、"五十个"等作为数量词，为了得出价钱，总想猜测后面的名词是什么，从而得出问的文具的价钱. 实际上这家商店卖的是刻有"五"、"十"、"百"、"千"、"万"等字的字模. 心理学上，把这种情况叫做"负迁移"规律干扰人们准确地审题.

[注]：一个人掌握了某些知识后，当他用这些知识以某种智力活动方式去解决某一问题时，这个应用过程就是心理学上所说的"迁移". 迁移就是已经学得的东西在新情景中的应用. 在审题中，也就是已有知识、经验对解题的影响. 如果影响是积极的、起促进作用的，就叫"正迁移"；如果影响是消极的，起干扰作用的，就叫"负迁移".

9. 解：可能是 1 个，也可能是 2 个. 当王老师和李老师是一对夫妻时，只有一个孩子当王老师和李老师不是一家人时，共有 2 个孩子.

10. 解：可能是 5 个角，也可能是 4 个角，也可能是 3 个角. 如图 12－16 所示：

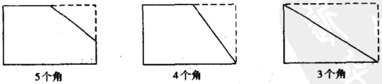


图 12－16

11．解：能 见图 12－17．

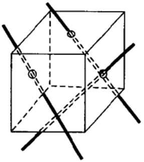


图 12－17

如果只想把棍子穿两个对面的洞口，穿进一根棍子后，另两根棍子就会因为被挡住而无法再穿进去，仔细看题目，并没有要求小棍穿“对面”洞口的条件．只有把小棍穿过相邻的两个洞口，方可能解决问题．

12．解：能够使每个学生都喝到一瓶汽水．

因为用 4 个空瓶可换 1 瓶汽水，写成算式就是：

1 瓶汽水＝4 个空瓶

因为 1 瓶汽水＝1 瓶中的汽水＋1 个空瓶

得 1 瓶中的汽水＝3 个空瓶

所以 $24+24\div 3=24+8=32$ 汽水

上面的 1 汽水＝3 空瓶是较隐蔽的条件，审题时，只要细心寻找，并加以适当的演算是可以发现的．

13．解：12 个直角．把思维从平面扩大到空间，就能容易得到答案（见图 12－18）．

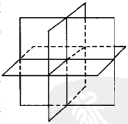


图 12－18

14．解：列出两种画法（如图 12－19 和图 12－20 所示）．

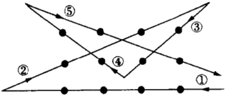


图 12-19

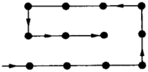


图 12-20

15. 解：见图 12－21.

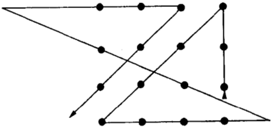


图 12－21

第13讲 猜猜凑凑

有些数学题可以用猜猜凑凑的方法求出答案．猜，很难一次猜中；凑，也不一定凑得准．那不要紧，再猜再凑，对于比较简单的问题，最后总能凑出答案来．

数学家说，猜猜凑凑也是一种数学方法，它的正式的名字叫“尝试法”．有时，它还是一种极为有效的方法，数学上的有些重大的发现往往都是大数学家们大胆地猜出来的．

猜，要大胆；凑，要细心．要知道猜的对不对，还要根据题目中的条件进行检验．

【例 1】　小明心中想到三个数，这三个数的和等于这三个数的积，你知道小明想的三个数都是什么吗？

图 13－1

解：猜——小明想的三个数是 1、2、3．

检验：$1+2+3=6$

$1\times2\times3=6$

所以 $1+2+3=1\times2\times3$

对了！

【例 2】 $\begin{cases}\triangle+\square=3\\ \triangle+\bigcirc=4\\ \square+\bigcirc=5\end{cases}$ $\begin{cases}\triangle=?\\ \square=?\\ \bigcirc=?\end{cases}$

解：猜——由$\triangle+\square=3$可猜$\triangle=1$，$\square=2$；

又由$\triangle+\bigcirc=4$可猜$\triangle=1$，$\bigcirc=3$；

检验：$\square+\bigcirc=2+3=5$，对了！

所以$\triangle=1$，$\square=2$，$\bigcirc=3$.

【例 3】 一些老人去赶集，买了一堆大鸭梨，一人一梨多一梨，一人两梨少两梨，问几个老人几个梨？

解：猜——可以先从小数猜起．2 个老人 3 个梨．检验：2 个老人 3 个梨符合一人一梨多一梨的条件．

但是不是符合另一个条件呢？

先看：若一人分两个梨，2 个老人就需要有 4 个梨，因为假设 3 个梨，这样就会还少 $4-3=1$ 个梨，这不符合少两梨的条件．

再猜：若是 3 个老人 4 个梨呢？显然这符合第一个条件．再看第二个条件是不是也符合呢？若是一个老人分 2 个梨，3 个老人就需要有 6 个梨，假设有 4 个梨，这样就少 $6-4=2$ 个梨，对了！

所以最后答案就是 3 个老人 4 个梨．

【例 4】 100 个和尚分 100 个馒头，大和尚每人分 3 个馒头，小和尚 3 人分 1 个馒头，恰好分完．问大和尚、小和尚各多少人？

解：这是一道古代的算题．

猜——若是大和尚 33 人，就要分 $3\times 33=99$ 个馒头，还剩 $100-99=1$（个）馒头，分给 3 个小和尚，这样和尚总人数为 $33+3=36$ 人，与已知有 100 个和尚不符，不对！

大和尚的人数减少些．若是有 30 个大和尚，分 $3\times 30=90$ 个馒头，还剩 10 个馒头，可以分给 $3\times 10=30$ 个小和尚，这样和尚总数是 $30+30=60$ 人．

还必须减少大和尚的人数．若是有 25 个大和尚，分 $3\times 25=75$ 个馒头，还剩 $100-75=25$ 个馒头，可以分给 $3\times 25=75$ 个小和尚．这样和尚总数是 $25+75=100$ 人，对了．

所以答案是大和尚 25 人，小和尚 75 人．

【例 5】　甲、乙、丙三个小朋友在操场跑步．甲 2 分钟跑一圈，乙 3 分钟跑一圈，丙 5 分钟跑一圈．如果他们三人同时从同一起点起跑，问多少分钟后他们三人再次相遇？

解：猜与凑．

先猜过 6 分钟后，甲跑了 3 圈，乙跑了 2 圈，他们在起跑点又相遇了．再看丙是否与他俩相遇呢？丙 5 分钟跑一圈，6 分钟跑了 1 圈多一点，错过了，丙没能与甲、乙相遇在一起．

若再过 6 分钟，即 12 分钟后，甲和乙又相遇了．但是丙还不能与甲、乙相遇；因为：

$12\div 5=2$（圈）$\cdots\cdots 2$

即丙跑了 2 圈又多一些．

这样，已看出一个规律来了，能够估计出若起跑后

经过 5 个 6 分钟，即 $6\times5=30$ 分钟，

这时丙跑了 $30\div5=6$ 圈整，这样丙就能够与甲、乙相遇了.

【例 6】 有人问孩子年龄，回答说："比父亲的岁数的一半少 9 岁".

又问父亲年龄，回答说："比孩子的岁数的 3 倍多 3 岁".

求父亲和孩子的年龄各是多少岁？

解：猜猜凑凑——要找到对题中的两句话都适合的年龄.

先猜父亲 40 岁，

则儿子年龄是：$40\div2-9=20-9=11$（岁）

检验父龄：

$11\times3+3=33+3=36$ 岁，不对！

再猜父亲 42 岁，

则儿子：$42\div2-9=21-9=12$（岁）

检验父龄：

$12\times3+3=36+3=39$（岁），不对！

再猜父亲 44 岁，

则儿子：$44\div2-9=22-9=13$ 岁

检验父龄：$13\times3+3=39+3=42$ 岁，不对！

再猜父亲 46 岁，

则儿子：$46\div2-9=23-9=14$ 岁

检验父龄：$14\times3+3=42+3=45$ 岁，不对！

再猜父亲 48 岁，

则儿子：$48\div2-9=24-9=15$ 岁

检验父龄：$15\times3+3=45+3=48$ 岁，对了！

所以答案是：父亲年龄 48 岁，儿子年龄 15 岁.

习 题 十 三

1. 林林心里想到三个数，它们的和是 12，又知道第二个数比第一个大 1，第三个又比第二个大 1. 请猜出林林心中想的这三个数各是几？

2. 一群老头去赶集，买了一堆大鸭梨，一人一梨多一梨，一人 2 梨少 3 梨，几个老头几个梨？

3. 图 13－2 中算式里的小动物各代表什么数？需要注意的是有规定：相同的动物代表相同的数字，不同的动物代表不同的数字.

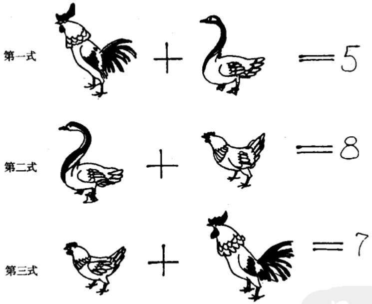


图 13－2

4. 游泳池中男孩戴蓝帽，女孩戴红帽. 一个男孩说："我看见的蓝帽与红帽一样多"；一个女孩说："我看见的蓝帽比红帽多一倍." 你知道游泳池中有几个男孩，

有几个女孩吗？

图 13－3

5．如果在一个小本子里每页贴一片树叶，就多出 4 片树叶．如果在每页贴 2 片树叶就会空出 6 页．问这个小本子共多少页，树叶有多少片？

6．小虎是趣味数学小组的成员．有人问小虎今年几岁，他编了一道有趣的数学题回答说：“爷爷、爸爸和我，三个人年龄的和是 120 岁，爷爷比爸爸大 30 岁，爷爷和爸爸的年龄之和刚好比我大 100 岁，你猜我今年几岁？”请猜出小虎、爸爸和爷爷各是多少岁？

7．图 13－4 所示的方格中，已填好了数字 5，请你把其余的空格填好．使每行每列的三个数之和都是 7．(空格中只能填自然数)

	第一列	第二列	第三列
第一行			
第二行			
第三行		5	

图 13－4

8．有 21 个装铅笔的盒子，其中 7 盒是满的，7 盒是半满的，7 盒是空的．现在要把这些铅笔连同盒子平均奖给三个学生，使每人分得的铅笔和盒子数都一样多，怎样分？

提示：①总数是 21 个盒，每人应当平分 7 个盒．

②7 盒满的等于 14 盒半满的铅笔，再加本来就是半满的 7 盒，合计共有 21 个半满盒铅笔，平均分给三人，每人分得的铅笔应折合成 7 个半满盒．

习题十三解答

1．解：因为三个 4 之和是 12，可见这三个数应该都与 4 相差不多．猜想，第一个是 3，第二个数应当是 4，第三个数应当是 5．

检验：$3+4+5=12$，对了！

2．解：猜想是 3 个老头 4 个梨．这样，若每个人分 2 个梨时，就需要有 $2\times3=6$ 个梨，$6-4=2$，少 2 个梨，不对！若再凑一下数，减去 1 个梨，即只有 3 个梨，不就是少三个梨了吗！但是这样又不符合一人一个多一个的条件了．

那么再猜若是 4 个老头 5 个梨，一人分 2 个，需要有 $2\times4=8$ 个梨，还少 $8-5=3$ 个梨，对了！

3．解：先看第一式：因 $5=1+4=2+3$，

所以先猜公鸡＝1，鸭＝4；

再看第二式：因为鸭＝4，只有母鸡＝4 才能使第二式成立，但是这不符合题目规定的条件，说明猜错了！

再猜，公鸡＝2，鸭＝3，那么母鸡＝5 第二式也对了．

再看第三式：这里母鸡和公鸡相加，即 $5+2=7$，对了！

4．解：先要仔细审题，搞清题意．这道题中有一个隐含的条件是：无论是那个男孩还是那个女孩，他们自己都看不见自己的帽子是什么颜色．明白了这点，就不难知道，当男孩说：“我看见的蓝帽与红帽一样多”时，实际上游泳池中的蓝帽比红帽多一个，也就是男孩比女孩多 1 人．由同样的道理可知，当女孩说：“我看见的蓝帽比红帽多一倍”时，实际上就是，假如女孩去掉 1 个人，男孩人数就是女孩的 2 倍．

把题意搞清后，再用猜猜凑凑的方法，不难得到正确的答案：男孩 4 人，女孩 3 人．

5．解：猜——如果小本子有 10 页，那么由第一个条件，就应该有 $10+4=14$ 片树叶．再看看能不能满足第二个条件：若每页贴 2 片树叶，14 片树叶需要 $14\div2=7$ 页就够了，还空 $10-7=3$ 页，不符合题目中空 6 页的条件．

再猜——如果小本子有 12 页，树叶 $12+4=16$ 片，当每页贴 2 片树叶时，只需要 $16\div2=8$ 页就够了，还空 $12-8=4$ 页，也不对！

再猜——如果小本子有 14 页，则树叶 $14+4=18$ 片，当每页贴 2 片树叶时，只需要 $18\div2=9$ 页就够了，还空 $14-9=5$ 页，也不对！

再猜——如果小本子有 16 页，树叶 $16+4=20$ 片时，只需要 $20\div2=10$ 页就够了，还空 $16-10=6$ 页，对了！

所以本题答案是小本子 16 页，树叶 20 片．

注意，在这道题的猜猜凑凑的过程中，得数越来越接近答案.

6. 解：猜，需要有一般的生活常识，猜的数要大致上符合人们的生活实际..

先猜——爷爷 80 岁，爸爸 30 岁，小虎 10 岁，这样三个人年龄之和就是 120 岁，这符合第一个条件，看能不能满足第二个条件“爷爷比爸爸大 $80-30=50$ 岁，不符合 30 的条件，不对!

再猜——若是爷爷 70 岁，爸爸 40 岁呢？这样三个人的和还是 120 岁，但是 $70-40=30$ 岁符合刚才的第二条.

再看能不能符合第三个条件呢？

$70+40-10=100$ 岁

对了！爷爷和爸爸的年龄之和比小虎的年龄刚好大 100 岁.

所以最后答案是爷爷 70 岁，爸爸 40 岁，小虎 10 岁.

7. 解：注意对这道题，猜要有个合理的顺序. 显然第二列上，第一、二行的两个空格都应填 1，同样第三行上，第一、三列的两个空格也都应填 1. 为了使每行每列的三个数之和都是 7，最简单的填法是其余的 4 个空格都填 3. 这就是一种符合要求的填法.

	1	
	1	
	5	

	1	
	1	
1	5	1

3	1	3
3	1	3
1	5	1

图 13－5

8. 解：①经仔细审题，按题意画出下表：

		盒子			
铅笔		第一人	第二人	第三人	总计
	第一人	3 满	1 半	3 空	3 盒半铅笔
	第二人	3 满	1 半	3 空	3 盒半铅笔
	第三人	1 满	5 半	1 空	3 盒半铅笔
	总计	7 个盒	7 个盒	7 盒	

图 13－6

②经猜测、试填，同时联系第 7 题，可填得出符合条件的分配方法.

注意：由第 7、8 两题联系起来可看出，猜和凑的过程和已经学过的知识相结合，就能较快地、较准确地猜出正确的答案了.

第14讲 列表尝试法

对于比较复杂的问题，可以采用列表法进行尝试.

【例 1】 老大、老二、老三兄弟三人岁数之和是 32 岁，老大的岁数比老二大 3 岁，而且老大的岁数是老三的 2 倍，问兄弟三人各几岁？

解：进行列表尝试：如果老三 5 岁，按题意可推算出老大 $5\times2=10$ 岁，老二 $10-3=7$ 岁……

表十四（1）

老三	老大	老二	和
5	10	7	$5+10+7=22$ 岁
6	12	9	$6+12+9=27$ 岁
7	14	11	$7+14+11=32$ 岁
8	16	13	$8+16+13=37$ 岁

由表可知，老大 14 岁，老二 11 岁，老三 7 岁.

【例 2】 一次数学测验共 10 题，小明都做完了，但只得到 29 分．因为按规定做对一题得 5 分，做错一题扣掉 2 分．你知道小明做错了几道题吗？

解：列表尝试，见表十四（2）.

表十四（2）

错	1	2	3	4
对	9	8	7	6
得分	$5\times9-2\times1$ $=43$（分）	$5\times8-2\times2$ $=36$（分）	$5\times7-2\times3$ $=29$（分）	$5\times6-2\times4$ $=22$（分）

由表中可见，小明做错了三道题.

【例 3】 甲乙二人岁数之和是 99 岁，甲比乙大 9 岁，而且甲的岁数的两个数字互相交换位置后恰是乙的岁数，问甲乙各多少岁？

解：列表尝试：甲 + 乙 = 99（岁），见表十四（3）.

表十四（3）

甲的岁数	81	72	63	54
乙的岁数	18	27	36	45
甲乙的差	63	45	27	9

由上表可知，甲 54 岁，乙 45 岁.

【例 4】 如果小方给小明一个玻璃球，两人的玻璃球数相等；如果小明给小方一个玻璃球，则小方的玻璃球数就是小明的两倍. 问小明、小方原来各有几个玻璃球？

表十四（4）

<table>
<tr><td colspan="3">因为小方给小明一个球，两人球数相等，可知小方比小明多两个球</td><td colspan="3">因为小明给小方一个球，则小方的球数是小明的 2 倍，因此可列表如下：</td></tr>
<tr><td>表 1</td><td>小明球数</td><td>小方球数</td><td>表 2</td><td>小明球数</td><td>小方球数</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>3</td><td></td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>4</td><td></td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>5</td><td></td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>6</td><td></td><td>5</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>7</td><td></td><td>6</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

由表 1 和表 2，同时满足题目中两个条件的数是，小

明 5 个球，小方 7 个球.

注意：解这道题，依题意列出了两个表格，从而得出了问题答案，这样就更加拓宽了列表尝试法的使用范围.

【例 5】　某学校的学生去郊游，中午开饭时，两个学生合用 1 只饭碗，三个学生合用 1 只菜碗，四个学生合用 1 只汤碗，共用了 65 只碗，问共有多少学生？

解：一边猜，一边列表，可求出有 60 个学生. 见表十四（5）.

表十四（5）

人　数	饭　碗	菜　碗	汤　碗	合　计
12 人	6 个	4 个	3 个	6 + 4 + 3 = 13 个
24 人	12 个	8 个	6 个	12 + 8 + 6 = 26 个
36 人	18 个	12 个	9 个	18 + 12 + 9 = 39 个
48 人	24 个	16 个	12 个	24 + 16 + 12 = 52 个
60 人	30 个	20 个	15 个	30 + 20 + 15 = 65 个

注意：人数的取值是从“12”人开始的，其他各值也都是 12 的倍数，想一想，这是为什么？

【例 6】　240 元钱平均分给若干人. 正在分时，有一个人离开了，因而现在每人多分了 1 元. 问现在有多少人？

解：列表尝试. 因为若 240 人分 240 元，每人分得 1 元；若是 120 人分，每人分得 2 元……见表十四（6）.

表十四（6）

分钱人数（个）	240	120	80	60	48	40	30	24	20	16	15	10	5
每人分得钱数（元）	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	16	24	48

由上表可看出若是 16 人分 240 元，则每人分 15 元；若是走了 1 人剩 15 人分钱，则每人分得 16 元多分了 1 元，符合题目条件．可见现在人数是 15 人．

注意：这道题的答案是在尝试过程中发现的，答案的获得几乎是“出乎意料”的．

习题十四

1．在一次数学考试中规定：做对一道题得 5 分，做错一道题扣 3 分．小伟做了 10 道题共得了 34 分，请问他做对了几道题？

2．小燕今年 10 岁，爸爸 40 岁，爸爸的年龄是小燕的 4 倍．几年以后，爸爸的年龄正好是小燕的 2 倍？

3．今年弟弟 8 岁，哥哥 14 岁，当两人的年龄之和是 48 岁时，两人年龄各几岁？

4．松鼠采松子，晴天每天采 20 个，雨天每天采 12 个，共采了 112 个，平均每天采 14 个．问其中雨天是多少？

5．100 个人吃 92 个馒头，大人一人吃 2 个，小孩两人吃 1 个，恰好吃完．问大人、小孩各多少人？

6．兄弟两人去钓鱼，共钓了 52 条，其中弟弟钓的鱼是哥哥的 2 倍多 1 条，问两人各钓了多少条鱼？

7．10 元币和 5 元币共 45 张，合计 350 元．10 元币多少张？5 元币多少张？

8．幼儿园把一批桔子分给小朋友．如果分给大班的学生每人 5 只余 10 只；如果分给小班的学生每人 8 只缺 2 只．已知小班比大班少 3 人，问这批桔子有多少只？

习题十四解答

1．解：列表尝试法．见表十四（7）．

注意：计算小伟得分的算式是

5×对题数－3×错题数＝得分．

表十四（7）

对题数	10	9	8	7	6	……
错题数	0	1	2	3	4	……
得分	50	42	34	26	18	

由上表可知，小伟做对了 8 道题．

2．解：采用列表尝试法见表十四（8）．

注意：爸爸年龄÷小燕年龄＝倍数

表十四（8）

父年龄	40	45	50	60	……
女年龄	10	15	20	30	……
倍数	4	3	X	2	……

由上表可知爸爸 60 岁，小燕 30 岁时爸爸年龄是小燕年龄的 2 倍，也就是 30－10＝20 年后，爸爸年龄是小燕的 2 倍．

3．解：采用列表尝试法，见表十四（9）．

表十四（9）

哥	14	15	20	25	26	27	……
弟	8	9	14	19	20	21	……
年龄和	22	24	34	44	46	48	……

注意：用列表尝试“取数”时，可任意取．一般说来在尝试的过程中可以发现一些具有规律性的东西，利用它可使你更快、更准确地得到答案．

4．解：采用列表尝试法：

一、先求采松子的天数

①因为每天平均采 14 个，共采了 112 个，所以可以首先求出共采了多少天？

$$112\div14=8\text{（天）}.$$

②如果还没学到除数是两位数的除法，这一步也可以用猜猜凑凑的方法（即尝试法）：

若采 5 天，能采 $14\times5=70$ 个松子，少了；

若采 10 天，能采 $14\times10=140$ 个松子，多了；

若采 8 天，能采 $14\times8=112$ 个松子，对了！

可以发现，尝试法的“取数”过程实际上是个“来来回回”地、“反反复复”地凑数的过程．

二、再求有几个雨天：见表十四（10）．

表十四（10）

雨天＋晴天＝8 天					
雨天	8	7	6	5	……
晴天	0	1	2	3	……
共采松子（个）	96	104	112	120	……

注意：$12\times$ 雨天数 $+20\times$ 晴天数 $=$ 共采松子数，由上表可知，共有 6 个雨天．

5．解：采用列表尝试法求解，见表十四（11）．

计算大人和小孩吃馒头的总数的算式是：

$2\times$ 大人数 $+$ 小孩数 $\div2=$ 吃的馒头数．

表十四（11）

大人数	0	50	24	30	28
小孩数	100	50	76	70	72
馒头数	50	125	86	95	92
判断	×	×	×	×	√

注意，为了尽快试出正确答案，“取数”时可以采用“来回摆动取值法”，即从两边逐步向中心靠拢的取值方法．比如，先设小孩 100 人．试一下，不对；那再设小孩 50 人，试一下，还不对；

再取接近 50 和 100 中间数的 76 试一下，还不行；

再取 70 试一下，差不多了，但还不行；

又取 72 试试．这次可以了，好，就是小孩 72 人，再推知大人 28 人，因此，用这种“摆动取值法”尝试几次也可找出正确答案了．

6．解：采用列表尝试法，见表十四（12）．

总条数 = 哥哥钓鱼条数 + 弟弟钓鱼条数

　　　= 哥哥钓鱼条数 + 2 × 哥哥钓条数 + 1 条．

表十四（12）

哥哥	弟弟	总数
10 条 15 条 16 条	21 条 31 条 33 条	31 条 46 条 49 条
17 条	35 条	52 条

哥哥钓了 17 条，弟弟钓了 35 条．

7．解：采用列表尝试法，见表十四（13）．

总钱数 = 10 元 × 10 元币张数 + 5 元 × 5 元币张数

表十四（13）

10元	5元	总钱数
10	35	$10\times10+5\times35=275$（元）
20	25	$10\times20+5\times25=325$（元）
25	20	$10\times25+5\times20=350$（元）

10元币25张，5元币20张.

8．解：采用列表尝试法：

桔子总数 $=5\times$ 大班人数 $+10$；

桔子总数 $=8\times$ 小班人数 -2；

小班人数 $=$ 大班人数 -3；

列表如下：

表十四（14）

	大　班	小　班
桔子数	10人：$5\times10+10=60$ 个	7人：$8\times7-2=54$ 个
	11人：$5\times11+10=65$ 个	8人：$8\times8-2=62$ 个
	12人：$5\times12+10=70$ 个	9人：$8\times9-2=70$ 个

12人－9人＝3人.（符合题意）

可见有70个桔子.

第15讲　画图凑数法

【例 1】　一只鸡有一个头 2 只脚，一只兔有一个头 4 只脚．如果一个笼子里关着的鸡和兔共有 10 个头和 26 只脚，你知道笼子里有几只鸡、有几只兔吗？

解：这是古代的民间趣题，叫“鸡兔同笼”问题．见图15－1（1）、（2）、（3）．

①先画 10 个头：

图 15－1（1）

②每个头下画上两条腿：

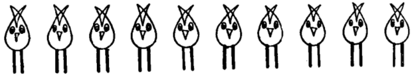


图 15－1（2）

数一数，共有 20 条腿，比题中给出的腿数少 26－20＝6 条腿．

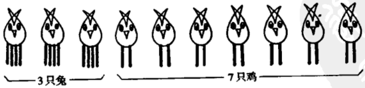


图 15－1（3）

③给一些鸡添上两条腿，叫它变成兔. 边添腿边数，凑够 26 条腿.

每把一只鸡添上两条腿，它就变成了兔，显然添 6 条腿就变出来 3 只兔. 这样就得出答案，笼中有 3 只兔和 7 只鸡.

【例 2】 一辆自行车有 2 个轮子，一辆三轮车有 3 个轮子. 车棚里放着自行车和三轮车共 10 辆，数数车轮共有 26 个. 问自行车几辆，三轮车几辆？

解：发挥想像力和创造力，你可以画一个简图代表车身，见图 15－2（1）、（2）、（3）.

①先画 10 个车身：

图 15－2（1）

②在每个车身下配上两个轮子，它就成了自行车：

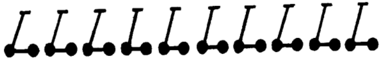


图 15－2（2）

③数一数共 20 个车轮，比题中给出的轮子数少 26－20＝6 个轮子，在自行车下面添轮子，每添一个轮子，这个自行车就成了三轮车. 边添边凑数，凑出 26 个轮子出来.

图 15－2（3）

最后数一数，共有 6 辆三轮车，4 辆自行车．注意，用这种画图凑数法解题，很直观，也比较快，为了使解题速度更快，可以把三个步骤合起来，就能得出答案．

【例 3】　一只蛐蛐 6 条腿，一只蜘蛛 8 条腿．现有蛐蛐和蜘蛛共 10 只，共有 68 条腿．问蛐蛐几只，蜘蛛几只？

解：此题要想个更简单的办法，见图 15－3（1）、（2）．

①先画 10 个头，在每个头下写上数字“6”，代表 6 只腿，——即先假设 10 只都是蛐蛐，则如：

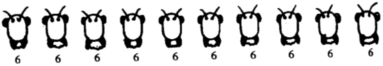


图 15－3（1）

②数一数，算一算，$6\times10=60$，即共有 60 条腿，比题中给出的腿数少 $68-60=8$ 条腿，所以就要在下面再添腿，每在一个头下添 2 条腿（写个“2”），它就变成了一只蜘蛛，共添上 8 条腿，就使总腿数凑够 68 条腿了．

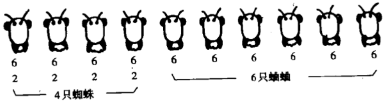


图 15－3（2）

最后数一数，共有 4 只蜘蛛，6 只蛐蛐．

解这道题时，我们用数字代表腿数，使我们省去了画“腿”的麻烦．其实，也可以完全省去画图，我们只要把解题想法和算式摘出来就行了！

第一步，先把 10 只全部看成是蛐蛐；那么一共就有：$6\times10=60$ 条腿．

第二步，算一算少了多少条腿？

少了 68－60＝8 条腿.

第三步，把一个蛐蛐给它添上 2 条腿，使它变成了蜘蛛，可以变成几只蜘蛛呢？

8÷2＝4 只（蜘蛛）.

第四步，再算出蛐蛐的只数出来：

10－4＝6 只（蛐蛐）.

这样一来，我们就不必借助于画图的直观形象，也可以解这类题目了．如果能这样，我们的思维能力就又提高一步了！特别重要的是，我们这样就可以不用“凑数”的尝试方法了.

【例 4】 笼中有兔又有鸡，数数腿 36，数数脑袋 11，问几只兔子几只鸡？

解：方法 1：先用画图凑数法解，见图 15－4（1）、（2）、（3）.

①先画 11 个头：

图 15－4（1）

②再在头下填腿：

图 15－4（2）

③数一数，共有 2×11＝22 条腿.

还少 36－22＝14 条腿，每添 2 条腿，就使一只鸡变成兔.

图 15－4（3）

数一数，共变出了 7 只兔：$14\div2=7$.

最后数一数，笼中共有 7 只兔，4 只鸡。

方法 2：

①把 11 只全部看成鸡，共有 $2\times11=22$ 条腿.

②比题中给出的腿数少了 $36-22=14$ 条腿.

③给一只鸡添 2 条腿使它变成一只兔，共变成：

$$14\div2=7 \text{ 只（兔）}.$$

④再算出鸡数为：$11-7=4$ 只（鸡）.

【例 5】　今有五分的和一角的两种汽车票，共 10 张，总钱数是七角五分．问每种各几张？

解：方法 1：分步列式法：

若 10 张全是 5 分的，钱数应为：

$$5\times10=50 \text{ 分，即 5 角}.$$

比题中给的钱数少：$75-50=25$ 分.

每给一张 5 分车票加 5 分，它就变成了 1 张 1 角车票了，共变出：

$$25\div5=5 \text{ 张（1 角车票）}$$

5 分车票有 $10-5=5$ 张（5 分车票）.

方法 2：用画图凑数法．见图 15－5（1）、（2）.

5 分	5 分	5 分	5 分	5 分	5 分	5 分	5 分	5 分	5 分

图 15－5（1）

①先都画成 5 分的：

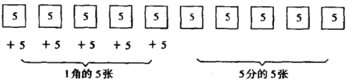


图 15－5（2）

②算一算共 5×10＝50 分（即 5 角）.

比题中给的钱数少 75 分－50＝25 分.

③给有些 5 分车票加钱，使它变成 1 角的，凑出总钱数与题目相符合.

最后数一数，可知 1 角的车票 5 张，5 分的车票 5 张.

习题十五

1．笼中有兔又有鸡，数数腿三十整，数数脑袋一十一，几只兔子几只鸡？

2．今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？

（这是一道古代趣题．雉，即野鸡，“各几何”是各多少的意思．）

3．有一首中国民谣：“一队猎手一队狗，二队排着一起走，数头一共三百六，数腿一共八百九，多少猎手多少狗？”

4．把 99 粒棋子放在两种型号的 17 个盒子里，每个大盒子里放 12 粒，每个小盒子里放 5 粒，恰好放完．问大、小盒子各多少个？

5．数学竞赛试卷共有 10 道题，做对一题得 10 分，做错一题扣 2 分．小明最终得了 76 分．问他做对了几题，做错了几题？

6. 鸡和兔共 100 只，兔的脚数比鸡的脚数多 40 只．问鸡、兔各几只？

7. 鸡兔共有脚 140 只；若将鸡数与兔数互换，则脚数变为 160 只脚；问原有鸡兔各几只？

习题十五解答

1. 解：用画图凑数法，见图 15－6（1）、(2)、(3)．

①先画 11 个示意头：

图 15－6（1）

②在每个头下面画上两条腿，

就是 $11\times2=22$（条）腿．

比题中给出的腿数少 $30-22=8$ 条腿．

③给有的鸡添上两条腿，使它变成兔，边添腿边数数，凑够 30 条腿为止．

图 15－6（2）

数一数，共有 4 只兔，7 只鸡．

2. 解：这道题因为数字较大，画图太麻烦，就用分步列算式的方法解：

①把 35 个头全看成是鸡，共有 $2\times35=70$ 条腿．

②比题中给出的腿数少了 $94-70=24$ 条腿．

③给一只鸡添上 2 条腿使它变成一只兔，共变成 $24\div2=12$ 只兔.

④再算出有 $35-12=23$ 只鸡.

3. 解：人有两条腿一个头，狗有四条腿一个头，采用分步列式法解这道题：

①全看成人：

$2\times360=360\times2=720$ 条腿.

②比题中腿数少了：

$890-720=170$ 条腿.

③给“人”添腿变成“狗”：

$170\div2=85$ 只狗.

④再求出人数：$360-85=275$ 个人.

4. 解：因为盒子数较大，画省略图. 见图 15－7（1）、（2）.

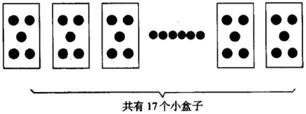


图 15－7（1）

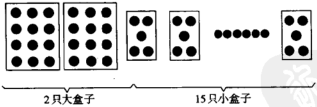


图 15－7（2）

①算一算，共放了多少粒棋子？

$17\times5=85$ 粒.

②比题中给出的棋子数少多少？

$99-85=14$ 粒.

③换盒子：把小盒里的棋子倒在大盒子里，同时往大盒子里再加

$12-5=7$ 粒（棋子）

凑出 99 粒棋子，只需换出

$14\div7=2$ 个（大盒子）.

④再算出小盒子数：

$17-2=15$ 个（小盒子）.

5．解：用画图凑数法，见图 15－8（1）、(2).

①用“点”代表题，点下写“10”表示这道题做对了.

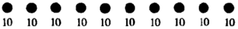


图 15－8（1）

数一数，10 道都做对了应当得：

$10\times10=100$ 分.

②但是小明只得了 76 分，说明他有的题做错了，因做错一道题不但不能得 10 分，还要扣 2 分所以就要从满分中减去 $10+2=12$ 分，得 $100-12=88$ 分，以下类推：

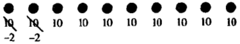


图 15－8（2）

数一数，有 8 道做对了，得 80 分；有 2 道题做错了

扣 4 分，总分＝得分－扣分，

即：$80-4=76$ 分.

6. 解：若兔 50 只，鸡 50 只，兔脚比鸡脚多：

$(4-2)\times 50=100$ 只，多了！

若兔 40 只，鸡 60 只，兔脚比鸡脚多：

$40\times 4-60\times 2=40$ 只，对了！

因此有兔 40 只，鸡 60 只.

7. 解：若鸡和兔各 25 只，则共有 $25\times 2+25\times 4=150$ 只脚.

若鸡 20 只，兔 30 只，总脚数：

$20\times 2+30\times 4=160$ 只.

若鸡 30 只，兔 20 只，总脚数为：

$30\times 2+20\times 4=140$ 只.

可见原有鸡 30 只，兔 20 只.

下册

第1讲 机智与顿悟

数学需要踏实与严谨,也含有机智与顿悟.

【例1】 在美国把5月2日写成5/2,而在英国把5月2日写成2/5.问在一年之中,在两国的写法中,符号相同的有多少天?

解:一年中两国符号相同的日子共有12天.

它们是:

一月一日	1/1	七月七日	7/7
二月二日	2/2	八月八日	8/8
三月三日	3/3	九月九日	9/9
四月四日	4/4	十月十日	10/10
五月五日	5/5	十一月十一日	11/11
六月六日	6/6	十二月十二日	12/12

注意由差异应当想到统一,有差异就必须有统一,仔细想一想这道题就会有所领悟.

【例2】 有一个老妈妈,她有三个男孩,每个男孩又都有一个妹妹,问这一家共有几口人?

解:全家共有5口人.妹妹的年龄最小,她是每一个男孩的妹妹.如果你列出算式:

1个妈妈+3个男孩+3个妹妹=7口人那就错了.

为什么呢?请你想一想.

【例3】 小明给了小刚2支铅笔,他们俩的铅笔数就

一样多了，问小明比小刚多几支铅笔？

解：小明比小刚多 4 支铅笔.

注意，可不是多 2 支；如果只多 2 支的话，小明给小刚后，小刚就反而比小明多 2 支，不会一样多了.

【例 4】 小公共汽车正向前跑着，售票员对车内的人数数了一遍，便说道，车里没买票的人数是买票的人数的 2 倍. 你知道车上买了票的乘客最少有几人吗？

解：最少 1 人. 因为售票员和司机是永远不必买票的，这是题目的“隐含条件”. 有时发现“隐含条件”会使解题形势豁然开朗.

【例 5】 大家都知道：一般说来，几个数的和要比它们的积小，如 $2+3+4$ 比 $2\times3\times4$ 小. 那么请你回答：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这几个数相加的和大还是相乘的积大？

解：和大. 注意：“0”是个很有特点的数.

① 0 加到任何数上仍等于这个数本身；

② 0 乘以任何数时积都等于 0；

把它们写出来就是：

$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$

$0\times1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9=0$

所以，应当重视特例.

【例 6】 两个数的和比其中一个数大 17，比另一个数大 15，你知道这两个数都是几？你由此想到一般关系式吗？

解：这两个数就是 17 和 15.

因为它们的和比 15 大 17，又比 17 大 15.

由一个特例联想、推广到一般，是数学思维的特点之一.

此题可能引起你如下联想：

和 - 15 = 17，

那么和 = 15 + 17.

一般和 = 一个数 + 另一个加数，

或写成：和 - 一个加数 = 另一个加数，

或写成：被减数 - 减数 = 差，

也可写成：被减数 - 差 = 减数.

以上这些都是你从课本上学过的内容，这里不过是把它们联想到一起罢了.

学数学要注意联想，学会联想才能融会贯通.

【例 7】 小明和小英一同去买本，小明买的是作文本，小英买的是数学本. 已知小英买的数学本的本数是小明买的作文本的 2 倍. 又知一本作文本的价钱却是一本数学本的价钱的 2 倍，请问他俩谁用的钱多？

解：他俩花的钱一样多.

可以这样想：因为作文本的价钱是数学本的 2 倍，所以把买作文本的钱用来买数学本，同样多的钱所买到的本数应该是作文本的 2 倍，这刚好与题意相符. 可见两人花的钱一样多.

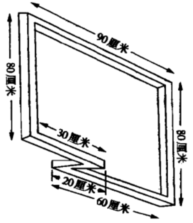
结论是隐含着的，推理就是要把它明明白白地想通，写出来的推理过程就叫"证明"，这是同学们现在就可以知道的.

【例 8】 中午放学的时候，还在下雨，大家都盼着晴天. 小明对小英说："已经连续三天下雨了，你说再过 36 小时会出太阳吗？"小朋友你说呢？

解：不会出太阳. 因为从中午起再过 36 个小时正好是半夜. 而阴雨天和夜里是不会出太阳的.

注意：解题的第一要义是首先明确“问什么”，而且要紧紧抓住“问什么”？“问什么”是思考目标，这就好比小朋友走着来上学，学校是你走路的目的，试想，如果你走路没有目标，结果会怎样？本题迷惑人的地方就是想用阴天下雨把你的注意力从应当思考的目标引开，给你的思维活动造成干扰．学会删繁就简，抓住目标，将会大大地提高你的解题效率．

【例 9】 一位画家想订做一个像框，用来装进他的立体画．他画了一张像框的尺寸图拿给你看（右图），请你帮他算算，需要多长的材料才能做好？（画家说，材料粗细要求一样，形状尺寸一定要按图示加工，拐角部分都要做成直角）．

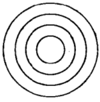


解：不管多长的材料，像框也无法做成．

从每一部分来说，这个图看来是合理的，但从整体上看，这个图是“荒谬的”、“失调的”．用一句普通的话说，就是“有点不对劲的”．请你注意，对现实生活觉得有点不对劲的感觉是创造性的起因．

习　题　一

1. 如右图所示，若每个圆圈里都有五只蚂蚁，问右图中一共应有多少只蚂蚁？



2. 一个课外小组活动日，老师进教室一看，来参加活动的学生只占教室里全体人数的一半．老师很生气．你知道这天共来了多少学生吗？

3. 小林和小蓉两人口袋里各有 10 元钱．两人去书店买书．买完书后发现，小林花去的钱正好和小蓉剩下的钱数一样多．请问，现在他们两人一共还有多少钱？

4. 满满一杯牛奶，小明先喝了半杯；然后添水加满，之后再喝去半杯；再一次添水加满，最后把它全部喝完．请问小明一共喝了多少杯牛奶多少杯水？

5. 小黄和小兰想买同一本书．小黄缺一分钱，小兰缺 4 角 2 分钱．若用他俩的钱合买这本书，钱还是不够．请问这本书的价钱是多少？他俩各有多少钱？

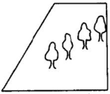
6. 一个骑自行车的人以每小时 10 公里的速度从一个城镇出发去一个村庄；与此同时，另一个人步行，以每小时 5 公里的速度从那个村庄出发去那个城镇．经过一小时后他们相遇．问这时谁离城镇较远，是骑车的人还是步行的人？

7. 有人去买葱，他问多少钱一斤．卖葱的说：“1 角钱 1

斤."买葱的说："我要都买了.不过要切开称.从中间切断，葱叶那段每斤2分，葱白那部分每斤8分.你卖不卖?"卖葱的一想："8分+2分就是1角".他就同意全部卖了.但是卖后一算账，发现赔了不少钱.小朋友，你知道为什么吗?

8.一天鲍勃用赛车送海伦回家.汽车在快车道上急驶.鲍勃看到前面有辆大卡车.灵机一动，突然向海伦提出了一个巧妙的问题.鲍勃说："海伦，你看！前面那辆大卡车开得多快！但是我们可以超过它.假定现在我们在它后面正好是1500米，它以每分钟1000米的速度前进，而我用每分钟1100米的速度追赶它，我们这样一直开下去，到时候肯定会从后面撞上它.但是，海伦，请你告诉我，在相撞前一分钟，我们与它相距多少米?"聪明的海伦略加思考立刻回答了鲍勃的问题.小朋友，你也能回答吗?

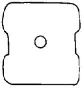
9.小明家附近有个梯形公园，公园中有4棵树排成了一行，如图所示.小明每天放学回家都要到公园里去玩一会儿.有一天，他玩着玩着突然想出了一个问题："能不能把公园分成大小和形状都相同的4块，而且每一块上保留一棵树?"回到家以后，他又和爸爸妈妈一块儿讨论，终于像小明想的那样分好了，小明非常高兴.小朋友，你也回家与爸爸妈妈讨论讨论，看能不能分好?



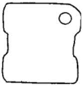
10.小莉在少年宫学画油画.一天，他找到了一块中间有个圆孔的纸板.他想把这块板分成两块，重新组合成一块调色板，如下图，小朋友看该怎么切才好呢?

注意：回顾由第9题到第10题的解题思路，这里有一个克服"思维定势"的问题.在做第9题时，你可能费了很

大劲，把大梯形这样划分，那样划分，试来试去，最终得到了满意的结果.



原样



重新组合

做完了第 9 题后这种思考问题的方式方法就可能深深地在你的头脑中扎根了. 当你着手解第 10 题时，你可能还是沿着原来的思路，按原来的思维方式处理面临的新问题，这种情况心理学上就叫做“思维定势”.

思维定势不利于创造性的发挥，从这个意义上讲，有人说学习的最大障碍是头脑中已有的东西，是有一定道理的，你在做第 10 题时，对此大概也有体会了吧！今后要以此为训.

对本讲其它各题，在你做完以后也希望你做一些回顾和总结，以便发现些更有价值的东西，使自己变得更聪明起来.

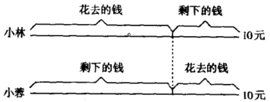
习题一解答

1. 解：一共只有 5 只蚂蚁. 如右图所示，每一个圆圈里都有五只蚂蚁.

2. 解：只来了一名学生. 教室里共有两人，另一个人是老师，所以说学生占教室里全体人数的一半.

3. 解：他们两人此时一共还有

10 元. 如下图所示.



4. 解：小明共喝了一杯牛奶和一杯水. 因为原来就有一杯牛奶，最后喝光了；后来又加了两次水，每次半杯，合起来是一杯水，最后也喝光了.

5. 解：这本书的价钱就是 4 角 2 分钱. 小黄有 4 角 1 分钱(所以买书还差 1 分)，小兰 1 分钱都没有，所以他若买这本书，还差 4 角 2 分钱；小兰若是有 1 分钱的话，他俩的钱合起来也就够买这本书了.

6. 解：相遇后，两人就在一处了，此时二人离城自然一样远.

7. 解：按照买葱人的说法，葱叶那段每斤 2 分，葱白那段每斤 8 分，合起来确是 1 角. 但是这样合起来后是 2 斤卖 1 角，不再是一斤 1 角钱，所以卖葱的人赔了钱.

8. 解：相撞前一分钟赛车落后卡车 100 米.

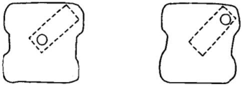
海伦思考的窍门是倒着想. 鲍勃的赛车比卡车每分钟快 100 米(即 1100 米 - 1000 米 = 100 米)，所以碰车前的 1 分钟它们相距 100 米.

9. 解：划分方法如右图所示. 每一块都是个小梯形，四个小梯形大小相等，形状相同.

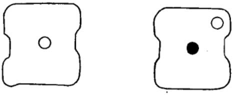
小梯形和大梯形之间是大小不等、形状相似.

10. 解：方法不止一种.

①从中切下一条，倒换个位置放进去.(见图)



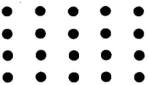
②在需要开孔的位上开一个小圆孔，把切下的部分填到中间的孔中去.(见图)



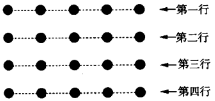
第2讲　数数与计数

从数数与计数中,可以发现重要的算术运算定律.

【例 1】　数一数,下面图形中有多少个点?



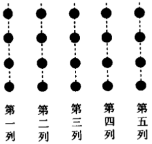
解:方法 1:从上到下一行一行地数,见下图.



点的总数是:

$5+5+5+5=5\times4$.

方法 2:从左至右一列一列地数,见下图.



点的总数是：$4+4+4+4+4=4\times5$.

因为不论人们怎样数，点数的多少都是一定的，不会因为数数的方法不同而变化.所以应有下列等式成立：

$$5\times4=4\times5$$

从这个等式中，我们不难发现这样的事实：

两个数相乘，乘数和被乘数互相交换，积不变.

这就是乘法交换律.

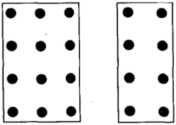
正因为这样，在两个数相乘时，以后我们也可以不再区分哪个是乘数，哪个是被乘数，把两个数都叫做“因数”，因此，乘法交换律也可以换个说法：

两个数相乘，交换因数的位置，积不变.

如果用字母 a、b 表示两个因数，那么乘法交换律可以表示成下面的形式：

$a\times b=b\times a$.

方法 3：分成两块数，见右图.



前一块 4 行，每行 3 个点，共 3×4 个点.

后一块 4 行，每行 2 个点，共 2×4 个点.

两块的总点数 $=3\times4+2\times4$.

因为不论人们怎样数，原图中总的点数的多少都是一定的，不会因为数数的方法不同而变化.所以应有下列等式成立：

$3\times4+2\times4=5\times4$.

仔细观察图和等式，不难发现其中三个数的关系：

$3+2=5$

所以上面的等式可以写成：

$3\times4+2\times4=(3+2)\times4$

也可以把这个等式调过头来写成：

$(3+2)\times4=3\times4+2\times4.$

这就是乘法对加法的分配律.

如果用字母 a、b、c 代表三个数，那么乘法对加法的分配律可以表示成下面的形式：

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

分配律的意思是说：两个数相加之和再乘以第三数的积等于第一个数与第三个数的积加上第二个数与第三个数的积之和.

进一步再看，分配律是否也适用于括号中是减法运算的情况呢？请看下面的例子：

计算 $(3-2)\times4$ 和 $3\times4-2\times4$.

解：$(3-2)\times4=1\times4=4$

$3\times4-2\times4=12-8=4.$

两式的计算结果都是 4，从而可知：

$(3-2)\times4=3\times4-2\times4$

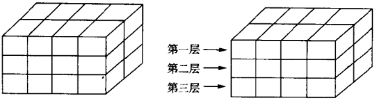
这就是说，这个分配律也适用于一个数与另一个数的差与第三个数相乘的情况.

如果用字母 a、b、c（假设 $a>b$）表示三个数，那么上述事实可以表示如下：

$(a-b)\times c=a\times c-b\times c.$

正因为这个分配律对括号中的“+”和“-”号都成立，于是，通常人们就简称它为乘法分配律.

【例 2】 数一数，下左图中的大长方体是由多少个小长方体组成的？



解：方法 1：从上至下一层一层地数，见上右图.

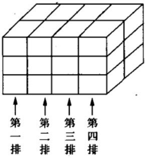
第一层　4×2 个

第二层　4×2 个

第三层　4×2 个

三层小长方体的总个数(4×2)×3 个.

方法 2：从左至右一排一排地数，见下图.



第一排　2×3 个

第二排　2×3 个

第三排　2×3 个

第四排　2×3 个

四排小长方体的总个数为(2×3)×4.

若把括号中的2×3看成是一个因数，就可以运用乘法交换律，写成下面的形式：4×(2×3).

因为不论人们怎样数，原图中小长方体的总个数是一定的，不会因为数数的方法不同而变化. 把两种方法连起来看，应有下列等式成立：

(4×2)×3＝4×(2×3).

这就是说在三个数相乘的运算中，改变相乘的顺序，所得的积相同.

或是说，三个数相乘，先把前两个数相乘再乘以第三

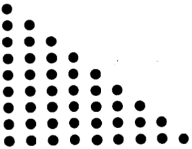
个数，或者先把后两个数相乘，再去乘第一个数，积不变，这就是乘法结合律.

如果用字母 a、b、c 表示三个数，那么乘法结合律可以表示如下：$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$.

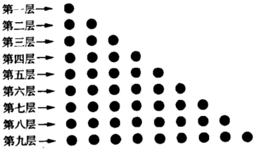
巧妙地运用乘法交换律、分配律和结合律，可使得运算变得简洁、迅速.

从数数与计数中，还可以发现巧妙的计算公式.

【例 3】 数一数，下图中有多少个点？

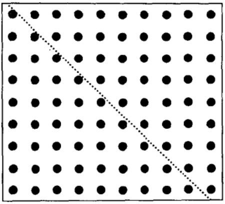


解：方法 1：从上至下一层一层地数，见下图.



总点数 $=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$.

方法 2：补上一个同样的三角形点群（但要上下颠倒放置）和原有的那个三角形点群共同拼成一个长方形点群，则显然有下式成立（见下图）：



三角形点数 = 长方形点数 ÷ 2

因三角形点数 $=1+2+3+4+5+6+7+8+9$

而长方形点数 $=10\times9=(1+9)\times9$

代入上面的文字公式可得：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9$

$=(1+9)\times9\div2=45.$

进一步把两种方法联系起来看：

方法 1 是老老实实地直接数数.

方法 2 可以叫做“拼补法”. 经拼补后，三角形点群变成了长方形点群，而长方形点群的点数就可以用乘法算式计算出来了.

即　$1+2+3+4+5+6+7+8+9$

$=(1+9)\times9\div2.$

这样从算法方面讲，拼补法的作用是把一个较复杂的连加算式变成了一个较简单的乘除算式了. 这种方法在 700 多年前的中国的古算书上就出现了.

再进一步，若脱离开图形（点群）的背景，纯粹从数的方面找规律，不难发现下述事实：

相同的数　　相同的数

$$\underbrace{1+2+3+4+5+6+7+8+9}_{9\text{个数}}=(1+9)\times 9\div 2$$

相同的数

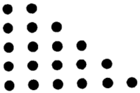
这个等式的左边就是从1开始的连续自然数相加之和，第一个数1又叫首项，最后一个数9叫末项，共有9个数又可以说成共有9项，这样，等式的含义就可以用下面的语言来表述：

从1开始的连续自然数前几项的和等于首项加末项之和乘以项数的积的一半．或是写成下面的文字式：

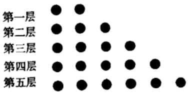
和＝(首项＋末项)×项数÷2

这个文字式通常又叫做等差数列求和公式．

【例4】 数一数，下图中有多少个点？

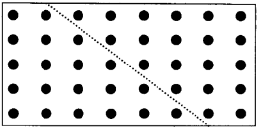


解：方法1：从上至下一层一层地数，见下图：



总点数＝2＋3＋4＋5＋6＝20.

方法2：补上一个同样的梯形点群，但要上下颠倒放置，和原图一起拼成一个长方形点群如下图所示：



由图可见，有下列等式成立：

梯形点数 = 长方形点数 ÷ 2.

因为梯形点数 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6

而长方形点数 = 8 × 5 = (2 + 6) × 5

代入上面的文字式，可得：

2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (2 + 6) × 5 ÷ 2

与例 1 类似，我们用拼补法得到了一个计算梯形点群总点数的较为简单的公式.

再进一步，若脱离开图形(点群)的背景纯粹从数的方面找找规律，不难发现下述事实：

相同的数　相同的数

$$\underbrace{2+3+4+5+6}_{5\text{个数}}=(2+6)\times5\div2$$

相同的数

这个等式的左边就是一个等差数列的求和式，它的首项是 2，末项是 6，公差是 1，项数是 5. 这样这个等式的含义就可以用下面的语言来表述：

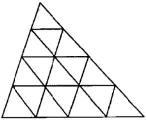
等差数列前几项的和等于首项加末项之和乘以项数的积的一半.

写成下面较简化的文字式：

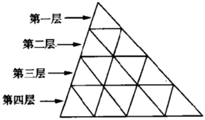
和＝(首项＋末项)×项数÷2

这就是等差数列的求和公式.

【例 5】 数一数,下图中有多少个小三角形?

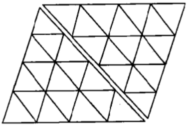


解:方法 1:从上至下一层一层地数,见下图.



小三角形总数＝1＋3＋5＋7＝16 个.

方法 2:补上一个同样的图形,但要上下颠倒放置、和原来的一起拼成一个大平行四边形如下图所示.



显然平行四边形包含的小三角形个数等于原图中的大三角形所包含的小三角形个数的两倍,即下式成立.

大三角形中所含＝平行四边形所含÷2

平行四边形所含 $=8\times4=(1+7)\times4$(个)

大三角形中所含 $=1+3+5+7=16$

代入上述文字式:

$1+3+5+7=(1+7)\times4\div2$

这样,我们就得到了一个公式:

小三角形个数 =(第一层的数 + 最末层的数)× 层数 ÷2

脱离开图形的背景,纯粹从数的方面进行考察,找找规律,不难发现下述事实:

相同的数　相同的数

$$\underbrace{1+3+5+7}_{\text{4个数}}=(1+7)\times4\div2$$

相同的数

等式左边就表示一个等差数列的前几项的和,它的首项是 1,末项是 7,公差是 2,项数是 4. 这样这个等式的含义也就可以用下面的语言来表述:

等差数列前几项的和等于首项加末项之和乘以项数之积的一半.

写成较简单的文字式:

和 =(首项 + 末项)× 项数 ÷2.

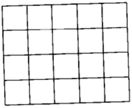
习　题　二

下列各题至少用两种方法数数与计数.

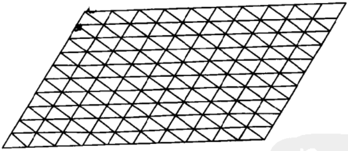
1. 数一数,下图中有多少个点?

2.数一数，下图中的三角形点群有多少个点？

3.数一数，下图中有多少个小正方形？



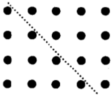
4.数一数，下图中共有多少个小三角形？



习题二解答

1. 解：方法 1：从上至下一行一行地数，共 4 行每行 5 个点，得 $5\times4=20$.

方法 2：分成两个三角形后再数，见下图．得：



$(1+2+3+4)\times2=20$.

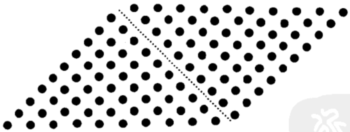
发现一个等式：

$1+2+3+4=(1+4)\times4\div2$.

2. 解：方法 1：从上至下一行一行地数，再相加，得：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$.

方法 2：用拼补法，如图所示：



$11\times10\div2=55$.

发现一个等式：

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

$=(1+10)\times10\div2.$

3. 解：方法 1：从上至下一层一层地数，得：

$5\times4=20.$

方法 2：做阶梯形切割，分两部分数，见右图.

$(1+2+3+4)\times2=20.$

发现一个等式：

$1+2+3+4=(1+4)\times4\div2.$

4：解：方法 1：从上至下一层一层地数（图略）得：

$20\times10=200.$

方法 2：分成两个三角形来数：

$(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19)\times2$

$=200.$

发现一个等式：

$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

$=(1+19)\times10\div2.$

第3讲　速算与巧算

利用上一讲得到的乘法运算定律和等差数列求和公式,可以使计算变得巧妙而迅速.

【例 1】 $2\times4\times5\times25\times54$

$=(2\times5)\times(4\times25)\times54$

$=10\times100\times54$

$=54000$

（利用了交换律和结合律）

【例 2】 $54\times125\times16\times8\times625$

$=54\times(125\times8)\times(625\times16)$

$=54\times1000\times10000$

$=540000000$

（利用了交换律和结合律）

【例 3】 $5\times64\times25\times125$

$=5\times(2\times4\times8)\times25\times125$

$=(5\times2)\times(4\times25)\times(8\times125)$

$=10\times100\times1000$

$=1000000$

将 64 分解为 2、4、8 的连乘积是关键一步.

【例 4】 $32\times125\times275$

$=(4\times8)\times125\times(25\times11)$

$=(4\times25)\times(8\times125)\times11$

$=100\times1000\times11$

$=1100000$

注意：某数乘以 11 的积等于该数错位相加之和,如：

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 11 \\ \hline 25 \\ 25\ \ \\ \hline 275 \end{array}$$

【例 5】 $37\times48\times625$

$=37\times(3\times16)\times625$

$=(37\times3)\times(16\times625)$

$=111\times10000$　　注意 $37\times3=111$

$=1110000$

【例 6】 $27\times25+13\times25$

$=(27+13)\times25$

$=40\times25$

$=1000$

逆用乘法分配律，这样做叫提公因数

【例 7】 $123\times23+123+123\times76$

$=123\times23+123\times1+123\times76$

$=123\times(23\times1+76)$

$=123\times100$

$=12300$

注意 $123=123\times1$；再提公因数 123

【例 8】 $81+991\times9$

$=9\times9+991\times9$

$=(9+991)\times9$

$=1000\times9$

$=9000$

把 81 改写(叫分解因数)为 9×9 是为了下一步提出公因数 9

【例 9】 111×99

$=111\times(100-1)$

$=111\times100-111$

$=11100-111$

$=10989$

【例 10】 $23\times57-48\times23+23$

$=23\times(57-48+1)$

$=23\times10$

$=230$

【例 11】 求 $1+2+3+\cdots+24+25$ 的和.

解：此题是求自然数列前 25 项的和．

方法 1：利用上一讲得出的公式

和＝(首项＋末项)×项数÷2

$1+2+3+\cdots+24+25$

$=(1+25)\times 25\div 2$

$=26\times 25\div 2$

$=325$

方法 2：把两个和式头尾相加(注意此法多么巧妙！)

$$
\begin{array}{rl}
\text{和} & =1+2+3+\cdots+24+25 \\
+)\ \text{和} & =25+24+23+\cdots+2+1 \\
\hline
2\times\text{和} & =\underbrace{26+26+26+\cdots+26+26}_{25\text{项}}
\end{array}
$$

和$=26\times 25\div 2$

$=325$

想一想，这种头尾相加的巧妙求和方法和前面的“拼补法”有联系吗？

【例 12】 求 $8+16+24+32+\cdots+792+800$ 的和．

解：可先提公因数

$8+16+24+32+\cdots+792+800$

$=8\times(1+2+3+4+\cdots+99+100)$

$=8\times(1+100)\times 100\div 2$

$=8\times 5050$

$=40400$

【例 13】 某剧院有25 排座位，后一排都比前一排多 2 个座位，最后一排有 70 个座位，问这个剧院一共有多少个座位？

解：由题意可知，若把剧院座位数按第 1 排、第 2 排、

第 3 排、…、第 25 排的顺序写出来，必是一个等差数列.

那么第 1 排有多少个座位呢？因为：

第 2 排比第 1 排多 2 个座位，$2=2\times1$

第 3 排就比第 1 排多 4 个座位，$4=2\times2$

第 4 排就比第 1 排多 6 个座位，$6=2\times3$

⋮　　　　　　　⋮

这样，第 25 排就比第 1 排多 48 个座位，

$48=2\times24$.

所以第 1 排的座位数是：$70-48=22$.

再按等差数列求和公式计算剧院的总座位数：

和 $=(22+70)\times25\div2$

$=92\times25\div2$

$=1150$.

习　题　三

计算下列各题：

1. $4\times135\times25$
2. $38\times25\times6$
3. 124×25
4. 132476×111
5. $35\times53+47\times35$
6. $53\times46+71\times54+82\times54$
7. ①$11\times11$　②$111\times111$
   ③$1111\times1111$　④$11111\times11111$
   ⑤$111111111\times111111111$
8. ①$12\times14$　②$13\times17$　③$15\times17$

④17×18　　⑤19×15　　⑥16×12

9.①11×11　　②12×12　　③13×13

④14×14　　⑤15×15　　⑥16×16

⑦17×17　　⑧18×18　　⑨19×19

10.计算下列各题,并牢记答案,以备后用.

①15×15　　②25×25　　③35×35

④45×45　　⑤55×55　　⑥65×65

⑦75×75　　⑧85×85　　⑨95×95

11.求 $1+2+3+\cdots+(n-1)+n$ 之和,并牢记结果.

12.求下列各题之和.把四道题联系起来看,你能发现具有规律性的东西吗?

①$1+2+3+\cdots+10$

②$1+2+3+\cdots+100$

③$1+2+3+\cdots+1000$

④$1+2+3+\cdots+10000$

13.求下表中所有数的和.你能想出多少种不同的计算方法?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

习题三解答

1.解：$4\times135\times25=(4\times25)\times135$
$=100\times135=13500.$

2.解：$38\times25\times6=19\times2\times25\times2\times3$
$=19\times(2\times25\times2)\times3$
$=19\times100\times3$
$=1900\times3=5700.$

3.解：$124\times25=(124\div4)\times(25\times4)$
$=31\times100=3100.$

4.解：132476×111
$=132476\times(100+10+1)$
$=13247600+1324760+132476$
$=14704836.$

或用错位相加的方法：

$$\begin{array}{r} 132476 \\ 132476 \\ +\ 132476 \\ \hline 14704836 \end{array}$$

5.解：$35\times53+47\times35=35\times(53+47)$
$=35\times100=3500.$

6.解：$53\times46+71\times54+82\times54$
$=(54-1)\times46+71\times54+82\times54$
$=54\times46-46+71\times54+82\times54$
$=54\times(46+71+82)-46$

$=54\times199-46$

$=54\times(200-1)-46$

$=54\times200-54-46$

$=10800-100$

$=10700.$

7. 解：①$11\times11=121$

②$111\times111=12321$

③$1111\times1111=1234321$

④$11111\times11111=123454321$

⑤$111111111\times111111111$

$=12345678987654321.$

8. 解：①$12\times14=12\times(10+4)$

$=12\times10+12\times4$

$=12\times10+(10+2)\times4$

$=12\times10+10\times4+2\times4$

$=(12+4)\times10+2\times4$

$=160+8$

$=168$

多次运用乘法分配律（或提公因数）

②$13\times17=13\times(10+7)$

$=13\times10+13\times7$

$=13\times10+(10+3)\times7$

$=13\times10+10\times7+3\times7$

$=(13+7)\times10+3\times7$

$=200+21$

$=221$

多次运用乘法分配律（或提公因数）

发现规律：求十几乘以十几的积的速算方法是：用一个数加上另一个数的个位数，乘以 10(即接着添个“0”)，再

加上它们个位数字的积.

用这个方法计算下列各题：

③$15\times17=(15+7)\times10+5\times7$

$=220+35=255$

④$17\times18=(17+8)\times10+7\times8$

$=250+56=306$

⑤$19\times15=240+45=285$

⑥$16\times12=180+12$

$=192$.

9.解：作为十几乘以十几的特例，以下各小题的结果请牢牢记住：

①$11\times11=(11+1)\times10+1\times1$

$=121$

②$12\times12=(12+2)\times10+2\times2$

$=144$

③$13\times13=(13+3)\times10+3\times3$

$=169$

④$14\times14=(14+4)\times10+4\times4$

$=196$

⑤$15\times15=(15+5)\times10+5\times5$

$=225$

⑥$16\times16=(16+6)\times10+6\times6$

$=256$

⑦$17\times17=(17+7)\times10+7\times7$

$=289$

⑧$18\times18=(18+8)\times10+8\times8$

$=324$

⑨$19\times19=(19+9)\times10+9\times9$

$=361.$

10. 解：①$15\times15$　　注意矩形框中

$=15\times(10+5)$　　式子

$=15\times10+15\times5$

$=15\times10+(10+5)\times5$

$=15\times10+10\times5+5\times5$

$=(15+5)\times10+5\times5$

$=\boxed{20\times10+5\times5}$

$=225$

②$25\times25$

$=25\times(20+5)$

$=25\times20+25\times5$

$=25\times20+(20+5)\times5$

$=25\times20+20\times5+5\times5$

$=(25+5)\times20+5\times5$　　注意矩形框中

$=\boxed{30\times20+5\times5}$　　式子

$=625$

发现规律：几十五的自乘积就是十位数字和十位数字加 1 的积，再在其后写上 25.

如 15×15 的积就是 1×2 再写上 25 得 225. 25×25 的积就是 2×3 再写上 25 得 625.

用这个方法写出其他各题的答案如下：

③$35\times35=3\times4\times100+25=1225$

④$45\times45=4\times5\times100+25=2025$

⑤$55\times55=5\times6\times100+25=3025$

⑥$65\times65=6\times7\times100+25=4225$

⑦$75\times75=7\times8\times100+25=5625$

⑧$85\times85=8\times9\times100+25=7225$

⑨$95\times95=9\times10\times100+25=9025$

要牢记以上方法和结果．要知道，孤立的一道题不好记，但有规律的一整套的东西反而容易记住！

11．解：有的同学问：“n 是几？”

老师告诉你：“n 就是末项，你说是几就是几”．

用头尾相加法求自然数列的前 n 项之和．

$$\begin{array}{rl} \text{和}= & 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad +\cdots+(n-1)+n \\ +)\ \text{和}= & n \quad +(n-1)+(n-2)+\cdots+ \quad 2 \quad +1 \\ \hline 2\times\text{和}= & \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{\text{共有}n\text{项}} \end{array}$$

$\therefore$ 和 $=(n+1)\times n\div2$

或和 $=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

12．解：请注意规律性的东西．

①$1+2+3+\cdots+10$

$=(1+10)\times10\div2=55$

②$1+2+3+\cdots+100$

$=(1+100)\times100\div2=5050$

③$1+2+3+\cdots+1000$

$=(1+1000)\times1000\div2=500500$

④$1+2+3+\cdots+10000$

$=(1+10000)\times10000\div2=50005000$.

13．解：方法 1：仔细观察不难发现把每列（或每行）的 10 个数相加之和按顺序排列起来构成一个等差数列，它就是：

55，65，75，85，95，105，115，125，135，145

$\therefore$ 总和 $=(55+145)\times10\div2=1000$.

方法 2：首先各行都按第一行计数，得 10 行 10 列数字方阵的所有数之和为 $55\times10=550$. 但第二行比第一行多 10，第三行比第一行多 20，…，第十行比第一行多 90. 总计共多：

$10+20+30+40+50+60+70+80+90=450$.

所以原题数字方阵的所有数相加之和为：

$550+450=1000$.

方法 3：仔细观察可发现，若以数字 10 所在的对角线为分界线，将该数字方阵折叠之后，它就变成下述的三角形阵（多么巧妙！）

20 20 20 20 20 20 20 20 20 10
20 20 20 20 20 20 20 20 10
20 20 20 20 20 20 20 10
20 20 20 20 20 20 10
20 20 20 20 20 10
20 20 20 20 10
20 20 20 10
20 20 10
20 10
10

$$\begin{aligned}\text{总和}&=20\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)-100\\&=20\times55-100\\&=1000.\end{aligned}$$

方法 4：找规律，先从简单情况开始

1　2　　　　　　　　1　2　3

2　3

和＝2×4

$=2\times2\times2$

1　2　3　4

2　3　4　5

3　4　5　6

4　5　6　7

2　3　4

3　4　5

和＝3×9

$=3\times3\times3$

和＝$4\times16=4\times4\times4$.

可见原来数字方阵的所有数的和＝$10\times10\times10=1000$.

看！方法多么简捷;数学多么微妙！

第4讲　数与形相映

形和数的密切关系，在古代就被人们注意到了．古希腊人发现的形数就是非常有趣的例子．

【例 1】　最初的数和最简的图相对应．

1　和 ·（点）

2　和 （线：两点连成一条直线）

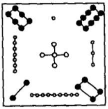
3　和 （平面：三点确定一个平面）

4　和 （立体：不在同一平面上的四个点构成一个四面体）

这是古希腊人的观点，他们说一切几何图形都是由数产生的．

【例 2】　我国在春秋战国时代就有了“洛图”（见下图）．图中也是用“圆点”表示数，而且还区分了偶数和奇数，偶数用实心点表示，奇数用空心点表示．你能把这张图用自然数写出来吗？见下图所示，这个图又叫九宫图．

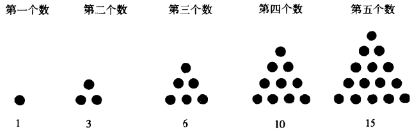
洛图



九宫图

6	1	8
7	5	3
2	9	4

【例 3】 古希腊数学家毕达哥拉斯发现了“形数”的奥秘. 比如他把 1,3,6,10,15,… 叫做三角形数. 因为用圆点按这些数可以堆垒成三角形，见下图.



毕达哥拉斯还从圆点的堆垒规律，发现每一个三角形数，都可以写成从 1 开始的 n 个自然数之和，最大的自然数就是三角形底边圆点的个数.

第一个数：$1=1$

第二个数：$3=1+2$

第三个数：$6=1+2+3$

第四个数：$10=1+2+3+4$

第五个数：$15=1+2+3+4+5$

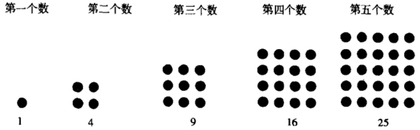
…

第 n 个数：$1+2+3+4+5+\cdots+n$

可见，第 n 个三角形数 $=\dfrac{n(n+1)}{2}$，根据这个公式可以写出任意一个指定的三角形数. 比如第 100 个三角形数是：

$$\frac{100\times(100+1)}{2}=5050.$$

【例 4】 毕达哥拉斯还发现了四角形数，见下图. 因为用圆点按四角形数可以堆垒成正方形，因此它们最受毕达哥拉斯及其弟子推崇.



第一个数：$1=1^2=1$

第二个数：$4=2^2=1+3$

第三个数：$9=3^2=1+3+5$

第四个数：$16=4^2=1+3+5+7$

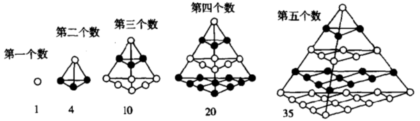
第五个数：$25=5^2=1+3+5+7+9$

…

第 n 个数：$n^2=1+3+5+9+\cdots+(2n-1)$.

四角形数(又叫正方形数)可以表示成自然数的平方，也可以表示成从 1 开始的几个连续奇数之和.奇数的个数就等于正方形的一条边上的点数.

【例 5】 类似地，还有四面体数见下图.



仔细观察可发现，四面体的每一层的圆点个数都是三角形数.因此四面体数可由几个三角形数相加得到：

第一个数：1

第二个数：$4=1+3$

第三个数：$10=1+3+6$

第四个数：$20=1+3+6+10$

第五个数：$35=1+3+6+10+15$.

【例 6】 五面体数，见下图.

仔细观察可以发现，五面体的每一层的圆点个数都是四角形数，因此五面体数可由几个四角形数相加得到：

第一个数：$1=1$

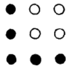
第二个数：$5=1+4$

第三个数：$14=1+4+9$

第四个数：$30=1+4+9+16$

第五个数：$55=1+4+9+16+25$.

【例 7】 按不同的方法对图中的点进行数数与计数，可以得出一系列等式，进而可猜想到一个重要的公式. 由此可以使人体会到数与形之间的耐人寻味的微妙关系.



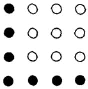
方法 1：先算空心点，再算实心点：

$2^2+2\times2+1$.

方法 2：把点图看作一个整体来算 3^2.

因为点数不会因计数方法不同而变，所以得出：

$$2^2+2\times2+1=3^2.$$



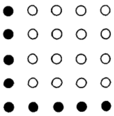
方法 1：先算空心点，再算实心点：

$3^2+2\times3+1$.

方法 2：把点图看成一个整体来算：4^2.

因为点数不会因计数方法不同而变，所以得出：

$$3^2+2\times3+1=4^2.$$



方法 1：先算空心点，再算实心点：

$4^2+2\times4+1$.

方法 2：把点图看成一个整体来算 5^2.

因为点数不会因计数方法不同而变，所以得出：

$$4^2+2\times4+1=5^2.$$

把上面的几个等式连起来看，进一步联想下去，可以猜到一个一般的公式：

$2^2+2\times2+1=3^2$

$3^2+2\times3+1=4^2$

$4^2+2\times4+1=5^2$

…

$n^2+2\times n+1=(n+1)^2$.

利用这个公式，也可用于速算与巧算.

如：$9^2+2\times9+1=(9+1)^2=10^2=100$

$99^2+2\times99+1=(99+1)^2$

$=100^2=10000$.

习　题　四

1. 第 25 个三角形数是几？

2. 第 50 个三角形数是几？

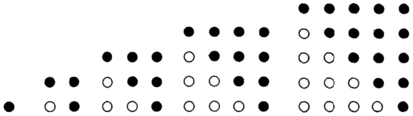
3. 第 1000 个三角形数是几？

4. 三角形数的奇偶性是很有规律的，

1	3	6	10	15	21	28	36	…
奇	奇	偶	偶	奇	奇	偶	偶	

想一想，这是为什么？

5. 观察下列图形，你能发现什么？



6. 第 99 个与第 100 个三角形数的和等于多少？

7. 每一个四角形数（或叫正方形数）（除 1 外）都能拆成两个三角形数吗？比如，100 是哪两个三角形数的和？

8. 第 8 个三角形数恰是第 6 个四角形数，因为

$$\frac{(8+1)\times 8}{2}=36=6^2$$

$$=\underbrace{1+3+5+7+9+11}_{6个奇数}$$

你还能试着找到一个这样的例子吗？（这事比较困难）

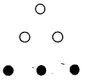
9. 请你试着画一画五角形数和六角形数的图形．并试着把第 n 个五（六）角形数拆成以 1 为首页、有 n 项的等差

数列之和的形式.

10. 写出前 10 个四面体数.

11. 写出前 10 个五面体数.

12. 按不同的方法对下图中的点进行数数与计数，得出一系列等式，进而猜想出一个公式来，从中体会数与形之间的微妙关系. 如：



方法 1：先算空心点，再算实心点，得：

$\dfrac{2\times(2+1)}{2}+(2+1)$.

方法 2：把点图看成一个整体来算，得：

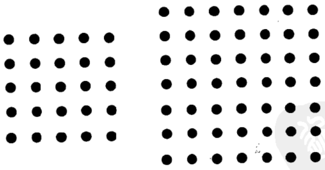
$\dfrac{3\times(3+1)}{2}$,

因为点数不会因计数方法不同而变，所以得出：

$$\frac{2\times(2+1)}{2}+(2+1)=\frac{3\times(3+1)}{2}.$$

请你照此继续做下去.（可参考本讲例 7）

13. 模仿例 7，用不同的方法分别对下两图中的点进行数数与计数，先得出一系列等式，进而猜想出一个重要的公式.



习题四解答

1.解：$1+2+3+\cdots+25$

$=(1+25)\times 25\div 2=325.$

2.解：$1+2+3+\cdots+50$

$=(1+50)\times 50\div 2=1275.$

3.解：$1+2+3+\cdots+1000$

$=(1+1000)\times 1000\div 2=500500.$

4.解：观察前几个三角形数的构成，就可以发现其中的规律：

第 1 个数＝1…奇数；

第 2 个数＝第 1 个数＋2…奇数＋偶数＝奇数；

第 3 个数＝第 2 个数＋3…奇数＋奇数＝偶数；

第 4 个数＝第 3 个数＋4…偶数＋偶数＝偶数；

第 5 个数＝第 4 个数＋5…偶数＋奇数＝奇数.

5.解：相邻的两个三角形之和是一个四角形数（或叫正方形数），或是说，一个四角形数，可以拆成两个三角形数之和.

6.解：$\dfrac{(100+1)\times 100}{2}+\dfrac{(99+1)\times 99}{2}$

$=101\times 50+50\times 99$

$=50\times(100+1+99)$

$=10000.$

或者根据第 6 题，＝第 100 个四角形数＝$100\times 100=10000$.

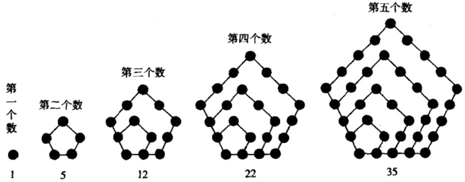
7.解：能拆．$100=55+45$.

8.解：寻找这样的例子比较困难．有人找到第 49 个三

角形数是第 35 个四角形数，因为：

$(49+1)\times 49\div 2=1225=35^2$.

9. 解：五角形数如下图所示：



第一个数：$1=1$

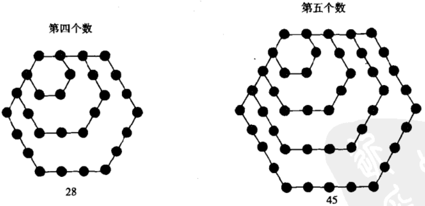
第二个数：$5=1+4$

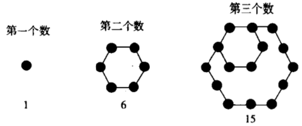
第三个数：$12=1+4+7$

第四个数：$22=1+4+7+10$

第五个数：$35=1+4+7+10+13$

六角形数如下图所示：





第一个数 1=1

第二个数 6=1+5

第三个数 15=1+5+9

第四个数 28=1+5+9+13

第五个数 45=1+5+9+13+17.

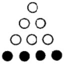
10.解：

第几个数:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
四面体数:	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

11.解：

第几个数:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
五面体数:	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385

12.解：继续做下去，见下两图.



方法 1：分两部分计算：

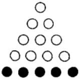
$$\frac{3\times(3+1)}{2}+(3+1).$$

方法 2：看成一个整体算：

$$\frac{4\times(4+1)}{2}.$$

得等式：

$$\frac{3\times(3+1)}{2}+(3+1)=\frac{4\times(4+1)}{2}.$$



方法 1：分两部分计算：

$$\frac{4\times(4+1)}{2}+(4+1).$$

方法 2：看成一个整体算：$\frac{5\times(5+1)}{2}$.

得等式：

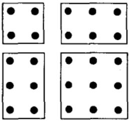
$$\frac{4\times(4+1)}{2}+(4+1)=\frac{5\times(5+1)}{2}.$$

…

把上面的几个等式连起来看，进一步联想下去，可猜想出一个一般的公式：

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

13. 解：见图(a)和图(b)



(a)

方法 1：

分 4 块数：$2^2+2\times2\times3+3^2$.

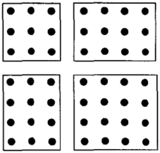
方法 2：看成一个整体：

$$(2+3)^2$$

得等式：$2^2+2\times2\times3+3^2=(2+3)^2$.

方法 1：分 4 块数：

$$3^2+2\times3\times4+4^2.$$



(b)

方法 2：看成一个整体：$(3+4)^2$.

得等式：

$$3^2+2\times3\times4+4^2=(3+4)^2.$$

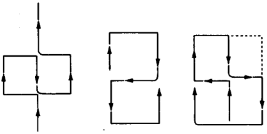
进一步猜出一般公式：

$$a^2+2\times a\times b+b^2=(a+b)^2.$$

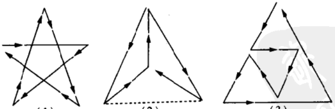
或 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

第5讲　一笔画问题

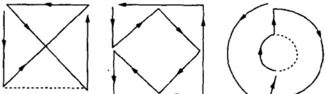
一天，小明做完作业正在休息，收音机中播放着轻松、悦耳的音乐.他拿了支笔，信手在纸上写了“中”、“日”、“田”几个字.突然，他脑子里闪出一个念头，这几个字都能一笔写出来吗？他试着写了写，“中”和“日”可以一笔写成（没有重复的笔划），但写到“田”字，试来试去也没有成功.下面是他写的字样.（见下图）



这可真有意思！由此他又联想到一些简单的图形，哪个能一笔画成，哪个不能一笔画成呢？下面是他试着画的图样.（见下图）



(1)　　(2)　　(3)



(4)　　(5)　　(6)

经过反复试画，小明得到了初步结论：图中的(1)、(3)、(5)能一笔画成；(2)、(4)、(6)不能一笔画成．真奇怪！小明发现，简单的笔画少的图不一定能一笔画得出来．而复杂的笔画多的图有时反倒能够一笔画出来，这其中隐藏着什么奥秘呢？小明进一步又提出了如下问题：

如果说一个图形是否能一笔画出不决定于图的复杂程度，那么这事又决定于什么呢？

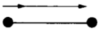
能不能找到一条判定法则，依据这条法则，对于一个图形，不论复杂与否，也不用试画，就能知道是不是能一笔画成？

先从最简单的图形进行考察．一些平面图形是由点和线构成的．这里所说的“线”，可以是直线段，也可以是一段曲线．而且为了明显起见，图中所有线的端点或是几条线的交点都用较大的黑点“●”表示出来了．

首先不难发现，每个图中的每一个点都有线与它相连；有的点与一条线相连，有的点与两条线相连，有的点与3条线相连等等．

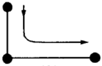
其次从前面的试画过程中已经发现，一个图能否一笔画成不在于图形是否复杂，也就是说不在于这个图包含多少个点和多少条线，而在于点和线的连接情况如何——一个点在图中究竟和几条线相连．看来，这是需要仔细考察的．

第一组(见下图)


(1)

(1)两个点,一条线.

每个点都只与一条线相连.


(2)

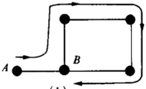
(2)三个点.

两个端点都只与一条线相连,中间点与两条线连.

第一组的两个图都能一笔画出来.

(但注意第(2)个图必须从一个端点画起)

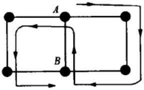
第二组(见下图)



(1)

(1)五个点,五条线.

A 点与一条线相连,B 点与三条线相连,其他的点都各与两条线相连.



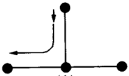
(2)

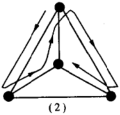
(2)六个点,七条线.(“日”字图)

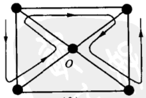
A 点与 B 点各与三条线相连,其他点都各与两条线相连.

第二组的两个图也都能一笔画出来,如箭头所示那样画.即起点必需是 A 点(或 B 点),而终点则定是 B 点(或 A 点).

第三组(见下图)


(1)


(2)



(3)

(1)四个点，三条线。

三个端点各与一条线相连，中间点与三条线相连。

(2)四个点，六条线。

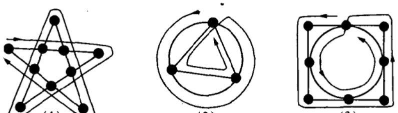
每个点都与三条线相连。

(3)五个点，八条线。

点 O 与四条线相连，其他四个顶点各与三条线相连。

第三组的三个图形都不能一笔画出来。

第四组(见下图)



(1)　　　　(2)　　　　(3)

(1)这个图通常叫五角星。

五个角的顶点各与两条线相连，其他各点都各与四条线相连。

(2)由一个圆及一个内接三角形构成。

三个交点，每个点都与四条线相连(这四条线是两条线段和两条弧线)。

(3)一个正方形和一个内切圆构成。

正方形的四个顶点各与两条线相连，四个交点各与四条线相连。

(四条线是两条线段和两条弧线)。

第四组的三个图虽然比较复杂，但每一个图都可以一笔画成，而且画的时候从任何一点开始画都可以。

第五组(见下图)

(1)　　　　　　(2)

(1)这是“品”字图形，它由三个正方形构成，它们之间没有线相连。

(2)这是古代的钱币图形，它是由一个圆形和中间的正方形方孔组成。圆和正方形之间没有线相连。

第五组的两个图形叫不连通图，显然不能一笔把这样的不连通图画出来。

进行总结、归纳，看能否找出可以一笔画成的图形的共同特点，为方便起见，把点分为两种，并分别定名：

把和一条、三条、五条等奇数条线相连的点叫做奇点；把和两条、四条、六条等偶数条线相连的点叫偶点，这样图中的要么是奇点，要么是偶点。

提出猜想：一个图能不能一笔画成可能与它包含的奇点个数有关，对此列表详查：

	能否一笔画成	一个图中奇点个数	说　　明
第一组	能	2	两个端点是奇点
第二组	能	2	A 点、B 点是奇点
第三组	不能	4	(1)、(2)两图中每个点都是奇点，(3)图中长方形的四个顶点都是奇点
第四组	能	0	三个图中，每一个图都不含有奇点，即每一个点都是偶点
第五组	不能		图的各部分之间不连通，当然就不能一笔画成

从此表来看，猜想是对的．下面试提出几点初步结论：

①不连通的图形必定不能一笔画；能够一笔画成的图形必定是连通图形．

②有 0 个奇点(即全部是偶点)的连通图能够一笔画成。(画时可以任一点为起点,最后又将回到该点).

③只有两个奇点的连通图也能一笔画成(画时必须以一个奇点为起点,而另一个奇点为终点);

④奇点个数超过两个的连通图形不能一笔画成。

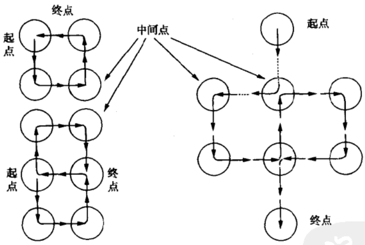
最后,综合成一条判定法则:

有 0 个或 2 个奇点的连通图能够一笔画成,否则不能一笔画成。

能够一笔画成的图形,叫做"一笔画"。

用这条判定法则看一个图形是不是一笔画时,只要找出这个图形的奇点的个数来就能行了,根本不必用笔试着画来画去。

看看下面的图可能会加深你对这条法则的理解。



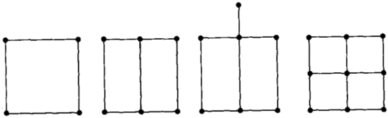
从画图的过程来看:笔总是先从起点出发,然后进入下一个点,再出去,然后再进出另外一些点,一直到最后进入终点不再出来为止。由此可见:

①笔经过的中间各点是有进有出的，若经过一次，该点就与两条线相连，若经过两次则就与四条线相连等等，所以中间点必为偶点。

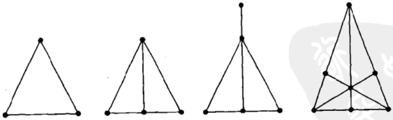
②再看起点和终点，可分为两种情况：如果笔无重复地画完整个图形时最后回到起点，终点和起点就重合了，那么这个重合点必成为偶点，这样一来整个图形的所有点必将都是偶点，或者说有 0 个奇点；如果笔画完整个图形时最后回不到起点，就是终点和起点不重合，那么起点和终点必定都是奇点，因而该图必有 2 个奇点，可见有 0 个或 2 个奇点的连通图能够一笔画成。

习　题　五

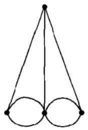
1. 下面的各个小图形都是由点和线组成的。请你仔细观察后回答：



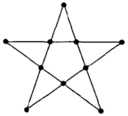
(1)　(2)　(3)　(4)



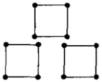
(5)　(6)　(7)　(8)



(9)



(10)



(11)

①与一条线相连的有哪些点？

②与二条线相连的有哪些点？

③与三条线相连的有哪些点？

④与四条线或四条以上的线相连的有哪些点？

2.若把与奇数条线相连的点叫做奇点，把与偶数条线相连的点叫偶点，那么请你回答：

①有 0 个奇点(即全部是偶点)的图形有哪些？

②有 2 个奇点的图形有哪些？

③有 4 个或 4 个以上奇点的图形有哪些？

④连通图形有哪些？不连通图形有哪些？

3.如果笔在纸上连续不断、又不重复地一笔画成的图形叫一笔画，自己动笔实际画画看，然后回答：

①哪些图形能够一笔画成？

②哪些图形不能一笔画成？

4. 把以上各问联系起来看，进行归纳，找出规律然后回答：

①如果把各部分连结在一起的图形叫做连通图形，那么能一笔画出的图形必定是连通图形；而不是连通图形必定不能一笔画出。这句话说得对吗？

②有 0 个奇点(即全部是偶点)的连通图形一定可以一笔画出来(画时可以以任一点为起点，最后必能回到该

点），这句话对吗？

③只有两个奇点的连通图形也能一笔画出来，但要注意画时必须以一个奇点为起点，而以另一个奇点为终点，这句话对吗？

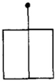
④奇点个数超过两个的图形不能一笔画出来．这句话对吗？

5．从画图过程的角度，进一步理解所发现的一些规律。

习题五解答

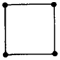
1．解：见下图

①与一条线相连的点有：（在图中画成黑点，下同。）


(3)


(7)

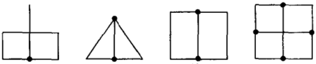
②与两条线相连的点有：


(1)


(5)

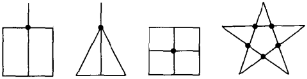

(6)

③与三条线相连的点有：

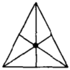


(3)　(6)　(2)　(4)

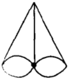
④与四条及四条以上的线相连的点有：



(3)　(7)　(4)　(10)



(8)
（与六条线相连）



(9)
（与五条线相连）

2. 解：

①有 0 个奇点（即全部是偶点）的图形是：
(1)、(5)、(10)；

②有 2 个奇点的图形是：
(2)、(3)、(6)、(7)；

③有 4 个奇点的图形是：(4)、(9)
有 6 个奇点的图形是：(8)。

④ (1) ～ (10) 是连通图形，(11) 不是连通图形。

3. 解：

①一笔画有：

(1)、(5)、(10)、(2)、(3)、(6)、(7)。

②不能一笔画出的图形是：

(4)、(8)、(9)、(11)。

4．解：①对；②对；③对；④对。

5．解：(略) 请看书。

第6讲　七座桥问题

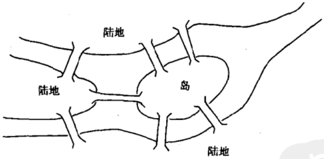
二百五十年前，有一个问题曾出现在普通人的生活中，向人们的智力挑战，使得很多人冥思苦想．在相当长的一段时间里，很多人都想解决它，但他们都失败了．

今天，我们小学生也要大胆地研究研究它．

这个问题叫做“七座桥问题”．

当时，德国有个城市叫哥尼斯堡．城中有条河，河中有个岛，河上架有七座桥，这些桥把陆地和小岛连接起来，这样就给人们提供了一个游玩的好去处（见下图）．俗话说，“人是万物之灵”，他们就是在游玩时候想出了这样一个问题：

如果在陆地上可以随便走，而对每座桥只许通过一次，那么一个人要连续地走完这七座桥怎么个走法？



好动脑筋的小朋友请先不要接着往下读，你也试一试，走一走．

你是怎样试的呢？你不可能真到哥尼斯堡城去，像当

年的游人那样亲自步行过桥上岛．因为你并没有离开自己的教室，你坐在教室里，在你的面前没有河流，没有小岛，也没有桥，但在你面前却有一张图！

可是，这又是一张什么样的图呢？图上并没河流、小岛和小桥的原样，只是用一些线条来代表它们，但却明白无误地显示出了它们之间的位置关系和连接方式．可以说，这是一张为了做数学而舍弃了许多无关的真实内容而抽象出来的“数学图”．

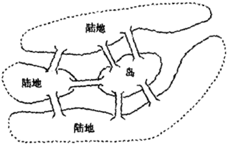
这样的抽象过程非常重要，这种抽象思维对于学习数学来讲非常重要．

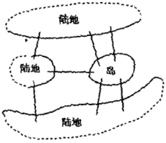
也许你是用铅笔尖在图上画来画去进行试验的吧！好！你做得很好！为什么这样说呢？因为当你这样做的时候，就发挥了自己的想像力：你在无意中把自己想像成了一个小笔尖．你把小笔尖在七桥图上画来画去，想像成了你自身的经历，有位教育家曾说“强烈而活跃的想像是伟大智慧不可缺少的属性”．看来你并不缺少这种想像力！

让我们再好好地想一想，刚才你把小笔尖在七桥图上画来画去，想像成你自己过桥的亲身经历，这不就是把过桥问题和一笔画问题联系在一起了吗？用一句数学上常用的话说，这就是把实际生活中的问题转化成了数学问题，下面的图把这种转化过程详细地画了出来．

在下页左图中把陆地想像成了几大块．这对过桥问题并不产生影响．

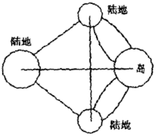
在下页右图中进一步把陆地块缩小，同时改用线段代表小桥，这也不改变过桥问题的实质．

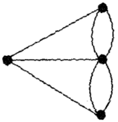




在下面左图中，进一步把陆地和岛都用小圆圈代表，这已是“几何图形”了，但还是显得复杂.

在下面右图中，圆进一步缩成了点.这样它变成了只





由点和线构成的最简单的几何图形了.经过上面这样的一番简化，七桥问题的确就变成了上右图(即为第五讲习题 1 中的图(9))是不是能一笔画成的问题了.很容易看出图中共有 4 个奇点，由上一讲得到的判定法则可知，它不能一笔画成，因而人们根本不能一次连续不断地走过七座桥.

这样七桥问题就得到了圆满的解决.

这种解法是大数学家欧拉找到的.这种简化也就是一种抽象过程.所谓“抽象”就是在解决实际问题的过程中，舍弃与问题无关的方方面面.而只抓住那个能体现问题实质的东西.就像在七桥问题中、陆地和岛的大小、桥的宽窄和长短都是与问题无关的东西.

最后，再把解决七桥问题的要点总结一下：

①把陆地和岛缩小画成点，把桥画成线，这样就把原图变成了简单的几何图形了.

②如果这种由点和线组成的图形是一笔画，人就能一次通过所有的桥；如果这种图形不能一笔画成，人就不能一次通过所有的桥.

③由前述判定法则可知，有0个奇点或2个奇点的图形是一笔画，超过两个奇点时，图形就不能一笔画出来.

模仿这种思路，也能解决类似好多问题.

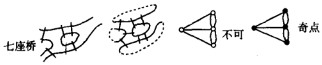
习　题　六

1.学习欧拉，先将过桥问题转化为一笔画问题，再进行判断(见下图).

过桥问题：

可否一次通过的桥(每座桥只能走一次)？

例：

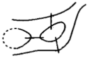


仿此例依次判断出：

一座桥

二座桥

三座桥



四座桥

五座桥

六座桥

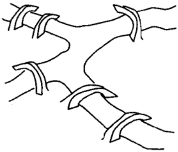
七座桥

八座桥

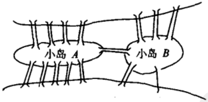
九座桥

2. 下图是乡间的一条小河，上面建有六座桥，你能一次不重复地走遍所有的小桥吗？

（每座小桥最多只准走一次，陆地上可以重复地来回走）

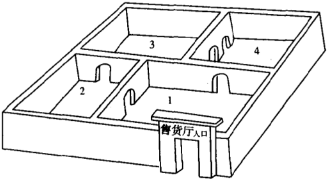


3. 在我国著名数学家陈景润写的《数学趣谈》一书中，有下面的这样一道题，大意是说：在法国的首都巴黎有一条河，河中有两个小岛，那里的人们建了15座桥把两个小岛和河岸连接起来，如下图所示，请你说一说，从任一岸出发，一次连续地通过所有的桥到达另一岸，可能吗？（每座桥只能走一次）



4. 下图所示为一座售货厅. 问顾客从入口进去时，能够一次不重复地走遍各个门吗？请说明你的理由.

如果售厅出口在 4 号房间由你设计再开一个门，使顾客从入口进去后一次不重复地走遍各个门，再从 4 号房间出售厅，你打算在哪里再开一个门？

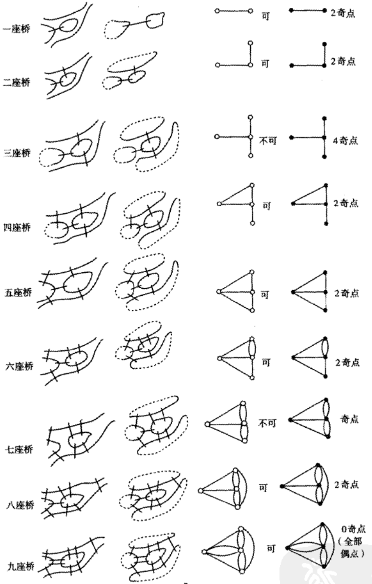


习题六解答

1.解：见下图

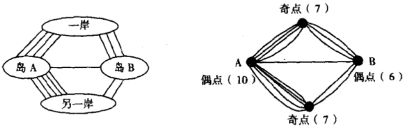
过桥问题：
可否一次通过所有的桥
（每座桥只能走一次）

一笔画问题：
可否一笔画成图形（笔不能抬起，不能重复）


一座桥
可
2奇点
二座桥
可
2奇点
三座桥
不可
4奇点
四座桥
可
2奇点
五座桥
可
2奇点
六座桥
可
2奇点
七座桥
不可
奇点
八座桥
可
2奇点
九座桥
可
0奇点
（全部
偶点）

2. 解：见下两图，可知不能一次不重复地走遍所有的小桥，因为下右图有 4 个奇点.

3. 解：由于通过两岛之中任何一个岛的桥的数目都是偶数，而通过两岸的任一个岸的桥的数目都是奇数，这就表示由任一个岸出发，都存在一条路，使人们将所有的桥都只走一次而到达另外一个岸. 画出图来就能一目了然了. 见下图.

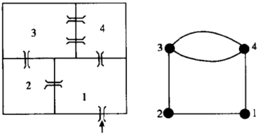


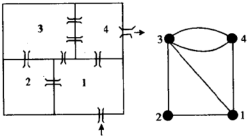
因为图中共有两个奇点，且奇点均为岸，是一笔画.

所以人们可以一次通过所有的桥，每座桥只走一次，由一岸到另一岸.

4. 解：从入口进入售货厅后，也就是从 1 号房间开始不能一次不重复地走遍各个门，因为虽然整个图形（见下图）只有 2 个奇点，但点 1 是偶点.

当出口在4号房间时，如再在1号和3号房间之间开一个门，则从1号房间开始后就能一次不重复地走遍各个门．因为点1变成了奇点，点4仍为奇点，而整个图形只有2个奇点，因此可以从1号房间进，4号房间出．见下图（进入售货厅后先从1号房间进入3号房间即可）．





第7讲　数字游戏问题(一)

数字游戏问题是数学游戏中的一类.它要求从数字以及数字间的运算中发现规律,然后按照这个规律去填数或填写运算符号.解决这一类问题的关键是寻找规律、发现规律.

一、找规律填写数列里面的数

【例 1】 在□中填入适当的数.

1　9　2　8　3　7　4　□

分析　题中共有 8 个数,前 7 个已经知道.最后一个需要填写.8 个数中 $1+9=10$,$2+8=10$,$3+7=10$,所以最后两个数是 $4+\square=10$.这样,□里应填 6.

解:1　9　2　8　3　7　4　$\boxed{6}$

【例 2】 在□中填入适当的数.

15　14　12　11　9　8　□　□

分析　题中的数是按照从大到小的规律排列的.每两个数为一组,每两组之间又去掉了一个相邻的数:15、14、~~13~~、12、11、~~10~~、9、8、~~7~~、6、5.所以□中应顺次填写 6、5.

这道题也可以这样分析:$15-1=14$,$14-2=12$,$12-1=11$,$11-2=9$,$9-1=8$,$8-2=6$,$6-1=5$.

解:15　14　12　11　9　8　$\boxed{6}$　$\boxed{5}$

【例 3】 在(　)里填数.

2　0　2　2　4　6　10　(　)

分析　观察发现 $2+0=2, 0+2=2, 2+2=4, 2+4=6, 4+6=10$. 即前两个数相加的和是后面的数. 这样最后一个数应是 $6+10=16$. (　)里应填 16.

解: 2　0　2　2　4　6　10　(16)

二、找规律填写表格中的数

【例 4】　在空格中填入合适的数.

4	6	9	13	
5	9	15	23	

分析　表格中的数分上下两排,每一排的数各有自己的规律. 上排的数是从 4 开始依次加 2, 加 3, 加 4 得到: $4 \overset{+2}{\frown} 6 \overset{+3}{\frown} 9 \overset{+4}{\frown} 13$. 这样最后一个数应是 $13+5=18$. 下排的数是从 5 开始依次加 4, 加 6, 加 8 得到: $5 \overset{+4}{\frown} 9 \overset{+6}{\frown} 15 \overset{+8}{\frown} 23$. 这样下排最后一个数应是 $23+10=33$.

解:

4	6	9	13	18
5	9	15	23	33

【例 5】　在空格中填入合格的数.

7	8	
12　1	9　3	2　5

分析　数字分成三组，前二组中的三个数字的和是 20：$7+12+1=20$，$8+9+3=20$，所以第三组中应是$\square+2+5=20$，空格中的数是 13.

解：

7		8		13
12 1		9 3		2 5

【例 6】　在空格中填入合适的数.

8	12	16
13		23
18	24	30

分析　九个数分成三组，第一组中有 $8+18=2\times13$，即第一个数与第三个数的和是中间那个数的二倍，同样第三组中 $16+30=2\times23$. 所以中间一组 $2\times\square=12+24$，$\square$中应填 18.

分析　将这九个数横的作一排，第一排中有$8+4=12$，$12+4=16$. 即后面的数比前面的数大 4. 第三排中有 $18+6=24$，$24+6=30$，后面的数比前面的数大 6. 再看第二排应是 $13+5=18$，$18+5=23$，所以空格中应填 18.

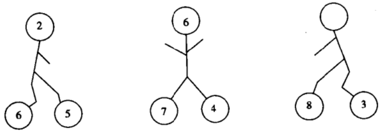
解：

8	12	16
13	18	23
18	24	30

图表中的填数一般来说，既要注意横排，也要注意竖排. 大部分问题是横竖结合寻找规律.

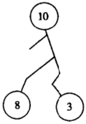
三、找规律填写图形中的数

【例 7】 在空白处填入合适的数.



分析 每个图中都有三个圈，每个圈中填有数字. 这三个数字之间有某种关系. 分析第一个图发现 $6-5=1$，$1\times2=2$，分析第二个图同样有 $7-4=3$，$3\times2=6$，所以第三个图应该是 $8-3=5$，$5\times2=10$. 第三个图中空白处应填 10.

解：



从以上几种填数游戏中，我们发现填数的过程就是找规律的过程. 在找规律中一是要注意数字排列的顺序，看清它们所在的位置. 二是把已经知道的数字进行简单变形，如相加，相减，乘 2，乘 3，除 2 等. 三是发现规律之后按这个规律进行运算求出所需要的结果.

习　题　七

找规律填数：

1. 1，2，3，3，2，1，4，5，6，6，5，□

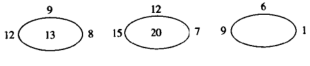
2. 4，6，10，16，26，42，□.

3. 4，6，10，16，24，34，□.

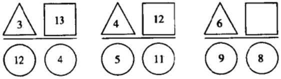
4.

2	5	7	8
4	7	9	
3	6		9

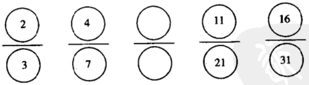
5.



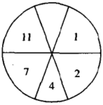
6.



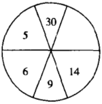
7.



8.



9.



习题七解答

1．解：$\boxed{4}$．每三个数一组，前后两组数是对称排列的．

2．解：$\boxed{68}$．从第 3 个数开始，后面的数是它前面两个数的和．$4+6=10$，$6+10=16$，$10+16=26$，$16+26=42$，

$\therefore\quad 26+42=68$．

3．解：$\boxed{46}$．从第 2 个数开始，后面的数是它前面的数依次加 2，4，6，8，10，12 得到的，即 $4+2=6$

$6+4=10\quad 10+6=16$，$16+8=24$，$24+10=34$

$\therefore\quad 34+12=46$．

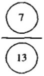
4．解：$\boxed{8}$，$\boxed{10}$，每一竖排中的三个数按上、下、中的顺序依次排列，所以第 3 列中最下面一个数是 8，第 4 列中间的数为 10．

5．解：14．每个图中，圈左边的数减去圈右边的数再加上圈上边的数得到圈里的数．

6．解：$\boxed{11}$．把横线下面图中的两个数相加减去三角形中的数就得到正方形里的数．

7．解：在上排圆中，从第 2 个数开始是把它前面的

数依次加上 2，3，4，5 得到．在下排圆中，从第 2 个数开始是依次把它前面的数依次加上 4，6，8，10 得到．



8．解：16．从右上方开始，顺时针方向旋转，依次加上 1，2，3，4，5 得到后面的数．

9．解：21．从左上方开始．逆时针方向旋转，依次加上 1，3，5，7，9 得到后面的数．

第8讲　数字游戏问题（二）

一、填写算式中的数

【例1】　用○，★，△代表三个数，有：

○＋○＋○＝15，　　★＋★＋★＝12，

△＋△＋△＝18，　　○＋★＋△＝（　），

填出（　）中的数．

分析　上面算式中的○、★、△分别代表三个数．根据三个相同加数的和分别是15、12、18，可知○＝5，★＝4，△＝6，又5＋4＋6＝15，所以（　）内应填15．

解：○＝5，★＝4，△＝6，

○＋★＋△＝（15），

【例2】　把2，3，4，6，7，9分别填到下面六个圆圈中，使三个算式成立．

○＋○＝10，○－○＝5，○＋○＝8，

分析1　在2、3、4、6、7、9中相加等于8的只有2和6，先把2、6填在第三个算式中，剩下的就可填成3＋7＝10，9－4＝5．

分析2　六个数中9最大，而9不能填在第1或第3个算式中，所以把9填在第2个算式中作被减数．其余的就好填了．

解：3＋7＝10，9－4＝5，2＋6＝8．

【例 3】　把 1～8 八个数字分别填入图中八个空格中，使图上四边正好组成加、减、乘、除四个等式.

	−		=	
÷				+
‖				‖
	×		=	

分析　观察这幅图，用 8 个数组成四个等式. 从左上角开始先作减法和除法，得出结果之后再分别作加法和乘法得到右下角的数字. 所以问题的关键是左上角的数字与右下角的数字. 它们应该是较大的且能够作乘法与除法的数. 即 8 和 6，不妨取左上角是 8，右下角是 6，再试填其他数字. 也可取左上角是 6，右下角是 8，再试填其他数字.

解：

8	−	7	=	1
÷				+
4				5
‖				‖
2	×	3	=	6

或

6	−	5	=	1
÷				+
3				7
‖				‖
2	×	4	=	8

二、填写运算符号

【例 4】　在合适的地方填写“+”或“−”，使等式成立.

1　2　3　4　5　6 = 1.

分析　把六个数分组，试加会发现 1 + 2 + 3 + 5 = 11，4 + 6 = 10，这样在 4，6 前面填上“−”，其他地方填上“+”，等式成立.

解：$1+2+3-4+5-6=1$.

【例 5】 在合适的地方填写“+”或“-”，使等式成立.

1　2　3　4　5　6＝2.

分析　按上题方法试加减，发现无论如何也得不到 2，于是想到是否其中有一个两位数，而两位数只能是 12，再试就能够成功.

解：$12-3+4-5-6=2$.

【例 6】 从 +、-、×、÷、(　) 中挑选合适的符号，填入适当的地方，使下面等式成立.

①5　5　5　5　5＝1

②5　5　5　5　5＝2

③5　5　5　5　5＝3

④5　5　5　5　5＝4.

分析　在加减乘除运算中，有 $5\div5=1$，$(5+5)\div5=2$，$5-5=0$ 这样几个基本关系，充分利用它们就可以使等式成立，一般来说一个式子可以有多种表达形式.

解：①$5\div5+(5-5)\times5=1$

$(5+5)\div5-(5\div5)=1$

②$(5+5)\div5+5-5=2$

$5-(5+5+5)\div5=2$

③$5\div5+(5+5)\div5=3$

$5-5\div5-5\div5=3$

④$(5+5+5+5)\div5=4$

$5-5\div5+5-5=4$.

三、填写竖式中的数

【例 7】 在下列竖式中的空白处填入适当的数，使算

式成立．

$$
① \quad \begin{array}{r} \square\square\square \\ -\ \ \square\square \\ \hline 1 \end{array}
\qquad\qquad
② \quad \begin{array}{r} \square\square \\ +\square\square \\ \hline 1\,9\,1 \end{array}
$$

分析　先观察①，这是一个减法算式，被减数是三位数，减数是两位数，差是 1．而最小的三位数 100 与最大的两位数 99 的差正好是 1（容易知道，只有这一种情形）．

再看②，两个两位数的和是 191．分析两个加数的十位数字，它们都必须为 9，还要求两个个位数字的和进位才满足 $9+9+1=19$．这时两个个位数字的和是 11，11 可以写成 $11=9+2=8+3=7+4=6+5$．

解：①

$$
\begin{array}{r} 1\,0\,0 \\ -\ \ 9\,9 \\ \hline 1 \end{array}
$$

②

$$
\begin{array}{r} 9\,9 \\ +\ 9\,2 \\ \hline 1\,9\,1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 9\,8 \\ +\ 9\,3 \\ \hline 1\,9\,1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 9\,7 \\ +\ 9\,4 \\ \hline 1\,9\,1 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} 9\,6 \\ +\ 9\,5 \\ \hline 1\,9\,1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 9\,2 \\ +\ 9\,9 \\ \hline 1\,9\,1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 9\,3 \\ +\ 9\,8 \\ \hline 1\,9\,1 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} 9\,4 \\ +\ 9\,7 \\ \hline 1\,9\,1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 9\,5 \\ +\ 9\,6 \\ \hline 1\,9\,1 \end{array}
$$

【例 8】　右面算式中九个字母分别代表 1～9 九个数字，试找出字母 M 和 H 分别所代表的数字．

$$
\begin{array}{r} A \\ A\,B \\ B\,C \\ C\,D \\ D\,E \\ E\,F \\ F\,G \\ G\,H \\ +\quad H\,M \\ \hline H\,H\,M \end{array}
$$

分析　九个字母分别代表 1～9．在个位数字上 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$，所以 $M=5$，同时

向十位进 4. 这时十位上 8 个字母中没有 M，所以十位上的数字和是 40，再加上个位进来的四个 10. 结果是 44. 所以 H＝4.

解： M＝5，H＝4.

习 题 八

1. 把 2、3、13、18 分别填入下面○里，使等式成立.

○－○＝○＋○.

2. △、○、★分别代表三个不等于 0 的数字，并且 △×★＝○，△＋△＋△＝○－△－△，那么★代表的数字是多少.

3. 把 1～9 九个数字填在○里，（每个数字只能用 1 次），组成三道正确的算式.

○＋○＝○，○－○＝○，○×○＝○.

4. △、○、★、▭代表四个不同的数字，它们组成两个式子，请在（　）内填上合适的数字.

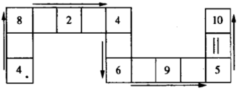
$$\begin{array}{rrr} & \triangle & \bigcirc \\ + & \bigstar & \square \\ \hline 1 & 4 & 9 \end{array}$$

△＋○＋★＋▭＝（　）

5. 在右式空的格处填上合适的数使算式成立.

$$\begin{array}{rcccc} & & & \square & 1 \\ + & & \square & 9 & \square \\ \hline & \square & \square & 9 & \square \\ - & & \square & \square & \square \\ \hline & & & \square & 9 \end{array}$$

6. 从左下角的 4 开始，依次在数字间填上“＋”或“－”，使最后结果等于 10.



7. 在＋、－、×、÷中挑选合适的符号填入适当的地方，使下列等式都等于 3.

3　3　3　3　3＝3

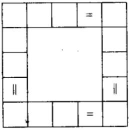
3　3　3　3　3＝3

3　3　3　3　3＝3

8. 根据所给的数字和符号排出算式：

+	+	−	−
1	2	3	4
5	6	7	8
=	=	=	=

⟹



习题八解答

1. 18－13＝3＋2(答案不惟一).

2. ★＝5，因为○＝5 个△.

3. 4＋5＝9，8－7＝1；2×3＝6.

4. △＋○＋★＋▭＝(23).

5.

$$\begin{array}{rcccc} & & & \boxed{9} & 1 \\ + & & \boxed{9} & 9 & \boxed{9} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & 9 & \boxed{0} \\ - & & \boxed{9} & \boxed{9} & \boxed{1} \\ \hline & & & \boxed{9} & 9 \end{array}$$

6.

8	+	2	+	4				10
+				+				‖
4				6	−	9	−	5

7. 3＋3－3＋3－3＝3；3×3÷3＋3－3＝3；
3＋3÷3－3÷3＝3.

8.

8	−	5	=	3
丨				+
2				4
‖				‖
6	+	1	=	7

或

7	−	4	=	3
丨				+
1				5
‖				‖
6	+	2	=	8

或

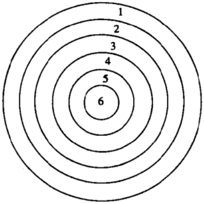
6	+	2	=	8
+				丨
1				5
‖				‖
7	−	4	=	3

或

3	+	5	=	8
+				丨
4				2
‖				‖
7	−	1	=	6

第9讲　整数的分拆

【例 1】　小兵和小军用玩具枪做打靶游戏，见下图所示．他们每人打了两发子弹．小兵共打中 6 环，小军共打中 5 环．又知没有哪两发子弹打到同一环带内，并且弹无虚发．你知道他俩打中的都是哪几环吗？



解：已知小兵两发子弹打中 6 环，要求每次打中的环数，可将 6 分拆 $6=1+5=2+4$；同理，要求小军每次打中的环数，可将 5 分拆 $5=1+4=2+3$．

由题意：没有哪两发子弹打到同一环带内并且弹无虚发，只可能是：

小兵打中的是 1 环和 5 环，小军打中的是 2 环和 3 环．

【例 2】　某个外星人来到地球上，随身带有本星球上的硬币 1 分、2 分、4 分、8 分各一枚，如果他想买 7 分钱的一件商品，他应如何付款？买 9 分、10 分、13 分、14 分和 15 分的商品呢？他又将如何付款？

解：这道题目的实质是要求把 7、9、10、13、14、15 各数按 1、2、4、8 进行分拆．

$7=1+2+4$

$9=1+8$

$10=2+8$

$13=1+4+8$

$14=2+4+8$

$15=1+2+4+8$

∴ 外星人可按以上方式付款.

【例 3】 有人以为 8 是个吉利数字，他们得到的东西的数量都能要够用“8”表示才好. 现有 200 块糖要分发给一些人，请你帮助想一个吉利的分糖方案.

解：可以这样想：因为 200 的个位数是 0，又知只有 5 个 8 相加才能使和的个位数字为 0，这就是说，可以把 200 分成 5 个数，每个数的个位数字都应是 8.

这样由 $8\times5=40$ 及 $200-40=160$，

可知再由两个 8 作十位数字可得 $80\times2=160$ 即可.

最后得到下式：$88+88+8+8+8=200$.

【例 4】 试将 100 以内的完全平方数分拆成从 1 开始的一串奇数之和.

解：$1=1\times1=1^2=1$ （特例）

$4=2\times2=2^2=1+3$

$9=3\times3=3^2=1+3+5$

$16=4\times4=4^2=1+3+5+7$

$25=5\times5=5^2=1+3+5+7+9$

$36=6\times6=6^2=1+3+5+7+9+11$

$49=7\times7=7^2=1+3+5+7+9+11+13$

$64=8\times8=8^2$

$=1+3+5+7+9+11+13+15$

$$81 = 9\times 9 = 9^2$$
$$= 1+3+5+7+9+11+13+15+17$$
$$100 = 10\times 10 = 10^2$$
$$= 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19.$$

观察上述各式，可得出如下猜想：

一个完全平方数可以写成从 1 开始的若干连续奇数之和，这个平方数就等于奇数个数的自乘积(平方).

检验：把 $11\times 11 = 121$，和 $12\times 12 = 144$，两个完全平方数分拆，看其是否符合上述猜想.

$121 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$

$144 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23$

结论：上述猜想对 121 和 144 两个完全平方数是正确的.

【例 5】　从 1～9 九个数中选取，将 11 写成两个不同的自然数之和，有多少种不同的写法？

解：将 1～9 的九个自然数从小到大排成一列：

1,2,3,4,5,6,7,8,9.

分析　先看最小的 1 和最大的 9 相加之和为 10 不符合要求.

但用次大的 2 和最大的 9 相加，和为 11 符合要求，得 $11 = 2+9$.

逐个做下去，可得 $11 = 3+8$，$11 = 4+7$，$11 = 5+6$.

可见共有 4 种不同的写法.

【例 6】　将 12 分拆成三个不同的自然数相加之和，共有多少种不同的分拆方式，请把它们一一列出.

解：可以做如下考虑：若将 12 分拆成三个不同的自然数之和，三个数中最小的数应为 1，其次是 2，那么第三

个数就应是 9 得：$12=1+2+9$.

下面进行变化，如从 9 中取 1 加到 2 上，

又得 $12=1+3+8$.

继续按类似方法变化，可得下列各式：

$12=1+4+7=2+3+7$,

$12=1+5+6=2+4+6$,

$12=3+4+5$.

共有 7 种不同的分拆方式.

【例 7】 将 21 分拆成四个不同的自然数相加之和，但四个自然数只能从 1～9 中选取，问共有多少种不同的分拆方式，请你一一列出.

解：也可以先从最大的数 9 考虑选取，其次选 8，算一算 $21-(9+8)=4$，所以接着只能选 3 和 1. 这样就可以得出第一个分拆式：$21=9+8+3+1$，

以这个分拆式为基础按顺序进行调整，就可以得出所有的不同分拆方式：

$$\left.\begin{aligned}21&=9+8+3+1\\&=9+7+4+1\\&=9+7+3+2\\&=9+6+5+1\\&=9+6+4+2\\&=9+5+4+3\end{aligned}\right\}\text{以 9 开头的分拆方式有 6 种}$$

$$\left.\begin{aligned}21&=8+7+5+1\\&=8+7+4+2\\&=8+6+5+2\\&=8+6+4+3\end{aligned}\right\}\text{以 8 开头的分拆方式有 4 种}$$

$$21=7+6+5+3\}\quad\text{以 7 开头的分拆方式有 1 种}$$

∴　共有 11 种不同的分拆方式.

【例 8】 从 1～12 这十二个自然数中选取,把 26 分拆成四个不同的自然数之和.

解:

$$\left.\begin{aligned}26&=12+11+2+1\\&=12+10+3+1\\&=12+9+4+1\\&=12+9+3+2\\&=12+8+5+1\\&=12+8+4+2\\&=12+7+6+1\\&=12+7+5+2\\&=12+7+4+3\\&=12+6+5+3\end{aligned}\right\}\text{以 12 开头的分拆方式共 10 种}$$

$$\left.\begin{aligned}26&=11+10+4+1\\&=11+10+3+2\\&=11+9+5+1\\&=11+9+4+2\\&=11+8+6+1\\&=11+8+5+2\\&=11+8+4+3\\&=11+7+6+2\\&=11+7+5+3\\&=11+6+5+4\end{aligned}\right\}\text{以 11 开头的分拆方式共 10 种}$$

$$26=\left.\begin{array}{l}10+9+6+1\\=10+9+5+2\\=10+9+4+3\\=10+8+7+1\\=10+8+6+2\\=10+8+5+3\\=10+7+6+3\\=10+7+5+4\end{array}\right\}\text{以 10 开头的分拆方式共 8 种}$$

$$26=\left.\begin{array}{l}9+8+7+2\\=9+8+6+3\\=9+8+5+4\\=9+7+6+4\end{array}\right\}\text{以 9 开头的分拆方式共 4 种}$$

$$26=8+7+6+5\}\ \text{以 8 开头的分拆方式共 1 种}$$

不同的分拆方式总数为：

10＋10＋8＋4＋1＝33 种.

总结：由例 4 明显看出，欲求出所有的不同的分拆方式，必须使分拆过程按一定的顺序进行.

习 题 九

1.把 15 分拆成不大于 9 的两个整数之和，有多少种不同的分拆方式，请一一列出.

2.将 15 分拆成不大于 9 的三个不同的自然数之和有多少种不同分拆方式，请一一列出.

3.将 15 分拆成三个不同的自然数相加之和，共有多少种不同的分拆方式，请一一列出.

4. 将 15 分拆成不大于 9 的四个不同的自然数之和，有多少种不同的分拆方式，请一一列出.

5. 将 15 分拆成四个不同的自然数之和，有多少种不同的分拆方式，请一一列出.

6. 把 15 个玻璃球分成数量不同的 4 堆，共有多少种不同的分法？（此题是美国小学数学奥林匹克试题）.

7. 七只箱子分别放有 1 个、2 个、4 个、8 个、16 个、32 个、64 个苹果. 现在要从这七只箱子里取出 87 个苹果，但每只箱子内的苹果要么全部取走，要么不取，你看怎么取法？

8. 把 100 个馒头分装在七个盒里，要求每个盒里装的馒头的数目都带有 6 字，想想看，应该怎样分？

9. 把 1000 个鸡蛋放到五只筐子里，每只筐子里的鸡蛋数都由数字 8 组成，请你想一想该怎样分？

10. 美国硬币有 1 分、5 分、10 分和 25 分四种. 现有 10 枚硬币价值是 1 元钱，其中有 3 枚 25 分的硬币. 问余下的硬币有哪几种，每种各有多少枚？（此题是美国小学数学奥林匹克试题）.

11. (1,1,8) 是一个和为 10 的三元自然数组. 如果不考虑数字排列的顺序，即把 (1,1,8) 与 (1,8,1) 及 (8,1,1) 看成是相同的三元自然组. 那么和为 10 的自然数组共有多少个？

习题九解答

1.解：共有 2 种不同的分拆方式：

$15=9+6$

$15=8+7$

2.解：共 8 种.

$15=9+5+1$
$\quad=9+4+2$
$15=8+6+1$
$\quad=8+5+2$
$\quad=8+4+3$
$15=7+6+2$
$\quad=7+5+3$
$15=6+5+4$

3.解：共 12 种.

$15=12+2+1$
$15=11+3+1$
$15=10+4+1$
$\quad=10+3+2$
$15=9+5+1$
$\quad=9+4+2$
$15=8+6+1$
$\quad=8+5+2$
$\quad=8+4+3$
$15=7+6+2$
$\quad=7+5+3$
$15=6+5+4$

4.解：共 6 种.

$15=9+3+2+1$
$15=8+4+2+1$
$15=7+5+2+1$
$\quad=7+4+3+1$
$15=6+5+3+1$
$\quad=6+4+3+2$

5.解：同第 4 题答案.

6.解：同第 4 题答案.

7.解：可这样想：总数要 87 个，最先取数最多的一箱 64 个苹果，这样还差 $87-64=23$ 个苹果；再取则不能取装有 32 个苹果的那箱，只能取装有 16 个的那箱，这样还差 $23-16=7$ 个苹果；再取装有 1 个、2 个、4 个的三箱苹果，正好：

$$87=64+16+4+2+1.$$

8.解：从已有经验中可知 $6\times6=36$，这样就可以把每个盒里装 6 个馒头，共装 6 个盒，还有一个盒装 $100-36=64$ 个馒头.64 个这个数，刚好含有数字 6，满足题目要求.

即得 $100=64+6+6+6+6+6+6$.

9.解：仿例 7 解法，得下列分拆式：

$1000=888+88+8+8+8$.

10.解：由于有 3 枚 25 分的硬币，它们的价值是：

$25\times3=75$(分).

所以其余的 7 枚硬币的价值是：

$100-75=25$(分).

将 25 分拆成 7 个数之和，(注意没有各数不同的限制)

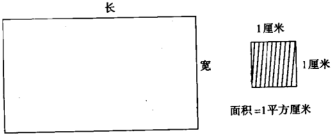
$25=1+1+1+1+1+10+10$.

所以这 7 枚硬币是 5 枚 1 分，2 枚 10 分.

11.解：共 8 个.它们是(1,1,8)，(1,2,7)，(1,3,6)，(1,4,5)，(2,2,6)，(2,3,5)，(2,4,4)，(3,3,4).

第10讲 枚 举 法

【例 1】 如下图所示，已知长方形的周长为 20 厘米，长和宽都是整厘米数，这个长方形有多少种可能形状？哪种形状的长方形面积最大？（边长为 1 厘米的正方形的面积叫做 1 平方厘米）.

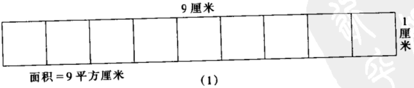


解：由于长方形的周长是 20 厘米，可知它的长与宽之和为 10 厘米. 下面列举出符合这个条件的各种长方形.

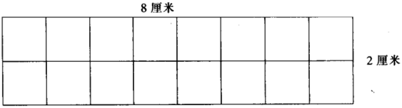
长（厘米）	9	8	7	6	5
宽（厘米）	1	2	3	4	5

（注意，正方形可以说成是长与宽相等的长方形）.

下面把 5 种长方形按实际尺寸大小一一画出来，见下面图(1)～(5).

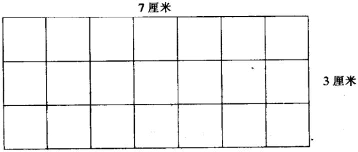


(1)



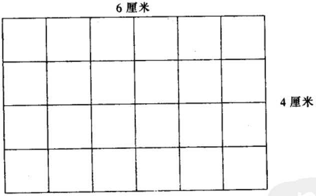
面积＝16 平方厘米

(2)



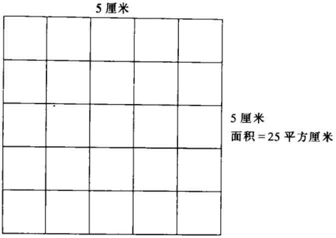
面积＝21 平方厘米

(3)



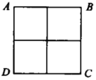
面积＝24 平方厘米

(4)

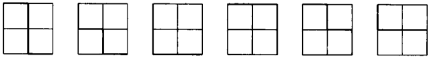


(5)

【例 2】 如右图所示，$ABCD$ 是一个正方形，边长为 2 厘米，沿着图中线段从 A 到 C 的最短长度为 4 厘米. 问这样的最短路线共有多少条？请一一画出来.

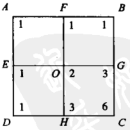


解：将各种路线一一列出，可知共 6 条，见下图.



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)　(6)

注意，如果题中不要求将路径一一画出，可采用如右图所示方法较为便捷. 图中交点处的数字表示到达该点的路线条数，如 O 点处的数字 2，表示由 A 到 O 有 2 条不同的路径，见上图中的(1)和(2)；又 H 点处的数字 3 的意义



也如此，见上图中的(1)、(2)、(3)可知有3条路径可由 A 到 H. 仔细观察，可发现各交点处的数字之间的关系，如 O 点的2等于 F 点和 E 点的数字相加之和，即 $1+1=2$，又如，C 点的6等于 G 点和 H 点的数字相加之和，即 $3+3=6$.

【例3】 在10和31之间有多少个数是3的倍数？

解：由尝试法可求出答案：

$3\times4=12$　$3\times5=15$　$3\times6=18$　$3\times7=21$

$3\times8=24$　$3\times9=27$　$3\times10=30$

可知满足条件的数是12、15、18、21、24、27和30共7个.

注意，倘若问10和1000之间有多少个数是3的倍数，则用上述一一列举的方法就显得太繁琐了，此时可采用下述方法：

$10\div3=3$ 余1，可知10以内有3个数是3的倍数；

$1000\div3=333$ 余1，可知1000以内有333个数是3的倍数；

$333-3=330$，则知10～1000之内有330个数是3的倍数.

由上述这些例题可体会枚举法的优点和缺点及其适用范围.

【例4】 两个整数之积为144，差为10，求这两个数？

解：列出两个数积为144的各种情况，再寻找满足题目条件的一对出来：

1	2	3	4	6	8	9	12
144	72	48	36	24	18	16	12

可见其中差是10的两个数是8和18，这一对数即为所求.

【例5】 12枚硬币的总值是1元，其中只有5分和1角的两种，问每种硬币各多少个？

解：列举出两种硬币的可能搭配：

5分币	1	2	3	4	5	6
1角币	11	10	9	8	7	6
总钱数	1元1角5分	1元1角	1元5分	1元	9角5分	9角

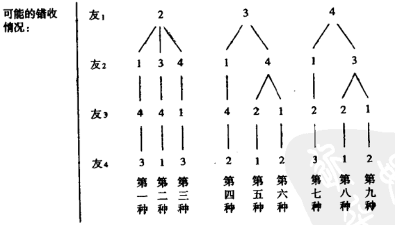
可见满足题目要求的搭配是：四个5分币，八个1角币．

【例6】 小虎给4个小朋友写信．由于粗心，在把信纸装入信封时都给装错了．4个好朋友收到的都是给别人的信．问小虎装错的情况共有多少种可能？

解：把4封信编号：1，2，3，4．

把小朋友编号，友$_1$，友$_2$，友$_3$，友$_4$．

并假定1号信是给友$_1$写的，2号信是给友$_2$写的，3号信是给友$_3$的，4号信是给友$_4$写的：再把各种可能的错装情况列成下表：



所以，共有9种可能.

说明：如第一种错收情况是友$_1$得2号信，友$_2$得了1号信，友$_3$得了4号信，友$_4$得了3号信.

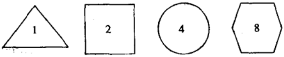
习 题 十

1.一个长方形的周长是22米，如果它的长和宽都是整米数，问：

①这个长方形的面积有多少可能值？

②面积最大的长方形的长和宽是多少？

2.有四种不同面值的硬币各一枚，它们的形状也不相同，用它们共能组成多少种不同钱数？



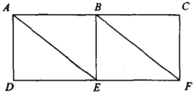
3.三个自然数的乘积是24，问由这样的三个数所组成的数组有多少个？如(1,2,12)就是其中的一个，而且要注意数组中数字相同但顺序不同的算作同一数组，如(1,2,12)和(2,12,1)是同一数组.

4.小虎给3个小朋友写信，由于粗心，把信装入信封时都给装错了，结果3个小朋友收到的都不是给自己的信，请问小虎错装的情况共有多少种可能？

5.一个学生假期往A、B、C三个城市游览.他今天在这个城市，明天就到另一个城市.假如他第一天在A市，第五天又回到A市.问他的游览路线共有几种不同的方案？

6.下图中有6个点，9条线段，一只甲虫从A点出发，

要沿着某几条线段爬到 F 点.行进中甲虫只能向右、向下或向右下方运动.问这只甲虫有多少种不同的走法？



7.小明有一套黄色数字卡片$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$，有一套蓝色数字卡片$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$.一天他偶然用卡片做了下面的游戏：把不同色的卡片交叉配对，一次配成 3 对，然后把每对卡片上的黄蓝数字相乘之后再相加求和，你知道他共找到了多少种配对相乘求和的方式吗？比如说下面是其中一种：

黄　蓝　黄　蓝　黄　蓝

$\boxed{1}\times\boxed{2}+\boxed{2}\times\boxed{3}+\boxed{3}\times\boxed{1}=11.$

8.五个学生友$_1$，友$_2$，友$_3$，友$_4$，友$_5$ 一同去游玩，他们将各自的书包放在了一处.分手时友$_1$ 带头开了个玩笑，他把友$_2$ 小朋友的书包拿走了，后来其他的小朋友也都拿了别人的书包.试问在这次玩笑中故意错拿书包的情形有多少种不同方式？

习题十解答

1.解：这个长方形的长和宽之和是 $22\div2=11$（米），由长方形的面积＝长×宽，可知：

长(米)	10	9	8	7	6
宽(米)	1	2	3	4	5
面积(平方米)	10	18	24	28	30

由上表可见面积最大的长方形的长是 6 米、宽是 5 米，面积是 30 平方米.

猜想：由本讲的例 1 和习题 1 这两题来看，周长一定的所有长方形中，长和宽相等或相近那个长方形面积最大. 这是有名的“等周问题”的特例.

2. 解：把各种不同的组合及其对应的钱数列表枚举如下：

枚数	钱数
1 枚	(1)　(2)　(4)　(8) 1,　2,　4,　8.
2 枚	(1+2),(1+4),(1+8),(2+4),(2+8),(4+8) 3　5　9　6　10　12
3 枚	(1+2+4),(1+2+8),(1+4+8),(2+4+8) 7　11　13　14
4 枚	(1+2+4+8) 15

数一数可知，能组成 15 种不同的钱数. 注意它们是从 1 到 15 的 15 个自然数：1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15.

3. 解：不计数组中数的顺序，所有乘积为 24 的三个数所组成的数组共有 6 组，枚举如下：

(1, 1, 24), (1, 2, 12), (1, 3, 8),

(1, 4, 6), (2, 2, 6), (2, 3, 4).

4. 解：把三封信编号为 1 号、2 号、3 号；

把三个小朋友编号为友$_1$、友$_2$、友$_3$；1 号、2 号、3 号信应该分别发给友$_1$、友$_2$、友$_3$.

按题意，友$_1$没有收到给自己的 1 号信，他只可能收到 2 号或 3 号信.

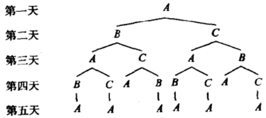
当友$_1$收到 2 号信时，友$_2$只可能收到 3 号信，则友$_3$收到 1 号信；

当友$_1$收到 3 号信时，友$_2$只可能收到 1 号信，则友$_3$收到 2 号信.

可见共有 2 种可能的错装情况，列表更为清楚.

可能情况	第一种	第二种
友$_1$	2	3
友$_2$	3	1
友$_3$	1	2

5. 解：请看下面的树形图.



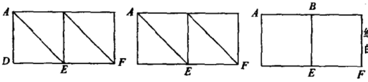
可见他第五天回到 A 市的不同游览路线共有 6 种，分别是：

①$A\to B\to A\to B\to A$　　④$A\to C\to A\to B\to A$

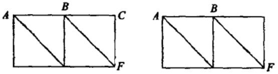
②$A\to B\to A\to C\to A$　　⑤$A\to C\to A\to C\to A$

③$A\to B\to C\to B\to A$　　⑥$A\to C\to B\to C\to A$.

6. 解：经过 E 点的有 3 条路线，不经过 E 点的有 2 条路线，共有 5 条不同的路线，见下图.



经过E点的有3条



不经过E点的有2条

7.解：可以按下面的方法找出所有不同的配对相乘求和方式：

① $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$　$1\times1+2\times2+3\times3=1+4+9=14$

② $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$　$1\times1+2\times3+3\times2=1+6+6=13$

③ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$　$1\times2+2\times1+3\times3=2+2+9=13$

④ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$　$1\times2+2\times3+3\times1=2+6+3=11$

⑤ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$　$1\times3+2\times1+3\times2=3+2+6=11$

⑥ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$　$1\times3+2\times2+3\times1=3+4+3=10$

可见共有6种不同的配对相乘求和方式，其中第①种情况(可叫做同序配对)各乘积之和最大，第⑥种情况(可叫做逆序配对)各乘积之和最小.

如果你感兴趣，可以进一步问，这个结果有普遍性吗？我们再进一步探讨一下：

1.假设黄卡片只有$\boxed{1}$和$\boxed{2}$两张，蓝卡片也是两张$\boxed{1}$和$\boxed{2}$，显然只有两种配对情况：

①同序配对：$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $1\times1+2\times2=5$，

②逆序配对：$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $1\times2+2\times1=4$.

结果和上述相同.

2.假如黄蓝卡片各有 4 张，不同的配对方式有很多.

（$4\times3\times2\times1=24$ 种，这点同学们以后就会明白！）

我们找几种情况试一试：

①同序配对：

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ $1\times1+2\times2+3\times3+4\times4=30$，

②逆序配对

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $1\times4+2\times3+3\times2+4\times1=20$，

③交叉配对

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $1\times4+2\times1+3\times2+4\times3=24$，

交叉配对

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $1\times3+2\times4+3\times2+4\times1=21$，

交叉配对

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $1\times2+2\times4+3\times1+4\times3=25$.

可见：同序配对，各乘积之和最大：30

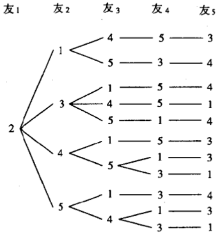
逆序配对，各乘积之和最小：20

交叉配对，各乘积之和居中：大于 20 小于 30.

猜想：两个项数相同的数列配对相乘积之和，同序配对时最大，逆序配对时最小，交叉配对时在最小值和最大

值之间.

8.解：设友$_1$、友$_2$、友$_3$、友$_4$、友$_5$ 的书包分别是1号、2号、3号、4号、5号.因为友$_1$ 拿了2号书包，那么友$_2$ 就有拿1号、3号、4号和5号书包的四种可能.如果友$_2$ 拿了1号书包，友$_3$ 拿了4号书包，友$_4$ 拿了5号书包，友$_5$ 拿了3号书包，这就是一种错拿方式.其他方式看如下的树形图.



数一数，共有11种不同的错拿方式.

第11讲 找规律法

观察、搜集已知事实，从中发现具有规律性的线索，用以探索未知事件的奥秘，是人类智力活动的主要内容.

数学上有很多材料可用以来模拟这种活动、培养学生这方面的能力.

【例1】 观察数列的前面几项，找出规律，写出该数列的第100项来？

12345，23451，34512，45123，…

解：为了寻找规律，再多写出几项出来，并给以编号：

1	2	3	4	5	6
12345，	23451，	34512，	45123，	51234，	12345，
7	8	9	10	11	12
23451，	34512，	45123，	51234，	12345，	23451，

仔细观察，可发现该数列的第6项同第1项，第7项同第2项，第8项同第3项，…也就是说该数列各项的出现具有周期性，他们是循环出现的，一个循环节包含5项.

$100 \div 5 = 20$.

可见第100项与第5项、第10项一样(项数都能被5整除)，即第100项是51234.

【例2】 把写上1到100这100个号码的牌子，像下面那样依次分发给四个人，你知道第73号牌子会落到谁的手里？

小明	小英	小方	小军
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	…	

解：仔细观察，你会发现：

分给小明的牌子号码是1，5，9，13，…，号码除以4余1；

分给小英的牌子号码是2，6，10，14，…，号码除以4余2；

分给小方的牌子号码是3，7，11，…，号码除以4余3；

分给小军的牌子号码是4，8，12，…，号码除以4余0（整除）.

因此，试用4除73看看余几？

$73\div4=18\cdots$余1

可见73号牌会落到小明的手里.

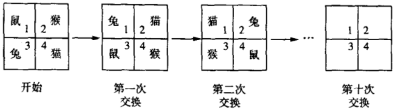
这就是运用了如下的规律：

$\boxed{\text{号码除以 4}}$

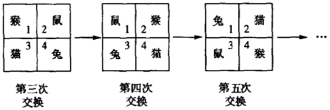
小明	小英	小方	小军
余1	余2	余3	余4

用这种规律预测第几号牌子发给谁，是很容易的，请同学们自己再试一试.

【例3】 四个小动物换位，开始小鼠、小猴、小兔和小猫分别坐在1、2、3、4号位子上（如下图所示）.第一次它们上下两排换位，第二次左右换位，第三次又上下交换，第四次左右交换.这样一直交换下去，问十次换位后，小兔坐在第几号座位上？



解：为了能找出变化规律，再接着写出几次换位情况，见下图．



盯住小兔的位置进行观察：

第一次换位后，它到了第 1 号位；

第二次换位后，它到了第 2 号位；

第三次换位后，它到了第 4 号位；

第四次换位后，它到了第 3 号位；

第五次换位后，它又到了第 1 号位；

…

可以发现，每经过四次换位后，小兔又回到了原来的位置，利用这个规律以及 $10\div4=2\cdots$余 2，可知：

第十次换位后，小兔的座位同第二次换位后的位置一样，即在第二号位．

如果再仔细地把换位图连续起来研究研究，可以发现，随着一次次地交换，

小兔的座位按顺时针旋转，

小鼠的座位按逆时针旋转，

小猴的座位按顺时针旋转，

小猫的座位按逆时针旋转，

按这个规律也可以预测任何小动物在交换几次后的座位.

【例 4】　从 1 开始，每隔两个数写出一个数，得到一列数，求这列数的第 100 个数是多少？

1，4，7，10，13，…

解：不难看出，这是一个等差数列，它的后一项都比相邻的前一项大 3，即公差＝3，还可以发现：

第 2 项等于第 1 项加 1 个公差即

$4=1+1\times3.$

第 3 项等于第 1 项加 2 个公差即

$7=1+2\times3.$

第 4 项等于第 1 项加 3 个公差即

$10=1+3\times3.$

第 5 项等于第 1 项加 4 个公差即

$13=1+4\times3.$

…

可见第 n 项等于第 1 项加 $(n-1)$ 个公差，即

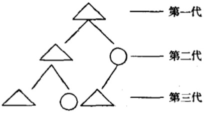
$\boxed{第\ n\ 项=第\ 1\ 项+(n-1)\times公差}$

按这个规律，可求出：

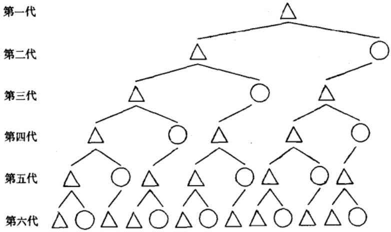
第 100 项 $=1+(100-1)\times3=1+99\times3=298.$

【例 5】　画图游戏先画第一代，一个△，再画第二代，在△下面画出两条线段，在一条线段的末端又画一个△，在另一条的末端画一个○；画第三代，在第二代的△下面又画出两条线段，一条末端画△，另一条末端画○；而在第二代的○的下面画一条线，线的末端再画一个△；…一直

照此画下去(见下图)，问第十次的△和○共有多少个？



解：按着画图规则继续画出几代，以便于观察，以期从中找出图形的生成规律，见下图.



数一数，各代的图形(包括△和○)的个数列成下表：

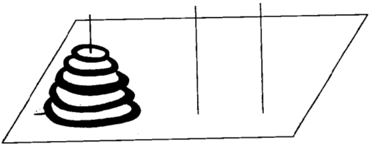
第几代	一	二	三	四	五	六	…
图形个数	1	2	3	5	8	13	…

可以发现各代图形个数组成一个数列，这个数列的生成规律是，从第三项起每一项都是前面两项之和. 按此规律接着把数列写下去，可得出第十代的△和○共有89个（见下表）：

第几项	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	…
图形个数	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…

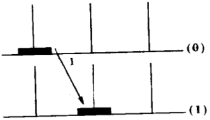
这就是著名的裴波那契数列.裴波那契是意大利的数学家,他生活在距今大约七百多年以前的时代.

【例 6】 如下图所示,5 个大小不等的中心有孔的圆盘,按大的在下、小的在上的次序套在木桩上构成了一座圆盘塔.现在要把这座圆盘塔移到另一个木桩上.规定移动时要遵守一个条件,每搬一次只许拿一个圆盘而且任何时候大圆盘都不能压住小圆盘.假如还有第三个木桩可作临时存放圆盘之用.问把这 5 个圆盘全部移到另一个木桩上至少需要搬动多少次?(下图所示)

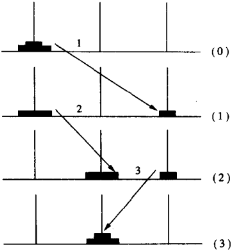


解:先从最简单情形试起.

①当仅有一个圆盘时,显然只需搬动一次(见下图).



②当有两个圆盘时，只需搬动 3 次（见下图）.



③当有三个圆盘时，需要搬动 7 次（见下页图）.

总结，找规律：

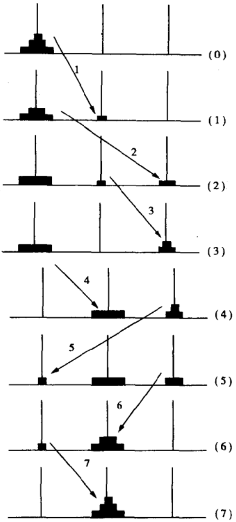
①当仅有一个圆盘时，只需搬 1 次.

②当有两个圆盘，上面的小圆盘先要搬到临时桩上，等大圆盘搬到中间桩后，小圆盘还得再搬回来到大圆盘上．所以小的要搬两次，下面的大盘要搬 1 次．这样搬到两个圆盘需 3 次.

③当有三个圆盘时，必须先要把上面的两个小的圆盘搬到临时桩上，见上图中的（1）～（3）．由前面可知，这需要搬动 3 次．然后把最下层的最大圆盘搬一次到中间桩上，见图（4），之后再把上面的两个搬到中间桩上，这又需搬 3 次，见图中（5）～（7）.

所以共搬动 $2\times3+1=7$ 次.

④推论，当有 4 个圆盘时，就需要先把上面的 3 个圆盘搬到临时桩上，需要 7 次，然后把下面的大圆盘搬



到中间桩上（1 次），之后再把临时桩上的 3 个圆盘搬到中间桩上，这又需要 7 次，所以共需搬动 $2\times7+1=15$ 次.

⑤可见当有 5 个圆盘时，要把它按规定搬到中间桩上去共需要：

$$2\times15+1=31 \text{ 次}.$$

这样也可以写出一个一般的公式(叫递推公式)

$$\boxed{2\times\text{前一种情况的搬动次数}+1=\text{后一种情况的搬动次数}}$$

对于有更多圆盘的情况可由这个公式算出来.

圆盘个数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
搬动次数	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	…

进一步进行考察,并联想到另一个数列:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

若把 n 个圆盘搬动的次数写成 a_n,把两个表对照后,

可得出 $\boxed{a_n=2^n-1}$

有了这个公式后直接把圆盘数代入计算就行了,不必再像前一个公式那样进行递推了.

习题十一

1.先计算下面的前几个算式,找出规律,再继续往下写出一些算式:

①$1\times9+2=$　　　②$9\times9+7=$

$12\times9+3=$　　　$98\times9+6=$

$123\times9+4=$　　　$987\times9+5=$

$1234\times9+5=$　　　$9876\times9+4=$

…　　　…

2.先计算下面的奇妙算式,找出规律,再继续写出一些算式:

$$19+9\times 9=$$
$$118+98\times 9=$$
$$1117+987\times 9=$$
$$11116+9876\times 9=$$
$$111115+98765\times 9=$$
$$\cdots$$

3. 先计算下面的前几个算式，找出规律，再继续写出一些算式：

$$1\times 1=$$
$$11\times 11=$$
$$111\times 111=$$
$$1111\times 1111=$$
$$11111\times 11111=$$
$$\cdots$$

4. 有一列数是 2、9、8、2、…，从第三个数起，每一个数都是它前面的两个数相乘积的个位数字（比如第三个数 8 就是 $2\times 9=18$ 的个位数字）. 问这一列数的第 100 个数是几？

5. 如果全体自然数按下表进行排列，那么数 1000 应在哪个字母下面？

A	B	C	D	E	F	G
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	…			
…						

6. 如果自然数如下图所示排成四列，问 101 在哪个字母下面？

A	B	C	D
1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
17	18	…	
…			

7. 3×3 的末位数字是 9，$3\times3\times3$ 的末位数是 7，$3\times3\times3\times3$ 的末位数字是 1. 求 35 个 3 相乘的结果的末位数字是几？

习题十一解答

1. ①$1\times9+2=11$

$12\times9+3=111$

$123\times9+4=1111$

$1234\times9+5=11111$

$12345\times9+6=111111$

$123456\times9+7=1111111$

$1234567\times9+8=11111111$

$12345678\times9+9=111111111$.

②$9\times9+7=88$

$98\times9+6=888$

$987\times9+5=8888$

$9876\times9+4=88888$

$98765\times9+3=888888$

$987654\times9+2=8888888$

$9876543\times9+1=88888888$.

2. $19+9\times9=100$

$118+98\times9=1000$

$1117+987\times9=10000$

$11116+9876\times9=100000$

$111115+98765\times9=1000000$

$1111114+987654\times9=10000000$

$11111113+9876543\times9=100000000$

$111111112+98765432\times9=1000000000$

$1111111111+987654321\times9=10000000000.$

3.

$$1\times1=1$$
$$11\times11=121$$
$$111\times111=12321$$
$$1111\times1111=1234321$$
$$11111\times11111=123454321$$
$$111111\times111111=12345654321$$
$$1111111\times1111111=1234567654321$$
$$11111111\times11111111=123456787654321$$
$$111111111\times111111111=12345678987654321$$

4.解：按数列的生成规律再多写出一些数来，再仔细观察，找出规律：

2、9、8、2、6、2、2、4、8、2、6、2、2、4、8、2、6、2、2、4、…

可见，除最前面的两个数 2 和 9 以外，8、2、6、2、2、4 这六个数依次重复出现．因此，可利用这个规律，按下面的方法找出第 100 个数出来：

$100-2=98$,

$98\div6=16\cdots2$.

即第 100 个数与这六个数的第 2 个数相同，即第 100 个数是 2.

5. 解：不难发现，每个字母下面的数除以 7 的余数都是相同的. 如第 1 列的三个数 1、8 和 15，除以 7 时的余数都是 1；第 2 列的三个数 2、9 和 16，除以 7 时的余数都是 2；第 3 列的三个数 3、10 和 17，除以 7 的余数都是 3；…. 利用这个规律，可求出第 1000 个自然数在哪个字母下面：

$1000\div7=142\cdots6$

所以 1000 在字母 F 的下面.

6. 解：可以这样找出排列的规律性：全体自然数依次循环排列在 A、B、C、D、D、C、B、A 八个字母的下面，即

A	B	C	D	D	C	B	A
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	…					
…							

依上题解题方法：

$101\div8=12\cdots5$.

可知 101 与 5 均排在同一字母下面，即在 D 的下面.

7. 解：从简单情况做起，列表找规律：

相乘的 3 的个数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
乘积的末位数字	9	7	1	3	9	7	1	3	9	7	1	…

仔细观察可发现，乘积的末位数字的出现有周期性的规律：看相乘的3的个数除以4的余数，

余1时，积的末位数字是3，

余2时，积的末位数字是9，

余3时，积的末位数字是7，

整除时，积的末位数字是1，

$35\div4=8\cdots3$

所以这个积的末位数字是7.

第12讲　逆序推理法

逆序推理法，也叫逆推法或倒推法．简单说，就是调过头来往回想．

【例 1】 老师心中想了一个数，对他的学生说：“给这个数加上 9，再取和的一半应是 5.”他叫学生们把这个数算出来．你会算吗？

解：用逆推法求解，就是这样想：因为老师想的数加上 9 后之和的一半是 5，那么和就应是 $5\times2=10$；再往前逆推，在没有加上 9 之前应是 $10-9=1$，这就是老师心中想的数．

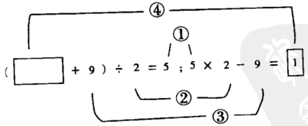
让我们再从另一种思路去想：

首先，把老师想的数用$\square$代表，顺着题意列式应有：

$(\square+9)\div2=5$，我们可以叫它做顺序式．

然后，再把前面的逆推过程写成算式，就应有：

$5\times2-9=\boxed{1}$，“1”就是方框所代表的数，所以把它写在方框里．我们可以把这个算式叫做逆序式．把两式进行对照比较（如下图如示）可见：



①顺序的运算结果(或最后结论)是逆序式的已知数据(或起始条件);

②顺序式中除以 2 变为逆序式中乘以 2;

③顺序式中加上 9 变为逆序式中减去 9;

④顺序式中起始未知数变为逆序式中最后运算结果;

总之,逆序式恰为顺序式的逆运算.

这就是逆推法的由来和实质.

【例 2】 某数加上 6,乘以 6,减去 6,除以 6,最后结果等于 6. 问这个数是几?

解:依题意,写出顺序式,再接着写出逆序式,

〔(某数 + 6) × 6 − 6〕÷ 6 = 6…顺序式

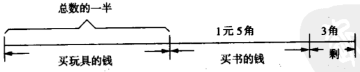
(6 × 6 + 6) ÷ 6 − 6 = 某数…逆序式

经计算可知“某数” = 1.

【例 3】 小勇拿了妈妈给的零花钱去买东西. 他先用这些钱的一半买了玩具,之后又买了 1 元 5 角钱的小人书,最后还剩下 3 角钱. 你知道妈妈给小勇多少钱吗?

解:可以这样倒着想:小勇最后剩下 3 角钱,在买书之前的钱应是 3 角 + 1 元 5 角 = 1 元 8 角. 这个数目是他买玩具后剩下的,买玩具前的钱数应当是:1 元 8 角 × 2 = 3 元 6 角. 这就是妈妈给他的钱数.

若画出下面的图就更清楚了.



【例 4】 小亮拿着 1 包糖,遇见好朋友 A,分给了他一半;过一会又遇见好朋友 B,把剩下的糖的一半分给了他;

后来又遇到了好朋友 C,把这时手中所剩下的糖的一半又分给了 C,这时他自己手里只有一块了．问在没有分给 A 以前,小亮那包糖有几块?

解:采用逆推法——从最后结果往前倒着推算．小亮最后手里只剩下一块糖,这是分给 C 一半后所剩的数,则知遇见 C 之前小亮有糖:

$1\times2=2$(块).

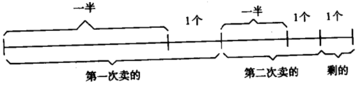
同理,遇到 B 之前有糖: $2\times2=4$(块).

遇到 A 之前有糖: $4\times2=8$(块).

即小亮未给小朋友前,那包糖应有 8 块．

【例 5】 农妇卖蛋,第一次卖掉篮中的一半又 1 个,第二次又卖掉剩下的一半又 1 个,这时篮中还剩 1 个．问原来篮中有蛋几个?

解:



逆推:篮中最后(即第二次卖后)剩 1 个;

第二次卖前篮中有$(1+1)\times2=4$ 个;

第一次卖前篮中有$(4+1)\times2=10$ 个;

即篮中有 10 个蛋．

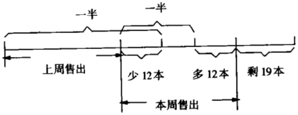
【例 6】 某池中的睡莲所遮盖的面积,每天扩大 1 倍,20 天恰好遮住整个水池,问若只遮住水池的一半需要多少天?

解:倒着想．若是今天睡莲把整个池面遮满了,那么

昨天睡莲只遮住了水面的一半．今天是第 20 天，昨天就是第 19 天，也就是说睡莲遮住一半池面需 19 天．

【例 7】 文化用品店新到一批日记本，上一周售出本数比总数的一半少 12 本；这一周售出的本数比所剩的一半多 12 本；结果还有 19 本．问这批日记本有多少？

解：



由图上可见

本周未售出时的一半是：

$19+12=31$（本）；

本周未售出时的总数是：

$31\times2=62$（本）；

总数的一半是：

$62-12=50$（本）；

总本数是：

$50\times2=100$（本）．

列出综合算式：

$[(19+12)\times2-12]\times2=100$（本）．

答：这批日记本共有 100 本．

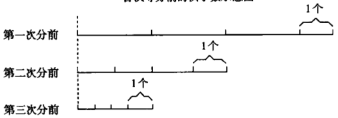
【例 8】 现有一堆棋子，把它分成三等份后还剩一颗；取出其中的两份又分成三等份后还剩一颗；再取出其中的两份再分成三等份后还剩一颗．问原来至少有多少颗棋

子？

解：题中有“至少”这一条．

用逆推法从最后的最少棋子情况逆推．先画线段图依次表示分棋子的过程，见下图：

各次等分前的棋子数示意图



假设第三次分时，三等份中每分是 1 个棋子(最少)，

则此次分前应是 $3+1=4$ 个；$4\div 2=2$，则第二次分前应是 $2\times 3+1=7$ 个，注意 7 是奇数(第二次分前的棋子是第一次分后的两份，应是偶数所以不应是 7，可见前面假设不对)．

再假设第三次分时每等份是 2 个棋子，也不行．

又假设第三次分时每等份是 3 个棋子，则有

$3\times 3+1=10$；

$10\div 2=5$，　　$5\times 3+1=16$；

$16\div 2=8$，　　$8\times 3+1=25$；

∴　原来有棋子至少是 25 个．

习题十二

1．一个数加上 8，乘以 8，减去 8，除以 8，结果还是 8，求这个数？

2．一个数加上 100，乘以 100，减去 100，除以 100，结

果还是 100,求这个数.

3. 某个数加上 2,减去 3,乘以 4,除以 5,结果等于 12,这个数是几?

4. 有一次小云去买玩具,他买了一架小飞机用去了他带去的钱的一半;之后他又用 2 元钱买了一个小汽车,最后还剩下 5 角钱.问小云最初带了多少钱?

5. 妈妈给小华买了一袋糖,小华决定把糖分给大家吃.第一个看见了妹妹,就把糖的一半分给了妹妹;第二个看见了哥哥,又把剩下的糖的一半分给了哥哥,这时他自己还剩 4 块糖.请问,妈妈给小华的这袋糖共有多少块?

6. 一个农妇卖鸡蛋,第一次卖了篮中的一半又半个,第二次又卖了剩下鸡蛋的一半又半个,这时篮中还剩一个鸡蛋.问篮中原来有几个鸡蛋?

7. 三棵树上共有麻雀 60 只.如果从第一棵树上飞 4 只到第二棵树上去,又从第二棵树上飞 7 只到第三棵树上去,那么三棵树上的麻雀都是 20 只.问原来每棵树上各有几只?

8. 一条小虫,身长每天增大一倍,10 天长到 20 厘米.问它从开始长到 5 厘米时是第几天?

9. 甲、乙、丙三人共有 750 元钱.如果乙向甲借 30 元,又借给丙 50 元,结果三人所持有的钱相等.问甲、乙、丙三人原来各有多少元钱?

10. 小明有几本小人书已记不清楚了,只知道:

小芳借走一半加 1 本;小容又借走剩下的书的一半加 2 本;再剩下的书,小军借走一半加 3 本,最后小明还有 2 本书.请问小明原有几本小人书?

习题十二解答

1．解：逆推．从最后结果 8 开始：

不除以 8 时，应是 $8\times8=64$；

不减去 8 时，应是 $64+8=72$；

不乘以 8 时，应是 $72\div8=9$；

不加上 8 时，应是 $9-8=1$；

所以，可知此数为 1．

2．解：先写出顺序式．设此数为 x，依题意：

$[(x+100)\times100-100]\div100=100$，

据此写出逆序式，再进行计算：

$(100\times100+100)\div100-100=x$．

所以 $x=(100\times100+100)\div100-100$

$=10100\div100-100$

$=101-100$

$=1$．

总结：由习题 1 和 2 以及前面例题 2，答案都是 1．这难道是偶然的吗？还是其中必有原因？

假设“某数”是 1，加上 a，乘以 a，减去 a，除以 a，其结果仍为 a．

其中 a 为任何自然数，比如 $a=6,8,100$，都可以．

因为 $[(1+a)\times a-a]\div a$

$=[a\times(1+a-1)]\div a$

$=a\times a\div a$

$=a$

3．解：先写出顺序式．设此数为 x，则有：

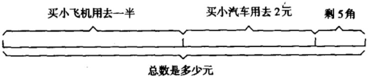
$(x+2-3)\times 4\div 5=12$,

再写出逆序式：

$12\times 5\div 4+3-2=x$,

所以 $x=16$.

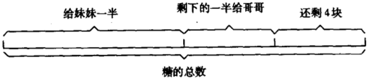
4. 解：画出示意图：



逆推列综合算式：

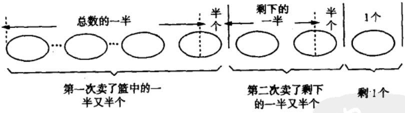
(5 角 + 2 元) × 2 = 5 元 .

5. 解：画出示意图：



逆推：$4\times 2\times 2=16$ 块 .

6. 解：篮中原来共有 7 个鸡蛋 . 见下图 .



从图中可见，剩下的 1 个加上半个即 1 个半鸡蛋就是第一次卖后所剩的一半，所以第二次未卖之前篮中有 3 个鸡蛋。这 3 个鸡蛋加上半个即 3 个半鸡蛋是总数的一半，

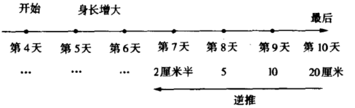
因此篮中鸡蛋总数是 7 个．

7．解：逆推．最后每棵树上的麻雀都是 20 只．

	第一棵	第二棵	第三棵
最后	20	20	20
逆推		+7	−7
	+4	−4	
最初	24	23	13

∴　最初三棵树上分别有 24，23，13 只麻雀．

8．解：见下图逆推：



可见小虫从开始长到第 8 天时，身长是 5 厘米．

9．解：三人钱数相等时，各有钱数为：

750÷3＝250(元)，

若甲未借出，则有

250 元＋30 元＝280 元；

若乙未向甲借，也未借给丙，则有

250－30＋50＝270(元)；

若丙未借乙的钱，则原有

250－50＝200 元；

即甲、乙、丙原有钱数分别为 280 元、270 元、200 元．

10．解：逆推：

小军借走书之前，小明的书是：

$(2+3)\times 2=10$(本).

小容借走书之前,小明的书是:

$(10+2)\times 2=24$(本).

小芳借走书之前,小明的书是:

$(24+1)\times 2=50$(本)(原有书的本数).

列成综合算式是:

$\{[(2+3)\times 2+2]\times 2+1\}\times 2=50$(本).

答:小明原有 50 本书.

第13讲　画图显示法

在有些数学题中，数量之间的关系不容易看出来；可是只要画个图就能显示清楚了．同学们要学会这种画图方法．

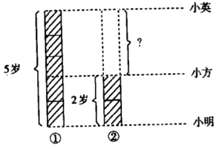
【例1】　小明比小英小5岁，小方比小明大2岁．那么小英和小方差几岁？

解：先画个图看看：

①表示小明比小英小5岁，

②表示小方比小明大2岁，

由图可见，小英比小方大3岁．



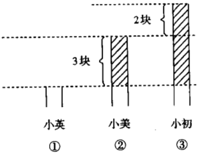
注意：画这个图时，由题意应以小明为基准．

【例2】　小初、小美、小英三个人分糖块．小美比小英多3块，小初比小美多2块．已知糖块总数是50块，那么每人各分到多少块？

解：依题意画图，可以先画小英，见下图中①，再画小美，它比小英多3块，见下图中②，接着再画小初，它又比

小美多 2 块，见下图中③，

至此，图已画完，下面借助此图进行分析推理.



由图可见，小初比小英多 $3+2=5$ 块，

由图还可以看出，$50-(3+5)=42$(块)就是小英糖数的 3 倍，所以小英的一份是：

$42\div3=14$(块)；

由此可求出小美的一份是 $14+3=17$(块)；

小初的一份是 $17+2=19$(块).

【例 3】　小健到商店去买练习本，他的钱若买 4 本还剩 2 分；若买 5 本，就差 1 角. 问小健有多少钱？

解：依题意画出右图，由图易见一本的价钱是：

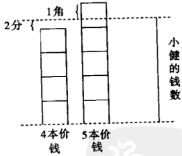
$2+10=12$(分)，

所以小健有的钱是

$12\times4+2=50$(分)

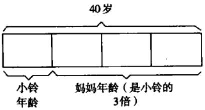
或 $12\times5-10=50$(分)，

即 5 角.



【例 4】　妈妈的年龄是小铃的 3 倍，两个人年龄加起来是 40 岁. 问小铃和妈妈各多少岁？

解：依题画下图：



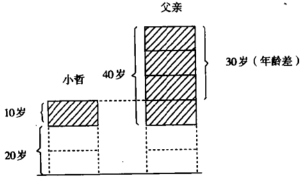
由上图可见，40 岁是小铃年龄的 $3+1=4$ 倍，

所以小铃的年龄是：$40\div4=10$（岁）；

而妈妈的年龄则是：$10\times3=30$（岁）.

【例 5】 父亲今年 40 岁，小哲 10 岁.问几年以后父亲年龄是小哲年龄的 2 倍？

解：按题意画下图：



先画阴影部分，小哲（10 岁）占 1 格，父亲（40 岁）占 4 格，年龄差（$40-10=30$（岁））是 3 格，再画图表示二人年龄的增长，注意应从上往下画.不难得出当二人年龄各增加 2 格时，即 20 年后（父亲是 6 格，小哲是 3 格）父亲年龄是小哲年龄的 2 倍.

习题十三

1. 王强和李明都想买一本《趣味数学》，但王强的钱少 2 角 5 分，李明的钱少 3 角 1 分. 如果两个人的钱合在一起就刚够买这本书. 问一本《趣味数学》多少钱？王强和李明各有多少钱？

2. 大、小二数之和为 10，之差为 2，求大、小二数各多少？

3. 小军、小方和小雄共有 12 本小人书，小军比小方多 2 本，小方比小雄多 2 本，问他们三人各几本？

4. 今年弟弟 8 岁，哥哥 14 岁. 问当两人的年龄和是 30 岁时，两人各几岁？

5. 两个桶里共盛水 30 斤. 如果把第一个桶里的水倒 3 斤给第二个桶里，两个桶里的水就一样多了. 问每个桶里各有多少斤水？

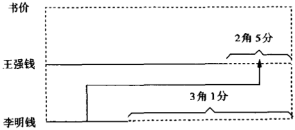
6. 玻璃瓶里装着一些水，把水加到原来的 2 倍时，称得重为 5 千克；把水加到原来的 4 倍时，再称一称重为 9 千克，问原来水有多少千克？

7. 一筐鲜鱼，连筐共重 56 千克. 先卖出鲜鱼的一半，再卖出剩下的一半，这时连筐还重 17 千克. 原来这筐鲜鱼重多少千克？

8. 小秋用一根绳子测量一口枯井的深. 他把绳子放入井里，当绳子到达井底后，井外还留有 15 米；小秋又把这根绳子对折后再放入井里，井外还留有 1 米. 请问，这口枯井有多少米深？

习题十三解答

1.解：画个图用实线段表示二人有的钱，虚线表示缺的钱.



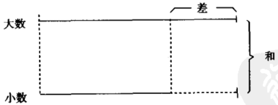
依题意，“两人钱合在一起，刚好买这本书”.

就是说，如图所示，实线段（表示李明的钱）按图线可以向上移到短的虚线处（表示王强缺的钱）接起来刚好等书价.也就是说一本书的书价是：

2角5分+3角1分=5角6分.

王强有3角1分，李明有2角5分.

2.解：画线段图用长线段表示大数，用短线段表示小数，用差线段表示两数之差，见图：



由图显见，若在虚线处再加上一段“差线段”，那就显然得到了两条等长的长线段.这就表示，和加差等于两个

大数，

即（和＋差）÷2＝大数.

反之，如果去掉那段“差线段”，则得到两条等长的短线段. 这就表示，和减差等于两个小数，

即（和－差）÷2＝小数.

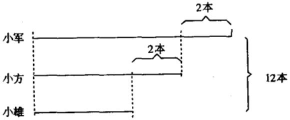
注意，此题就叫“和差问题”，以上两式就叫和差问题公式.

把题给的具体数值代入这两个公式，可得：

大数＝(10＋2)÷2＝6，

小数＝(10－2)÷2＝4.

3. 解：画线段图如下：



与上题类比，采用添加差线段的方法可得：

(12＋2×3)÷3＝6(本)（小军）；

6－2＝4(本)（小方）；

4－2＝2(本)（小雄）；

同样也可采用去掉差线段的方法得：

(12－2×3)÷3＝2(本)（小雄）；

2＋2＝4(本)（小方）；

4＋2＝6(本)（小军）.

4. 解：此题叫年龄问题，它的特点是年龄差保持不变. 此题可归纳为和差问题：哥弟年龄之差为 14－8＝6(岁)，和为 30 岁，求哥弟各几岁？

(30 + 6) ÷ 2 = 18（岁）（哥）

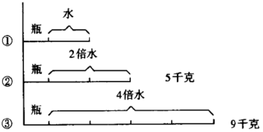
(30 − 6) ÷ 2 = 12（岁）（弟）.

5. 解：此题的实质也是和差问题. 和为 30 斤，差：$3\times2=6$(斤)，由和差问题公式得：

(30 + 6) ÷ 2 = 18 斤（大桶）；

(30 − 6) ÷ 2 = 12 斤（小桶）.

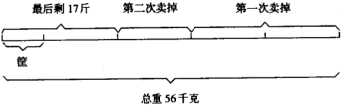
6. 解：画线段图如下：



由图可见，线段③ − 线段② = 2 倍小线段，即一条小线段表示(9 − 5) ÷ 2 = 2(千克)，

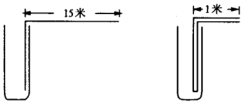
即　原来瓶中水重是 2 千克.

7. 解：画线段图如下：



由图可以看出总重减去最后剩下的(包括筐重和鱼)等于第一次和第二次卖出的鲜鱼总数. 又知第一次卖出的是第二次卖出的 2 倍，即两次卖出的鲜鱼总数是第二次卖出的 3 倍，

即得第二次卖出鱼的总量为$(56-17)\div 3=13$ 千克.
原来鲜鱼总数为 $13\times 4=52$ 千克.
8.解：画示意图如下：



小秋第二次把绳子对折量，井外留 1 米长的双股绳相当实际绳长 2 米，比第一次单股绳测时，井外少了$15-2=13$(米)，因为这段绳放到井里去了，所以得出井深为 13 米。

第14讲　等量代换法

【例1】　已知：△＋○＝24，

○＝△＋△＋△，

求△＝？　　　○＝？

解：将两个等式编号：

△＋○＝24　　　(1)

○＝△＋△＋△　　　(2)

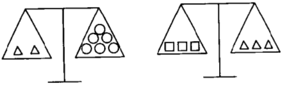
将(1)式中的○用(2)式中的3个△代替

得△＋△＋△＋△＝24

∴　△＝24÷4＝6，

又○＝6＋6＋6＝18.

【例2】　已知：(见下图)



求：一个□等于几个○.

解：由已知的天平图改写成等式：

2×△＝6×○　　　(1)

3×□＝3×△　　　(2)

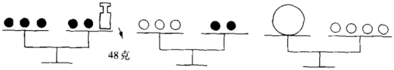
由(1)式得：△＝3×○　　　(3)

由(2)式得：□＝△　　　(4)

将 (3)式代入 (4)式得：□ = 3 × ○，

即一个□等于 3 个○.

【例 3】 已知：(见下图)



(1)　　(2)　　(3)

求：最大的球的重量是多少克？

解：由图(1)得：3● = 2● + 48，

所以● = 48 (克).

由图 (2)得：3○ = 2●，

即：3○ = 2 × 48，

所以○ = 2 × 48 ÷ 3 = 32(克).

由图 (3)得：◯ = 4○ = 4 × 32 = 128(克).

【例 4】 一支钢笔的价钱是一支活动铅笔价钱的 5 倍. 问买 30 支活动铅笔的钱能买几支钢笔？

解：方法 1：列出下列等式：

1 支钢笔 = 5 支铅笔　　(1)

改写 30 支铅笔 = 6 × 5 支铅笔　　(2)

把(1)式代入(2)式得：

30 支铅笔 = 6 × 1 支钢笔 = 6 支钢笔.

方法 2：用字母 x 代表 1 支钢笔的价钱，

用字母 y 代表 1 支铅笔的价钱，

依题意可列出等式：

$x = 5y$

因为 $30y=6\times5y$

用 x 代替 $5y$

得 $30y=6x$.

说明：$x=1\times x$ 省略了 1 和"×"号，即表示 1 个 x；$5y=5\times y$，省略了"×"号，即表示 5 个 y.

【例 5】 已知 13 个李子的重量等于 2 个苹果和 1 个桃子的重量，而 4 个李子和 1 个苹果的重量等于 1 个桃子的重量. 问多少个李子的重量等于 1 个桃子的重量？

解：由题意列等式：

13 李 = 2 苹 + 1 桃 (1)

4 李 + 1 苹 = 1 桃 (2)

把(2)式代入(1)式得：

13 李 = 2 苹 + 4 李 + 1 苹

即 9 李 = 3 苹

即 3 李 = 1 苹 (3)

把(3)式代入(2)式得

4 李 + 3 李 = 1 桃

即 7 李 = 1 桃

即 7 个李子重量等于 1 个桃子的重量.

【例 6】 如果鱼尾重 4 公斤，鱼头重量等于鱼尾加上鱼身一半的重量，而鱼身重量等于鱼头加鱼尾的重量. 问这条鱼有多少公斤重？

解：依题意列出下列等式：

尾 = 4 (1)

头 = 尾 + 身 ÷ 2 (2)

身 = 头 + 尾 (3)

由于等式左右两边同乘以一个数，结果仍相等所以把

(2)式两边同乘以 2 得:

2 头 = 2 尾 + 身　　　　(4)

把(3)式代入(4)式得:

2 头 = 2 尾 + 头 + 尾

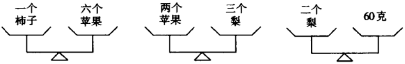
即: 头 = 3 尾 = 3 × 4 = 12(公斤)

身 = 头 + 尾 = 12 + 4 = 16(公斤)

∴　全鱼 = 头 + 身 + 尾 = 12 + 16 + 4 = 32(公斤).

习 题 十 四

1. 已知:(下图所示为简易天平)



求:一个柿子的重量是多少克?

2. 桔子和苹果共有 360 个,其中桔子数是苹果数的 2 倍,求桔子和苹果各有多少个?

3. 小红去文具店买了 6 支铅笔和 5 个笔记本,共花了 1 元 3 角 5 分钱. 已知 3 支铅笔的价钱与 2 个笔记本的价钱相等. 求 1 支铅笔和 1 个笔记本各要多少钱?

4. 在生物课外活动中,同学们种花生比白薯多 105 棵,又知花生棵数是白薯的 16 倍,求花生、白薯各多少棵?

5. 假若 20 只兔子可换 2 只羊,9 只羊可换 3 头猪,8 头猪可换 2 头牛,那么用 5 头牛可换多少只兔子?

6. 商店运来两桶油. 大桶有油 120 斤,小桶有油 90 斤. 两桶油卖出同样多后,大桶剩的油刚好是小桶剩的油的 4 倍,问两桶各剩油多少斤?

7. 兄弟俩各有书若干本. 只知兄的书为弟的书的 3 倍；但若兄给弟 10 本书，则弟的书将为兄的书的 3 倍. 问兄弟二人原有书各多少？

习题十四解答

1. 解：为书写简便，做以下规定：

用字母 x 代表一个柿子的重量；

用字母 y 代表一个苹果的重量；

用字母 z 代表一个梨的重量；

这样就可以用下列等式表示题中的天平图：

$x=6y$ (1)

$2y=3z$ (2)

$2z=60$ 克 (3)

由 (3)式可得：$z=30$ 克. 代入(2)式

得 $2y=3\times30=90$ 克

则 $y=90\div2=45$ 克. 代入(1)式

得 $x=6\times45=270$(克).

2. 解法 1：桔子个数 $=2\times$ 苹果个数 (1)

桔子个数 + 苹果个数 $=360$ (2)

把(1)代入(2)得：

$2\times$ 苹果个数 + 苹果个数 $=360$

即 $3\times$ 苹果个数 $=360$

$\therefore$ 苹果个数 $=360\div3=120$ 个

而桔子个数 $=2\times120=240$ 个.

解法 2：设桔子为 x 个，苹果为 y 个，由题意列等式：

$x=2y$ (1)

$x+y=360$　(2)

把(1)代入(2)式得：$2y+y=360$

即　$3y=360$

得　$y=360\div 3=120$(个)(苹果)

而 $x=2y=2\times 120=240$(个)(桔子).

3.解：因为 3 支铅笔的价钱＝2 个笔记本的价钱　(1)

那么 6 支铅笔的价钱＝4 个笔记本的价钱　(2)

又因为 6 支铅笔的价钱＋5 个笔记本的价钱＝135(分)

把(2)式代入得：

4 个笔记本的价钱＋5 个笔记本的价钱＝135(分)

即 9 个笔记本＝135(分)

∴　1 个笔记本＝135÷9＝15(分)

把 1 个笔记本的价钱代入(1)式得

3 支铅笔＝2×15

1 支铅笔＝2×15÷3＝10(分).

4.解法 1：依题意列出下列等式：

花生－白薯＝105　(1)

花生＝16×白薯　(2)

把(2)式代入(1)式，得：

16×白薯－白薯＝105(棵)

即　15×白薯＝105(棵)

所以　白薯＝105÷15＝7(棵)

因而　花生＝16×7＝112(棵).

解法 2：设种花生 x 棵，种白薯 y 棵.

则有 $\begin{cases} x-y=105 & (1) \\ x=16y & (2) \end{cases}$

将(2)代入(1)式得：

$16y-y=105$

$15y=105$

$y=7$(棵)(白薯)

再将 y 值代入(2)式得：

$x=16y=16\times 7=112$(棵)(花生)

5.解：依题意列出下列等式：

$$\begin{cases}20\text{ 只兔}=2\text{ 只羊} & (1)\\ 9\text{ 只羊}=3\text{ 头猪} & (2)\\ 8\text{ 头猪}=2\text{ 头牛} & (3)\end{cases}$$

欲求 5 头牛＝？只兔

由 (3)式可知：1 头牛＝4 头猪，

由 (2)式可知：1 头猪＝3 只羊，

由 (1)式可知：1 只羊＝10 只兔，

下面依次进行等量代换：

可得：1 头牛＝4 头猪＝4×3 只羊＝12 只羊

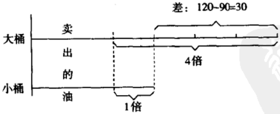
＝12×10 只兔＝120 只兔

5 头牛＝600 只兔

注意：上面由 20 只兔＝2 只羊把等式两边分别除以 2;得到 10 只兔＝1 只羊

等式两边除以同一个数后结果仍相等.

6.解：画下图：



因为两桶卖出去的油一样多.所以

大桶剩油 - 小桶剩油 = 120 - 90 = 30(斤)

又知　大桶剩油 = 4 × 小桶剩油

所以　4 × 小桶剩油 - 小桶剩油 = 30 (斤)

即　3 × 小桶剩油 = 30(斤)

即　小桶剩油 = 10(斤)

因而　大桶剩油 = 10 × 4 = 40(斤).

7. 解法 1：依题意列等式

$$\begin{cases} \text{兄书} = 3 \times \text{弟书} & (1) \\ 3 \times (\text{兄书} - 10) = \text{弟书} + 10 & (2) \end{cases}$$

由(2)得：3 × 兄书 - 3 × 10 = 弟书 + 10

把(1)式代入上式,得

3 × (3 × 弟书) - 30 = 弟书 + 10

8 弟书 = 40

即　弟书 = 40 ÷ 8 = 5(本)

而　兄书 = 3 × 弟书 = 3 × 5 = 15(本).

解法 2：设兄有书 x 本,弟有书 y 本.

则依题意有下列等式：

$$\begin{cases} x = 3y & (1) \\ 3(x - 10) = y + 10 & (2) \end{cases}$$

将(1)代入(2)：

$3(3y - 10) = y + 10$

$9y - 30 = y + 10$

$8y = 40$

则 $y = 5$(本)(弟书)

$x = 3 \times 5 = 15$(本)(兄书).

①

第15讲　等式加减法

【例 1】　大、小二数之和等于 10，之差等于 2，求二数

解：依题意，列等式，并把等式两边分别相加.

$$
\begin{array}{rr}
 & \text{大数} + \text{小数} = 10 \\
+) & \text{大数} - \text{小数} = 2 \\
\hline
 & 2 \times \text{大数} = 12
\end{array}
$$

得：大数 $= 12 \div 2 = 6$

小数 $= 6 - 2 - 4$.

【例 2】　已知：$\square + \triangle = 10$

$\square - \triangle = 2$

求：$\square = ?$　　　$\triangle = ?$

解：根据等式两边分别相加，结果仍相等，有

$$
\begin{array}{rr}
 & \square + \triangle = 10 \quad (1) \\
+) & \square - \triangle = 2 \quad (2) \\
\hline
 & 2 \times \square = 12
\end{array}
$$

得：$\square = 12 \div 2 = 6$

再将□代入(1)式

得：$6 + \triangle = 10$

$\therefore \quad \triangle = 10 - 6 = 4$

① 〔注〕+）表示等式两边分别相加.

故 $\begin{cases}\square = 6 \\ \triangle = 4\end{cases}$

【例 3】　已知：$\square + \square + \triangle = 16$

$\square + \triangle + \triangle = 14$

求：$\square = ?$　　　$\triangle = ?$

解：根据等式两边分别相加，结果仍相等，有

$$\begin{array}{rlr} & \square + \square + \triangle = 16 & (1) \\ +) & \square + \triangle + \triangle = 14 & (2) \\ \hline & 3 \times \square + 3 \times \triangle = 30 & \end{array}$$

或 $3 \times (\square + \triangle) = 30$

得 $\square + \triangle = 10$.　　　(3)

根据等式两边分别相减，结果仍相等，有

$$\begin{array}{rlr} & \square + \square + \triangle = 16 & \\ -) & \square + \triangle + \triangle = 14 & (4) \\ \hline & \square - \triangle = 2 & \end{array}$$

进一步(3)式 + (4)式即

$$\begin{array}{rl} & \square + \triangle = 10 \\ +) & \square - \triangle = 2 \\ \hline & 2 \times \square = 12 \end{array}$$

得 $\square = 12 \div 2 = 6$

把$\square$的值代入(4)式：

得 $6 - \triangle = 2$

得 $\triangle = 6 - 2 = 4$.

【例 4】　已知：$\square + \square + \triangle + \triangle + \triangle = 21$

$\square + \square + \triangle + \triangle + \triangle + \triangle + \triangle = 27$

求△＝？

解：将两个等式改写为

$$2\times\square+3\times\triangle=21 \quad (1)$$

$$2\times\square+5\times\triangle=27 \quad (2)$$

(2)－(1)得：

$2\times\triangle=27-21=6$

得$\triangle=6\div2=3$.

【例5】 小明买1支铅笔和2块橡皮共用去2角4分钱，又知1支铅笔比2块橡皮贵4分钱.问小明买的铅笔每支多少钱？

解：先列出下列等式：

1支铅笔＋2块橡皮＝24　　(1)

1支铅笔－2块橡皮＝4　　(2)

(1)＋(2)：

2支铅笔＝28

1支铅笔＝14(分)＝1角4分.

【例6】 在一次数学考试中，小玲和小军的成绩加起来是195分，小玲和小方的成绩加起来是198分，小军和小方的成绩加起来是193分.问他们三人各得多少分？

解：列出下列等式：

小玲＋小军＝195　　(1)

小玲＋小方＝198　　(2)

小军＋小方＝193　　(3)

将三个等式的左边和右边各项分别相加，得：

2×(小玲＋小军＋小方)＝586

即　小玲＋小军＋小方＝293　　(4)

由　(4)式－(1)式得

小方 = 293 - 195 = 98

由　(4)式 - (2)式得

小军 = 293 - 198 = 95

由　(4)式 - (3)式得

小玲 = 293 - 193 = 100

可见小方得 98 分，小军得 95 分，小玲得 100 分.

习题十五

1. 下面式中：△、□、○各代表一个数，请问他们各代表什么数？

$$\begin{cases} \triangle + \square = 7 \\ \triangle + \bigcirc = 8 \\ \square + \bigcirc = 9. \end{cases}$$

2. 下式中梨、苹果和香蕉各代表一个数，请你把它们算出来.

梨 + 梨 + 柿子 + 香蕉 = 17

梨 + 柿子 + 柿子 + 香蕉 = 14

梨 + 柿子 + 香蕉 + 香蕉 = 13.

3. 小军家养了一只大白兔和一只小花猫. 有一天，小军抱着大白兔站在体重计上称一称，正好是 33 斤；后来小军放下大白兔又抱起小花猫，站在体重计上一称，正好是 31 斤；最后小军把大白兔和小花猫一起放在体重计上称一称是 4 斤. 请你算一算，小军、大白兔和小花猫各是多少斤？

4. 已知：$x + y = 18$　　(1)

$x - y = 14$　　(2)

求：$x=?$　　　　$y=?$

5. 一盒精装的笔，连盒共值 18 元，笔比盒贵 14 元，盒和笔的价钱各是多少？

6. 饲养场出售鸡、鸭，以只数计价，爸爸买 1 只鸡、2 只鸭共付 25 元；如果买 2 只鸡、1 只鸭要付 27 元 2 角. 问鸡、鸭各多少钱一只？

7. 三头牛和八只羊一天共吃青草 93 斤. 五头牛和十五只羊一天共吃青草 165 斤. 问一头牛和一只羊一天共吃青草多少斤？

8. 加工一批零件，师徒二人合作 2 小时可加工 34 个. 已知师傅加工 3 小时比徒弟加工 4 小时多做 2 个. 问师傅每小时加工多少个？

9. 有白、红、黑三色的球. 白的和红的合在一起有 10 个；红的和黑的合在一起有 7 个；黑的和白的合在一起有 5 个. 问三种球合在一起共多少个？

10. 百货商店中两支圆珠笔与三支蘸水笔共值 7 角 8 分；三支圆珠笔与两支蘸水笔共值 7 角 2 分. 问一支圆珠笔值多少钱？

习题十五解答

1. 解：将各等式两边分别相加

$$\triangle+\square=7 \qquad (1)$$

$$\triangle+\bigcirc=8 \qquad (2)$$

$$+)\quad \square+\bigcirc=9 \qquad (3)$$

$$2\times(\triangle+\square+\bigcirc)=24$$

得　△＋□＋○＝12　　(4)

(4)式－(1)式得：○＝5

(4)式－(2)式得：□＝4

(4)式－(3)式得：△＝3.

2. 解：将各等式两边分别相加，见下式：

$$
\begin{array}{rl}
\text{梨}+\text{梨}+\text{柿子}+\text{香蕉}=17 & (1)\\
\text{梨}+\text{柿子}+\text{柿子}+\text{香蕉}=14 & (2)\\
+)\ \text{梨}+\text{柿子}+\text{香蕉}+\text{香蕉}=13 & (3)\\
\hline
4\times(\text{梨}+\text{柿子}+\text{香蕉})=44 &
\end{array}
$$

即　梨＋柿子＋香蕉＝11　　(4)

由(1)式－(4)式得：梨＝6

由(2)式－(4)式得：柿子＝3

由(3)式－(4)式得：香蕉＝2.

3. 解：将称重过程和结果用下列等式表示出来：

小军＋大白兔＝33 斤　　(1)

小军＋小花猫＝31 斤　　(2)

大白兔＋小花猫＝4 斤　　(3)

三式相加有：

2×(小军＋大白兔＋小花猫)＝68 斤

即　小军＋大白兔＋小花猫＝34 斤　　(4)

(4)－(1)：小花猫＝1 斤

(4)－(2)：大白兔＝3 斤

(4)－(3)：小军＝30 斤.

4. 解：

$$
\begin{array}{rl}
x+y=18 & (1)\\
+)\ x-y=14 & (2)\\
\hline
2x=32 & \\
x=16 &
\end{array}
$$

将 x 的值代入(1)式

得　$16+y=18$

所以得 $y=2$　$\therefore \begin{cases} x=16 \\ y=2. \end{cases}$

5. 解：列等式：

笔 + 盒 = 18　　(1)

笔 − 盒 = 14　　(2)

(1) + (2)：2× 笔 = 32

得：笔 = 16(元)

又　16 − 盒 = 14

盒 = 2(元)

所以 $\begin{cases} 笔=16(元) \\ 盒=2(元). \end{cases}$

6. 解：依题意列出下列等式：

$\begin{cases} 1\text{ 只鸡}+2\text{ 只鸭}=250\text{ 角} & (1) \\ 2\text{ 只鸡}+1\text{ 只鸭}=272\text{ 角} & (2) \end{cases}$

(1)式 + (2)式得：

3 只鸡 + 3 只鸭 = 522 角

或 3×(鸡 + 鸭) = 522 角

1 只鸡 + 1 只鸭 = 174 角　　(3)

(1)式 − (3)式得

1 只鸭 = 250 − 174 = 76 角 = 7 元 6 角

(2) − (3)式得：

1 只鸡 = 272 − 174 = 98 角 = 9 元 8 角.

7. 解：依题意列出下列等式

$\begin{cases} 3\text{ 牛}+8\text{ 羊}=93\text{ 斤} & (1) \\ 5\text{ 牛}+15\text{ 羊}=165\text{ 斤} & (2) \end{cases}$

把(1)式等号两边同乘以 2，结果仍相等，故得：

6 牛 + 16 羊 = 186 斤　　(3)

(3) − (2),得:

1 牛 + 1 羊 = 21 斤

即 1 头牛和一只羊一天共吃青草 21 斤.

8.解:设师傅 1 小时加工 x 个,徒弟 1 小时加工 y 个.依题意列出下列等式:

$$\begin{cases} 2x+2y=34 & (1) \\ 3x-4y=2 & (2) \end{cases}$$

把(1)式等号两边同乘以 2,结果仍相等,故有

$4x+4y=68$　　(3)

(2) + (3)得:

$7x=70$

$x=10$(个)(师傅 1 小时做).

9.解:依题意列出下列等式:

$$\begin{cases} 白+红=10 & (1) \\ 红+黑=7 & (2) \\ 黑+白=5 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) + (3),得:

2 ×(白 + 红 + 黑)= 22

所以　白 + 红 + 黑 = 11

即　白球、红球和黑球合在一起共 11 个.

10.解:设 1 支圆珠笔值 x 分,1 支蘸水笔值 y 分,依题意列出下列等式:

$$\begin{cases} 2x+3y=78 & (1) \\ 3x+2y=72 & (2) \end{cases}$$

(1) + (2):

得　$5x+5y=150$

即　$x+y=150\div 5=30$

也即　$2x+2y=60$　　　　(3)

由　(2)式－(3)式得：$x=12$(分)＝1 角 2 分

由　(1)式－(3)式得：$y=18$(分)＝1 角 8 分

即　1 支圆珠笔 1 角 2 分，1 支蘸水笔 1 角 8 分.

附录

第1讲　重量的认识

你的体重是多少公斤？

图 1－1

公斤是重量的单位.

$\boxed{1\text{ 公斤}=1000\text{ 克}}$

一公斤也叫做一千克.

称物体的重量用秤,秤有多种多样.

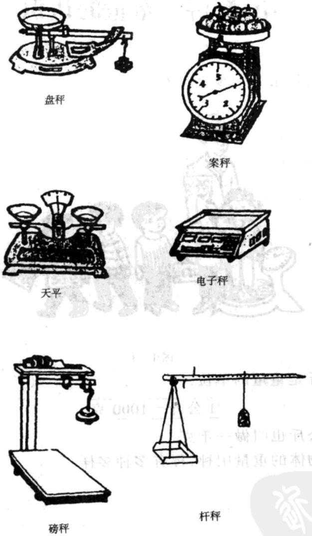


图 1－2

比较小的重量单位是克.

用天平称一称：一个 2 分硬币是多少克？是 1 克；10 个 2 分硬币是多少克？是 10 克；1000 个 2 分硬币是多少克？是 1 千克(1 公斤).

1 袋精盐是 1 公斤；10 袋精盐是 10 公斤；100 袋精盐是 100 公斤；1000 袋精盐是 1000 公斤.

比较大的重量单位是吨.

1 吨 = 1000 公斤.

【例 1】　副食店平均每天售出精盐 500 袋，每袋精盐重 1 公斤，问 4 天售出精盐多少公斤？合多少吨？

解：1 袋精盐重 1 公斤，500 袋重 500 公斤. 如果每天售出精盐 500 公斤，4 天售出：

$$500 \times 4 = 2000(\text{公斤})$$

1000 公斤是 1 吨，2000 公斤是 2 吨.

答：4 天售出精盐 2000 公斤，合 2 吨.

【例 2】　星期日，一家三口人一同去采购. 买了 4 公斤面粉、1 公斤挂面、3 公斤白菜、2 公斤肉. 问他们一共采购了多少公斤食物，合多少克？

解：一共采购的重量是：

$$4 + 1 + 3 + 2 = 10(\text{公斤})$$

1 公斤是 1000 克，10 公斤是 10000 克(10 个千是 1 万).

答：他们采购了 10 公斤食物. 合 10000 克.

【例 3】　张阿姨和李阿姨合买了一筐苹果，连筐一共是 20 公斤. 张阿姨从筐中取走 10 公斤，空筐重 1 公斤. 问李阿姨买到苹果多少公斤？合多少克？

解：李阿姨买到苹果：

$$20-10-1=9(\text{公斤})$$

$$1000\text{ 克}\times 9=9000\text{ 克}$$

答：李阿姨买到苹果 9 公斤，合 9000 克．

【例 4】 9 个人合买香蕉 27 公斤．问每人平均得到香蕉多少公斤？合多少克？

解：每人平均得到香蕉：

$$27\text{ 公斤}\div 9=3\text{ 公斤}$$

$$1000\text{ 克}\times 3=3000\text{ 克}$$

答：每人平均得到香蕉 3 公斤，合 3000 克．

【例 5】 王叔叔家 30 天食用 6 公斤鸡蛋，每公斤鸡蛋价值 5 元人民币．问王叔叔在 90 天中买鸡蛋用了多少元人民币？

解：在 30 天中买鸡蛋用人民币：

$$5\text{ 元}\times 6=30\text{ 元}$$

平均每天买鸡蛋用人民币

$$30\text{ 元}\div 30=1\text{ 元}$$

在 90 天中，买鸡蛋用人民币：

$$90\times 1=90(\text{元})$$

答：王叔叔家在 90 天中，买鸡蛋用人民币 90 元．

【例 6】 煤厂把 1800 吨煤的二分之一卖给联合大学，余下的平均卖给三个中学．问联合大学和每个中学各买到煤多少吨？

解：联合大学买到煤：

$$1800\text{ 吨}\div 2=900\text{ 吨}$$

三个中学一共买到煤：

$$1800\ 吨 - 900\ 吨 = 900\ 吨$$

每个中学买到煤：

$$900\ 吨 \div 3 = 300\ 吨$$

答：联合大学买到煤 900 吨，每个中学买到煤 300 吨.

习　题　一

1. 填空：

1 公斤 =(　)克；　8 公斤 =(　)克.

1 吨 =(　)公斤；　6 吨 =(　)公斤.

2. 你的体重是多少公斤？合多少克？

3. 李明买一袋绵白糖重 500 克，买一袋麦乳精重 250 克，买一袋面包 250 克. 问李明采购的重量一共多少克？合多少公斤？

4. 王山采购梨和香蕉的总重量是 2 公斤. 其中梨的重量是 800 克，问王山买了多少克香蕉？

5. 一袋全脂甜奶粉是 454 克，问 9 袋是多少公斤零多少克？

6. 6 袋白瓜子共重 1080 克，问一袋白瓜子重多少克？4 袋白瓜子重多少克？

7. 菜站从 3 吨零 600 公斤白菜中取出一半卖给 9 户人家，问每家买到白菜多少公斤？

习题一解答

1. 1 公斤 =（1000）克；8 公斤 =（8000）克；
   1 吨 =（1000）公斤；6 吨 =（6000）公斤.
2. （略）.
3. 答：李明采购的总重量一共有 1000 克，合 1 公斤.
4. 答：王山买了 1200 克香蕉.
5. 答：9 袋全脂奶粉共重 4086 克，合 4 公斤零 86 克.
6. 1080 克 ÷ 6 = 180 克
   180 克 × 4 = 720 克
   答：1 袋白瓜子重 180 克，4 袋白瓜子重 720 克.
7. 1000 公斤 × 3 + 600 公斤 = 3600 公斤
   3600 公斤 ÷ 2 ÷ 9 = 200 公斤
   答：每家买到白菜 200 公斤.

第2讲　长度的认识

量物体的长度要用尺，尺有很多种.

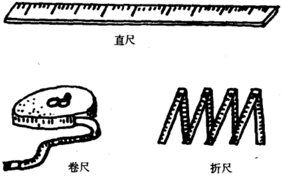


图 2－1

每个同学都有一把直尺，用直尺可以画直线，量长度.

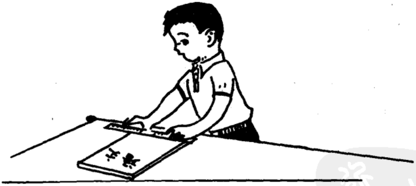


图 2－2

直尺上最小的一小格的长是 1 毫米. 10 个小格的长度是 1 厘米.

$\boxed{1\text{ 厘米} = 10\text{ 毫米}}$

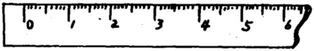


图 2－3

小学生用的三角板的厚度大约是 1 毫米．你量量看．

10 个厘米的长是 1 分米．

$\boxed{1\text{ 分米} = 10\text{ 厘米}}$

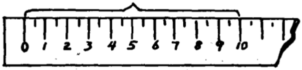


图 2－4

比分米长的单位是米，10 个分米的长是 1 米．

$\boxed{1\text{ 米} = 10\text{ 分米}}$

售货员量布时用米尺；裁缝做活用直尺和皮尺；木匠做活用直尺和钢尺．这些尺子上都刻有米、分米、厘米、毫米的尺寸．

比米还长的单位是公里，1000 米就是 1 公里．

$\boxed{1\text{ 千米} = 1000\text{ 米}}$

两地的距离若比较长，通常用公里做长度单位．

【例 1】 量一量：两条线段各多少毫米？合多少厘米零多少毫米．

图 2－5

解：线段(1)长 20 毫米合 2 厘米；

线段(2)长 31 毫米合 3 厘米 1 毫米．

【例 2】 量一量：你的数学课本长多少？宽多少？

解：数学课本的长 18 厘米 3 毫米，宽 13 厘米．

【例 3】 请你画出：(1)长方形(长 2 厘米又 1 毫米，宽 1 厘米)

(2)正方形(边长为 1 厘米)

作图：

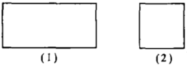


图 2－6

【例 4】 量一量图 2－7 的直角三角形的三条边各多长？

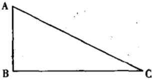


图 2－7

解：量得 AB＝15 毫米＝1 厘米 5 毫米；

BC＝30 毫米＝3 厘米；

CA＝33 毫米＝3 厘米 3 毫米．

【例 5】 填空：

1 公里＝(　)米；　　1 米＝(　)分米；

1 分米＝(　)厘米；　　1 米＝(　)厘米；

1 公里＝(　)分米＝(　)厘米；

2 公里＝(　)米；　　10 米＝(　)厘米；

解：1 公里＝(1000)米；　1 米＝(10)分米；

1 分米＝(10)厘米；　1 米＝(100)厘米；

1 公里＝(10000)分米＝(100000)厘米；

2 公里＝(2000)米；10 米＝(1000)厘米.

【例 6】 80 厘米的绳子对折三次后将绳子分为几等份？每份多长？

解：80 厘米的绳子对折三次后将绳子分的份数是：

$2\times2\times2=8$

每份的长度是：80 厘米÷8＝10 厘米.

答：绳子被分成 8 等份，每份长 10 厘米.

【例 7】 哥哥的一"拃"长是 18 厘米，见图 2－8，他量一根棍是 5"拃".估计这根棍有多长？

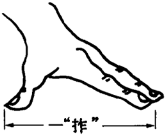


图 2－8

解：18 厘米×5＝90 厘米＝9 分米.

答：估计这根棍长 9 分米.

【例 8】 爸爸的一"步"长是 8 分米(见图 2－9).爸爸从家到工作地点共走 1250"步".问两地间距离大约是多少？

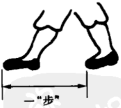


图 2－9

解：爸爸 1 步的长度是 8 分米，1250 步的长度是：

$1250\times8=10000$(分米)

10000 分米 = 1000 米 = 1 公里.

答：家与工作地点的距离大约是 1 公里.

习　题　二

1. 填空：

1 公里 =(　　)米；2 公里 =(　　)分米；1 米 =(　　)毫米；

2 米 =(　　)厘米；10 米 =(　　)厘米；200 米 =(　　)分米.

2. 图 2 − 10 中有几个线段？量一量，每条线段有多长？

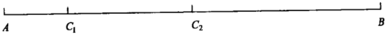


图 2 − 10

3. 数一数：图 2 − 11 中有几个正方形？量一量，每个正方形的边长是多少？

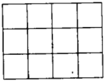


图 2 − 11

4. 量一量，图 2 − 12 中的直角三角形的每边长是多少？

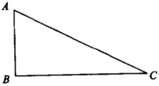


图 2 − 12

5. 现有三条绳子，第一条长 1 米 5 分米，第二条长 2 米，第三条长 2 米 6 厘米. 问三条绳子一共有多长？

6. 明明的一“拃”长 15 厘米，他量一个桌子有 6“拃”

长、4“拃”宽.问桌子的长和宽大约是多少？

7.叔叔的一“步”长 9 分米，他量一个屋子有 5 步长 4 步宽.问屋子的长和宽大约是多少？

8.一条绳子是 72 米，现在要把它分成 4 等份，问需对折几次？1 份有多长？2 份有多长？3 份有多长？

习题二解答

1.1 公里 =（1000）米；2 公里 =（20000）分米；
1 米 =（1000）毫米；2 米 =（200）厘米；
10 米 =（1000）厘米；200 米 =（2000）分米.

2.图 2 - 10 中线段的条数是：3 + 2 + 1 = 6，
$AC_1 = 14$ 毫米，$C_1C_2 = 30$ 毫米，
$C_2B = 45$ 毫米，$AC_2 = 44$ 毫米，
$C_1B = 75$ 毫米，$AB = 89$ 毫米.

3.图 2 - 11 中正方形的个数是：

$$4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 20$$

12 个较小的正方形，边长是 5 毫米；
6 个中等正方形，边长是 1 厘米；
2 个较大的正方形，边长是 15 毫米.

4.图 2 - 12 中的直角三角形，直角边 $AB = 15$ 毫米，$BC = 30$ 毫米，斜边 $AC = 33$ 毫米.

5.三条绳子一共长 5 米 5 分米 6 厘米.

6.桌子的长大约 90 厘米，宽大约 60 厘米.

7.屋子的长大约 4 米 5 分米，宽大约 3 米 6 分米.

8.72 米的绳子分成四等份，需要对折两次.其中一份长 18 米，两份长 36 米，三份长 54 米.

第3讲 时间的认识(上)

张萌的生活习惯好,每天按时起床,按时学习、锻炼和休息.

图 3－1

计算时间的工具是钟表.

图 3－2

钟面上有时针、分针、秒针和 12 个数码.短针叫做时针,长针叫做分针,另有一个细长针叫做秒针.

钟表的圆周被 12 个数码分成 12 个相等的大格.每个大格又分成 5 个相等的小格.这样,钟面上的圆周共分成

了 60 个相等的小格.

时针走 1 个大格是 1 小时；分针走 1 个小格是 1 分钟；秒针走 1 个小格是 1 秒.

秒针走一圈是 60 秒，分针走一圈是 60 分钟，时针走一圈是 12 小时.

当时针走过一个数字时，分针就走了一圈. 于是：

$\boxed{1\text{ 小时} = 60\text{ 分钟}}$

当分针走一小格时，秒针就走一圈. 于是：

$\boxed{1\text{ 分钟} = 60\text{ 秒}}$

通常 15 分钟叫做一刻钟. 于是：

$\boxed{1\text{ 刻} = 15\text{ 分钟}}$

这样认识钟表：

当分针指着 12 的时候，时针指着数码几就是几点钟.

8点　　11点　　2点

图 3－3

时针走过数字几，就是几点. 再看分钟从数 12 起，顺时针走过多少小格就是几点零多少分.

4 点 45 分　　10 点 5 分　　12 点 15 分

$\boxed{4:45}$　　$\boxed{10:05}$　　$\boxed{12:15}$

图 3－4

4 点 45 分又叫做 4 点 3 刻(因为 1 刻 = 15 分钟，45 分钟里有 3 个 15 分钟.)

12 点 15 分钟又叫做 12 点 1 刻.

9 点 30 分钟又叫做 9 点半.

【例 1】 写出每个钟表盘上所指的时间.

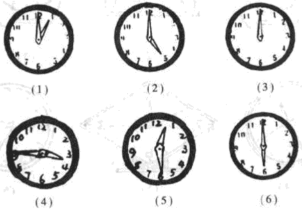


图 3－5

解：图 3－5 中各钟表盘上所指的时间分别是：

(1)1 点；　　(2)5 点；

(3)12 点；　　(4)3 点 45 分；

(5)12 点 30 分；　　(6)6 点.

【例 2】 你能看出图 3－6 中各种钟表盘上所指的时间吗?

解：图 3－6 中各种钟表盘上所指的时间分别是：

(1)10 点 30 分或 10 点半；

(2)5 点 15 分或 5 点 1 刻；

(3)7 点 45 分或 7 点 3 刻；

(4)12 点 35 分 20 秒；

(5)11 点 50 分 15 秒；

(6)2 点 25 分 45 秒.

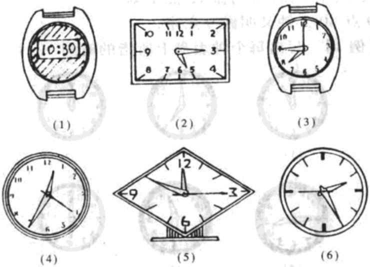


图 3－6

【例 3】 看谁跑得最快？

五十米赛跑	姓名	王光	李红	葛梅	孙伟
	时间	12 秒	14 秒	10 秒	11 秒

解：葛梅跑得最快，50 米赛跑，只用 10 秒钟.

【例 4】 看图 3－7，写出小华三餐的时间.

解：小华早餐：7 点 15 分(7 点 1 刻)；

午餐：12 点 15 分(12 点 1 刻)；

晚餐：5 点 45 分(5 点 3 刻).

图 3－7

【例 5】　看图 3－8，彤彤做语文作业用几分钟？做数学作业用几分钟？一共用几小时？

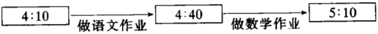


图 3－8

解：从 4 点 10 分到 4 点 40 分，钟表走 30 分钟；从 4 点 40 分到 5 点 10 分，钟表走 30 分钟．钟表一共走：

30 分＋30 分＝60 分

60 分＝1 小时

答：彤彤做语文作业和数学作业各用 30 分钟．一共用 1 小时．

习　题　三

1．填空：

60 秒钟＝(　　)分钟；　　半分钟＝(　　)秒；

60 分钟＝(　　)小时；　　6 小时＝(　　)分钟；

15 分钟＝(　　)刻钟；　　45 分钟＝(　　)刻钟．

2．看图 3－9，王老师从家到学校用多少时间？王老师在学校多少时间？

离家　　到校　　离校

图 3－9

3. 孙健 30 秒钟能写 8 个字，问他 1 分钟能写多少个字？9 分钟能写多少个字？

4. 看着钟表的秒针，测验一下你在 10 秒内，能由 1 数到几？再测验一下在 30 秒内你的脉搏跳多少次？

5. 一个小朋友用自来水洗完手，忘记关水龙头，一分钟白白流走水 8 千克，问 8 分钟浪费多少水？

6. 看本讲第一个图（图 3－1），写出张萌每天起床、学习、锻炼和休息的时间.

习题三解答

1. 60 秒钟＝(1)分钟；　　半分钟＝(30)秒钟；

60 分钟＝(1)小时；　　6 小时＝(360)分钟；

15 分钟＝(1)刻钟；　　45 分钟＝(3)刻钟.

2. 王老师从家到学校用 35 分钟；王老师在学校的时间是 9 个小时零 15 分钟.

3. 孙健 1 分钟能写 16 个字；9 分钟能写 144 个字.

4. 参考解答：10 秒内，大约能从 1 数到 25 左右；在 30 秒内，小学生脉搏跳动大约在 43 次左右.

5. 8 分钟浪费水 64 千克.

6. 张萌每天早上 6 点半起床；8 点开始上课学习；10 点做操锻炼身体；晚上 7 点看电视休息；8 点半睡觉.

第4讲 时间的认识(下)

白天和黑夜合起来叫做一昼夜,俗称一天.一天内钟表的时针走两圈.于是:

$\boxed{1\text{天}=24\text{小时}}$

学生的课程表以“周”为单位编排.

$\boxed{1\text{周}=7\text{天}}$

一周的七天分别叫做:星期一、星期二、星期三、星期四、星期五、星期六、星期日.

比一周还长的时间单位是月和年.一年有12个月.

$\boxed{1\text{年}=12\text{月}}$

一年12个月中有七个月是“大月”,五个月是“小月”.

人们常常用自己的拳头记几月大,几月小.

看图4－1:拳头的凸出处是大月,凹进处是小月.

这样记:

1月大,2月小;

3月大,4月小;

5月大,6月小;

7月大,8月大;

9月小,10月大;

11月小,12月大.

“大月”每月有31天.

图4－1

除 2 月以外的“小月”每月有 30 天.

年分平年和闰年.平年的二月有 28 天,闰年的 2 月有 29 天.

算一算,平年和闰年各有多少天.

不论平年还是闰年,每年都有七个“大月”,“大月”总共有：31 天×7=217 天.

除二月外,每年都有四个“小月”,四个“小月”共有：

30 天×4=120 天.

平年的二月是 28 天,闰年二月是 29 天.

因此,平年一年的天数是：

217 天+120 天+28 天=365 天.

闰年一年的天数是：

217 天+120 天+29 天=366 天.

假如你知道公元 1993 年 12 月 31 日是星期五,又知道 1994 年是平年,你就能编出 1994 年的年历.下面只写出 1994 年的年历中的一部分,其他部分很容易补出.

1994 年															
星期	日	一	二	三	四	五	六	星期	日	一	二	三	四	五	六
							1				1	2	3	4	5
一	2	3	4	5	6	7	8	二	6	7	8	9	10	11	12
	9	10	11	12	13	14	15		13	14	15	16	17	18	19
	16	17	18	19	20	21	22		20	21	22	23	24	25	26
月	23	24	25	26	27	28	29	月	27	28					
	30	31													

比年还长的时间单位是世纪.

$\boxed{1\text{ 世纪}=100\text{ 年}}$

公元 1 年到 100 年叫做 1 世纪；
公元 101 年到 200 年叫做 2 世纪；
公元 201 年到 300 年叫做 3 世纪；
⋮
公元 901 年到 1000 年叫做 10 世纪；
⋮
公元 1901 年到 2000 年叫做 20 世纪；
⋮

1921 年 7 月 1 日是中国共产党的诞生日.
1949 年 10 月 1 日是中华人民共和国的诞生日.
想一想：1921 年和 1949 年各属于几世纪？
1921 年和 1949 年都属于 20 世纪.

【例 1】 算一算：5 天半是多少小时？

解：一天 = 24 小时，
五天是：24 小时 × 5 = 120 小时
半天是：24 小时 ÷ 2 = 12 小时
五天半是 120 小时 + 12 小时 = 132 小时.

【例 2】 填空：

1 周 =（　）天；　　9 周 =（　）天；
1 周 =（　）小时；　5 周 =（　）小时.

解：1 周 =（7）天；　9 周 =（63）天；
1 周 =（168）小时；5 周 =（840）小时.

【例 3】 平年的第一季度（1～3 月）、第二季度（4～6 月）各有多少天？

解：1 月和 3 月各有 31 天，2 月有 28 天.

因此，第一季度共有：

31 天 × 2 + 28 天 = 90 天.

4 月和 6 月各有 30 天，5 月有 31 天.

因此，第二季度共有：

30 天 × 2 + 31 天 = 91 天.

答：平年第一季度有 90 天，第二季度有 91 天.

【例 4】　闰年的一年有 366 天，一周有 7 天. 问闰年一年有多少周？

解：闰年的一年包含的周数是：

366 ÷ 7 = 52……2.

答：闰年的一年有 366 天，包含 52 周零 2 天.

【例 5】　王教授出国讲学，5 月 3 日零点离国. 8 月 5 日早晨 8 点归国. 问王教授在国外的时间有多长？

解：5 月有 31 天，王教授除 2 天在国内，其他时间都在国外.

因此，5 月王教授在国外的时间是：31 天 − 2 天 = 29 天.

6 月有 30 天，王教授都在国外.

7 月有 31 天，王教授也都在国外.

8 月的 1 日至 4 日及 5 日的前 8 小时，王教授在国外. 因此，8 月王教授在国外的时间是 4 天零 8 小时.

总起来，王教授在国外的时间是：

29 天 + 30 天 + 31 天 + 4 天 8 小时 = 94 天 8 小时.

答：王教授在国外的时间是 94 天零 8 个小时.

【例 6】　下列公元的年代各在多少世纪？

(1)90 年；　　　　(2)102 年；
(3)990 年；　　　　(4)1884 年.

解： (1)1 世纪；　　　　(2)2 世纪；
(3)10 世纪；　　　　(4)19 世纪.

【例 7】 从 1884 年到 1911 年经过多少年？从 1911 年到 1949 年经过多少年？一共经过多少年？

解： $1911-1884=27$(年)
$1949-1911=38$(年)
$27+38=65$(年).

答： 从 1884 年到 1911 年经过 27 年；从 1911 年到 1949 年经过 38 年. 一共经过 65 年.

习　题　四

1. 填空：
1 天＝(　　)小时；
1 周＝(　　)天；
1 年＝(　　)月；
平年 2 月＝(　　)天；
大月＝(　　)天；
闰年 2 月＝(　　)天；
平年 1 年＝(　　)天.

2. 填空：
1 世纪是从公元(　　)年至(　　)年；
9 世纪是从公元(　　)年至(　　)年；
12 世纪是从公元(　　)年至(　　)年；
19 世纪从公元(　　)年至(　　)年.

3. 王芳每天学习 6 小时，锻炼身体 1 小时 30 分钟，文娱活动 2 小时 30 分钟，用餐 2 小时，睡眠 9 小时. 问王芳每天还有多少时间自由活动？

4. 想一想：一个月至少包含几周？

5. 每年的第三季度（7～9 月）和第四季度（10～12 月）各有多少天？

6. 少先队夏令营的时间是 7 月 21 日至 8 月 4 日. 如果将开始和结束的两天计算在内，问少先队夏令营共度过多少天？

7. 填空：

部分历史年表	起始年代（公元）	经过的年数
元　　朝	1279～1368	（　　）
明　　朝	1368～1644	（　　）
清　　朝	1644～1911	（　　）
中华民国	1912～1949	（　　）

8. 1994 年 12 月 31 日是星期六. 请你编出 1995 年（平年）1 月和 2 月的月历.

习题四解答

1. 1 天 =（24）小时

1 周 =（7）天；

1 年 =（12）月；

平年 2 月 =(28)天；

大月 =(31)天；

闰年 2 月 =(29)天；

平年 1 年 =(365)天.

2.1 世纪是从公元(1)年至(100)年；

9 世纪是从公元(801)年至(900)年；

12 世纪是从公元(1101)年至(1200)年；

19 世纪是从公元(1801)年至(1900)年.

3.24 小时 − 6 小时 − 1 小时 30 分 − 2 小时 30 分 − 2 小时 − 9 小时 = 3 小时.

答：王芳每天还有 3 小时自由活动.

4.一个月至少有 28 天,28÷7 = 4(周).

答：一个月至少包含 4 周.

5.每三季度的天数是：

31 天 + 31 天 + 30 天 = 92 天

第四季度的天数是：

31 天 + 30 天 + 31 天 = 92 天.

6.答：少先队夏令营共度过 15 天.

7.

部分历史年表	起始年代(公元)	经过的年数
元　朝	1279～1368	(89 年)
明　朝	1368～1644	(276 年)
清　朝	1644～1911	(267 年)
中华民国	1912～1949	(37 年)

8.

1995 年															
星期	日	一	二	三	四	五	六	星期	日	一	二	三	四	五	六
	1	2	3	4	5	6	7					1	2	3	4
一	8	9	10	11	12	13	14	二	5	6	7	8	9	10	11
	15	16	17	18	19	20	21		12	13	14	15	16	17	18
月	22	23	24	25	26	27	28	月	19	20	21	22	23	24	25
	29	30	31						26	27	28				

人大附中远程教育网网址：
http://www.rdfz.com

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

- 仁华学校奥林匹克数学课本（12册）
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练导引·小学部（2册）
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练教程（4册）
- 仁华学校奥林匹克数学竞赛试题与详解·小学部（6册）
- 仁华学校奥林匹克数学测试卷（4册）

仁华学校奥林匹克物理系列丛书

- 仁华学校奥林匹克物理课本（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理试题解析（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理实验（2册）

仁华学校奥林匹克英语系列丛书

- 仁华学校奥林匹克图解英语（4册）

ISBN 7-5000-6978-2
9 787500 069782 >

ISBN7-5000-6978-2/G·660
定价：10.00元